Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
Образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

ОЛИМИПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «НАСЛЕДНИКИ ЛЕВШИ» ПО ФИЗИКЕ

Информационно-методическое пособие для участников олимпиады школьников

с рекомендациями, решениями
и списком рекомендуемой литературы

Тула 2018

Дорогие школьники!

Отличительной особенностью подготовки к олимпиаде по физике является ее комплексность. Это не просто дополнительные занятия по углубленной программе. В отличие от других предметов, подготовка к олимпиаде по физике требует обязательного расширения и углубления знаний практически всех, изучаемых в школе разделов математики, знания основ строения вещества, изучаемого в химии, основ информатики, а также приемов развития памяти и методов запоминания.

Это должен быть комплекс взаимосвязанных тематикой и временем изучения программ по математике, физике, химии и информатике. Именно такое сочетание дает достаточно быстрое и качественное овладение приемами и методами решения физических задач. И если включение химии и информатики в программу подготовки к олимпиаде по физике может быть делом нужным, но не жизненно важным, то без специальных занятий по математике подготовка к олимпиаде по физике состояться просто не может. Дело в том, что решить физическую задачу – означает восстановить неизвестные связи параметров и величин заданного физического явления.

Решение любой физической задачи предполагает три обязательных этапа:

- физический – он заключается в анализе процесса или явления и составлении замкнутой системы уравнений;
- математический – получение решения этой системы в общем и числовом виде;
- заключительный - анализ решения с физической точки зрения.

Поэтому решение задач по физике требует очень глубоких знаний практически всех разделов математики. К сожалению, все проводимые олимпиады по физике показывают, что учащиеся не справляются с математической частью физических задач, в особенности, если требуется знание геометрии или тригонометрии.

Готовясь к олимпиадам по физике, нужно помнить о том, что олимпиада – это всего лишь интеллектуальное соревнование, которое проводится, прежде всего, с целью повышения интереса школьников к изучению предмета. Поэтому не следует расстраиваться, если стать победителем олимпиады не удалось. В любом случае подготовка к олимпиаде позволяет глубже освоить школьную программу, изучить дополнительные вопросы курса физики, научиться решать различные типы задач (в том числе, весьма трудных). В конечном итоге, все это принесет ощутимую пользу в плане получения хорошего образования и положительно скажется при сдаче итоговой аттестации.

Задачи с разбором решений
7 класс
Вариант 1

1. Два пассажира, имея секундомеры, решили определить скорость поезда: один по стуку колес на стыках рельсов (зная, что длина рельса 10 *м*), а другой по числу телеграфных столбов, мелькающих в окне (зная, что расстояние между столбами 50 *м*). Первый пассажир при первом стуке колес пустил в ход свой секундомер и на 156 стуке его остановил. Оказалось, что прошло 3 *мин*. Второй пассажир пустил свой секундомер при появлении в окне первого столба и остановил при появлении 32-го столба. Оказалось, что и его опыт длился 3 *мин*. У первого пассажира получилось, что скорость поезда равна $V_1 = 31{,}2 км/час$, а у второго $V_2 = 32 км/час$. Кто из них ошибся и почему? Какова скорость поезда в действительности?

Решение

Сравнивая получившиеся результаты, приходим к выводу, что пассажиры неверно оценили расстояние. Так как первый пассажир запустил секундомер на первом стуке и остановил на 156-ом, то число интервалов между стуками будет 155 , т.е. $S = 10 \cdot 155 = 1550 м = 1{,}55 км$.

Аналогично для второго пассажира $S = 50 \cdot 31 = 1550 м = 1{,}55 км$.

Теперь расстояние получилось одинаковым.

Скорость поезда $\upsilon = \dfrac{S}{t} = \dfrac{1550}{3 \cdot 60} = 8{,}61 м/с = 31 км/час$

2. Два друга, живущие на одной трассе на расстоянии L = 18 *км* друг от друга, решили поехать на рыбалку. Они выехали одновременно в одном направлении со скоростями $V_1 = 10 м/с$ и $V_2 = 15 м/с$. К месту рыбалки они подъехали одновременно. Сколько времени они были в пути? На каком расстоянии от первого друга находилось место рыбалки?

Решение

Друзья одновременно подъехали к месту встречи, но при этом второй проделал больший путь, т.е $V_2 t - V_1 t = L$. Тогда время в пути $t = \dfrac{L}{V_2 - V_1} = \dfrac{18}{54 - 36} = 1 час$.

От первого мальчика до места рыбалки $S = V_1 t = 36 км$.

3. К велосипеду Василия, решившие повеселиться друзья, привязали консервные банки. С какой скоростью должен ехать Василий, чтобы не слышать грохота банок?

Решение

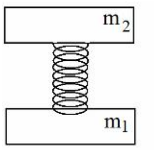
Так как велосипед не может ехать со скоростью большей скорости звука, то чтобы не слышать грохота банок, Василий должен стоять, т.е $V = 0$.

4. В бочку налили керосин до высоты Н, при этом давление на дно сосуда составило $P_1 = 104кПа$. Во вторую бочку до той же высоты налили ртуть. Чему равно давление на дно второй бочки? Плотность керосина $\rho_1 = 800кг/м^3$, плотность ртути $\rho_2 = 13600кг/м^3$, атмосферное давление $P_0 = 100кПа$

Решение

Давление на дно первой бочки $P_1 = \rho_1 gH + P_0$, второй $P_2 = \rho_2 gH + P_0$.

Высота жидкости $H = \dfrac{P_1 - P_0}{\rho_1 g}$. Подставляя во второе уравнение эту высоту, получим $P_2 = \dfrac{(P_1 - P_0)\rho_2}{\rho_1} + P_0 = 168кПа$



5. Два тела массами $m_1 = 1кг$ и $m_2 = 2кг$ соединили пружиной и поставили друг на друга как показано на рисунке, при этом длина пружины оказалась равной 12 *см*. Если поменять грузы местами, то длина пружины будет 14 *см*. Определить жесткость пружины. Ускорение свободного падения g = 10 *м/с*^{2}.

Решение

Уравнение динамики для верхнего груза в первом случае $m_2 g = k(L_0 - L_1)$, (1)
во втором $m_1 g = k(L_0 - L_2)$. (2)

Разделим (1) на (2) $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{L_0 - L_1}{L_0 - L_2} = 2$.

Решая это уравнение, находим длину недеформированной пружины $L_0 = 16см = 0{,}16м$.

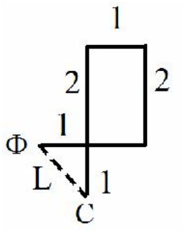
Из уравнения (1) получим жёсткость пружины $k = \dfrac{m_2 g}{L_0 - L_1} = 500Н/м$

7 класс

Вариант 2

1. Миша участвовал в игре по спортивному ориентированию. В течение *20 минут* он бежал на север со скоростью $\upsilon_1 = 9км/час$, *10 минут* шел на восток со скоростью $\upsilon_2 = 6км/час$, *30 минут* шел на юг со скоростью $\upsilon_3 = 4км/час$, а последние *15 минут* бежал на восток со скоростью $\upsilon_4 = 8км/час$. На каком расстоянии от старта оказался финиш? Чему равна средняя скорость движения мальчика?

Решение



Путь $S_1 = \upsilon_1 t_1 = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3км$; $S_2 = \upsilon_2 t_2 = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1км$;

$S_3 = \upsilon_3 t_3 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2км$; $S_4 = \upsilon_4 t_4 = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2км$.

Из рисунка (все расстояния даны в *км*) видно, что расстояние между точками старта и финиша можно найти по теореме Пифагора $L = \sqrt{1+1} = 1{,}41км$

Средняя скорость $\upsilon_{ср} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = \frac{8}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = 6{,}4км/час = 1{,}78м/с$.

2. “Три мудреца в одном тазу пустились по морю в грозу
Будь попрочнее старый таз длиннее был бы наш рассказ”

Рассчитайте сколько времени длилась беседа мудрецов, если таз имел вертикальные боковые стенки высотой *H = 30 см*, площадь дна $S = 1{,}5м^2$, массу *m = 10кг.* Общая масса мудрецов *M =190кг.* Из-за дырок в тазу и ливня вода в тазу прибывала со скоростью *10л/мин*. Плотность воды $\rho = 1000кг/м^3$.

Решение

Таз будет плавать при условии, что сила Архимеда уравновешивает силу тяжести , т.е. $(M + m + m_1)g = \rho g V$ (1)

Масса попавшей в таз воды $m_1 = \rho \upsilon t$, при погружении до краёв объём будет равен $V = SH$.

Подставляя в (1) , получим $M + m + \rho \upsilon t = \rho V$.

Тогда время до погружения $t = \frac{\rho SH - M - m}{\rho \upsilon} = \frac{1000 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}3 - 190 - 10}{1000 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 25мин$

3. Гарри Поттер и Рон развлекались, меняя размер фигур на шахматной доске. Например, короля они уменьшили в *10 раз*. Если считать, что масса при такой трансформации остаётся неизменной, то во сколько раз изменилась плотность шахматной фигуры?

Решение

Если размеры уменьшаются в *10 раз*, то объём уменьшается в *1000 раз*.

Плотность $\rho = \frac{m}{V}$, следовательно, при неизменной массе плотность увеличится в *1000 раз*.

4. Два автомобиля едут равномерно навстречу друг другу по одной прямой. Расстояние между ними уменьшается на $L_1 = 34м$ за каждые $t_1 = 10c$. После встречи автомобили поехали в одном направлении с прежними скоростями. В этом случае расстояние между ними увеличивалось на $L_1 = 3м$ за каждые $t_2 = 5c$.

1) Определить скорость каждого автомобиля.

2) На каком расстоянии друг от друга окажутся автомобили через *1 мин* с начала движения в одном направлении?

Решение

При движении навстречу $L_1 = (\upsilon_1 + \upsilon_2)t_1$

При движении в одном направлении $L_2 = (\upsilon_1 - \upsilon_2)t_2$

После подстановки известных величин получим $\upsilon_1 + \upsilon_2 = 3,4$

$\upsilon_1 - \upsilon_2 = 0,6$

Тогда $\upsilon_1 = 2м/c$; $\upsilon_2 = 1,4м/c$

Расстояние между ними через 1 минуту $L = (\upsilon_1 - \upsilon_2)t = (2 - 1,4)60 = 36м$

5. Размер стандартного строительного кирпича $250мм \times 120мм \times 65мм$, масса *m* =3,6 *кг.* Определите плотность кирпича и вес штабеля объёмом $V = 1м^3$. Ускорение свободного падения $g = 10м/c^2$.

Решение

Плотность $\rho = \frac{m}{V_к} = \frac{m}{abc} = \frac{3,6}{0,25 \cdot 0,12 \cdot 0,065} = 1846кг/м^3$.

Вес штабеля $P = mg = \rho Vg = 18460H = 18,5кH$

8 класс

Вариант 1

1. Друзья готовили декорации для сказочного представления. Они решили, что трёхголового дракона вылепят из пластилина. Получившийся дракон так понравился Ивану, что он решил слепить такого же для себя, но у него не было столько пластилина, да и такой большой дракон дома занимает слишком много места. Иван прикинул, что если он сделает точную копию, но размер уменьшит в два раза, то материала у него хватит. Сколько пластилина использовал Иван, если на "оригинал дракона" истрачено *4 кг* пластилина?

Решение

Масса равна $m = \rho V$. Все линейные объёмы уменьшены в два раза, следовательно, объём уменьшится в 8 раз. Так как плотность не изменяется, то на копию дракона ушло *0,5 кг*

2. Самый длинный пешеходный мост в Санкт-Петербурге – мост Александра Невского. Этот мост имеет длину $L = 629$ *м*. Колонна солдат длиной $l=100$ *м* проходит этот мост за *3 минуты*. Какова скорость колонны?

Решение

Когда "хвост" колонны покинет мост, "голова" пройдёт расстояние $S = L + l = 729 м$. Тогда скорость колонны $\upsilon = \frac{S}{t} = \frac{729}{3 \cdot 60} = 4{,}05 м/с$.

3. Друзья решили покататься на льдине, их массы: *1 – 40 кг, 2 – 45 кг, 3 – 50 кг, 4- 57 кг, 5 – 60 кг.* Смогут ли они осуществить свою затею или кто-то останется на берегу? Ответ обосновать. Льдина плоская, её площадь $S = 5 м^2$, толщина $h = 40 см$. Плотность воды $\rho_1 = 1000 кг/м^3$, плотность льда $\rho_2 = 0{,}9 \cdot 10^3 кг/м^3$.

Решение

На льдину действуют сила тяжести и сила Архимеда (считаем, что льдина погружена до верхней грани) $\rho_1 gV = \rho_2 Vg + Mg$,

где M – общая масса груза, $\rho_2 V = m$ -масса льдины, объём льдины $V = Sh$.

Масса груза $M = (\rho_1 - \rho_2)Sh = (1000 - 900)5 \cdot 0{,}4 = 200 кг$. Общая масса друзей равна *252кг*. Следовательно, на берегу должен остаться №4 или №5.

4. Два приятеля, созвонившись друг с другом, одновременно вышли из дома и пошли к школе. Школа находилась на перекрёстке пересекающихся под прямым углом улиц, по которым шли приятели. Первый шёл со скоростью $\upsilon_1 = 3 км/час$, второй $\upsilon_2 = 4 км/час$. Подошли к школе друзья одновременно. Судя по карте, расстояние между их домами 1,25 *км*. Сколько времени ушло на дорогу до школы?

Решение

Путь, пройденный первым школьником $L_1 = \upsilon_1 t$, вторым $L_2 = \upsilon_2 t$.
Расстояние между их домами найдем по теореме Пифагора

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 = t^2(\upsilon^2{}_1 + \upsilon_2^2).$$

Тогда время $t = \dfrac{L}{\sqrt{\upsilon^2{}_1 + \upsilon_2{}^2}} = \dfrac{1{,}25}{\sqrt{9+16}} = 0{,}25 час = 15 мин$

5. Друзья за два часа до Нового года решили приготовить лёд в комнатном холодильнике. За 5 *минут* температура воды понизилась от $t_1 = 16^\circ C$ до $t_2 = 12^\circ C$. Получат ли друзья лёд к бою курантов? Сколько времени уйдёт на его приготовление? Удельная теплота кристаллизации воды $\lambda = 3,35 \cdot 10^5 \dfrac{Дж}{кг}$, удельная теплоемкость льда $c_1 = 2100 \dfrac{Дж}{кг \cdot K}$, удельная теплоемкость воды $c_2 = 4200 \dfrac{Дж}{кг \cdot K}$.

Решение

Мощность комнатного холодильника считаем одинаковой. Для первых пяти минут $c_2 m(t_2 - t_1) = P\tau_1$. (1)
Для остывания воды до $0^\circ C$ и кристаллизации $c_2(0 - t_2)m - m\lambda = P\tau_2$. (2)

Разделив (2) на (1) получим $\dfrac{c_2 t_2 + \lambda}{c_2(t_1 - t_2)} = \dfrac{\tau_2}{\tau_1}$.

Необходимое для приготовления льда время

$$\tau = \tau_2 + \tau_1\left(1 + \frac{(c_2 t_2 + \lambda)}{c_2(t_1 - t_2)}\right) = 120 мин = 2\,часа.$$

8 класс

Вариант 2

1. Из пункта **А** в пункт **В** по реке со скоростью $\upsilon_1 = 3 км/час$ плывет лодка. Одновременно от пункта **В** к пункту **А** отходит прогулочный катер со скоростью $\upsilon_2 = 10 км/час$. Катер прибывает в пункт **В** одновременно с лодкой, сделав за это время два рейса. Определить скорость и направление течения реки.

Решение

Предположим, что река течёт от пункта А к пункту В, тогда скорость лодки при движении по течению $\upsilon_1 = \upsilon_л + \upsilon$, скорость катера при движении от В к А равна $\upsilon_2 = \upsilon_k - \upsilon$, а на обратном пути $(\upsilon_k + \upsilon)$, где $\upsilon -$скорость течения реки.

Тогда время в пути $t = \frac{S}{\upsilon_1} = \frac{2S}{\upsilon_2} + \frac{2S}{\upsilon_k + \upsilon}$.

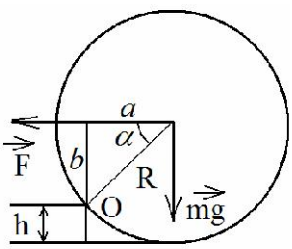
Скорость катера $\upsilon_k = \upsilon_2 + \upsilon$.

Используя эти уравнения, получаем скорость течения реки $\upsilon = 2{,}5 км/час$.

При предположении, что река течёт от В к А получается физически не имеющий смысла результат.

2. Цилиндрический каток массы *m = 100 кг,* радиуса $R = 40 см$ надо вкатить на ступеньку высотой $h = 20 см$. Какую горизонтальную силу надо приложить для этого к оси колеса? Ускорение свободного падения $g = 10 м/с^2$.

Решение



Запишем условие равновесия относительно точки О: $R \cdot F \sin\alpha - mgR\cos\alpha = 0$.

Следовательно, сила $F \geq \frac{mg}{tg\alpha} = \frac{mg \cdot b}{a}$.

Из рисунка $tg\alpha = \frac{a}{b}$.

$$F \geq \frac{mg\sqrt{R^2 - (R-h)^2}}{R-h} = 1730 H.$$

3. В зале объёмом $V_1 = 300 м^3$ относительная влажность воздуха $\varphi_1 = 70\%$, в соседнем помещении объёмом $V_2 = 200 м^3$ относительная влажность воздуха $\varphi_2 = 40\%$. Температура в помещениях одинакова. Желая понизить влажность в зале до 60 %, открыли двери в соседнее помещение.

1) Какая влажность установится в зале после перехода в равновесное состояние?

2) Что надо сделать, чтобы влажность в зале была точно 60 %?

Плотность воды $\rho = 1000$ *кг/м³*

Решение

Относительная влажность в зале $\varphi_1 = \frac{\rho_1}{\rho_H} \cdot 100\%$, где ρ_H - плотность насыщенного водяного пара при данной температуре.

Масса водяного пара в зале $m_1 = \rho_1 V_1 = \varphi_1 \rho_H V_1$, в соседнем помещении $m_2 = \varphi_2 \rho_H V_2$, общая масса $m = \rho_H (\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2)$.

Следовательно, плотность пара станет равна $\rho_3 = \frac{m}{V_1 + V_2}$.

Влажность в зале станет равна $\varphi_3 = \frac{\rho_3}{\rho_H} = \frac{\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2}{V_1 + V_2} = 0{,}58 = 58\%$.

Если закрыть дверь в соседнее помещение, то чтобы влажность стала 60%, надо распылить дополнительно в зале

$$\Delta m = V_1(\rho_4 - \rho_3) = \rho_H V_1(\varphi_4 - \varphi_3) = \rho_H 300(0{,}6 - 0{,}58) = 6 \cdot \rho_H .$$

4. Дед Мазай, заполнив зайцами лодку, подцепил багром бревно, на котором тоже сидели зайцы, и потащил его к берегу. Сколько зайцев может сидеть на бревне длиной *l = 2м* и площадью сечения $S = 0{,}2 м^2$, не рискуя утонуть? Средняя масса зайца *m=4,5 кг*, плотность воды $\rho_1 = 1000 кг/м^3$, плотность дерева $\rho_2 = 800 кг/м^3$. Высадив зайцев на берег, Мазай поплыл дальше по течению реки со скоростью $\upsilon_1 = 20 км/час$. Перепуганные зайцы помчались от реки перпендикулярно её берегу. С какой скоростью они бежали, если через *t = 15 минут* расстояние между Мазаем и зайцами стало равно *L = 15,8 км*.

Решение

Сила Архимеда, действующая на бревно, уравновешивает силу тяжести бревна и зайцев $F_A = (M + Nm)g$, масса бревна $m = \rho_2 V = \rho_2 SL$.

Тогда число зайцев на бревне $N = \frac{(\rho_1 - \rho_2)SL}{m} = 17{,}7$, т.е. можно посадить только 17 зайцев.

За *15 минут* дед Мазай проплывет расстояние $L_1 = \upsilon_1 t$, а зайцы пробегут $L_2 = \upsilon_2 t$.

Так как они движутся под прямым углом друг к другу, то расстояние между ними $L^2 = (\upsilon_1 t)^2 + (\upsilon_2 t)^2$.

Отсюда средняя скорость зайцев $\upsilon_2 = \sqrt{\left(\frac{L}{t}\right)^2 - \upsilon_1^2} = 60 км/час$.

5. Котлован глубины *H = 20м* с ровными вертикальными стенками и площадью дна $S = 200 м^2$ заполнен до краёв водой. При откачивании насос подаёт воду на поверхность земли через шланг диаметром D =20*см*. Какую работу совершит насос, выкачав воду за *5 часов*?

Плотность воды ρ = 1000 *кг/м*^{3}, ускорение свободного падения $g = 10 м/с^2$.

Решение

Работа, затраченная на подъём воды равна $A = \frac{mgH}{2} + \frac{mV^2}{2}$. (1)

Масса воды $m = \rho V = \rho SH = \rho \frac{\pi D^2}{4} \cdot \upsilon t$, так как объём воды в котловане равен объёму воды прошедшему через шланг насоса $V = S_{шланга} \upsilon t$.

Тогда скорость течения воды по шлангу $\upsilon = \frac{4SH}{t\pi D^2}$.

Подставляя в (1), получим

$$A = \frac{\rho SH^2 g}{2} + \frac{\rho SH 16(SH)^2}{2(t\pi D^2)^2} \text{ или } A = \frac{\rho SH^2}{2}\left(g + \frac{16S^2 H}{(t\pi D^2)^2}\right) = 250 МДж.$$

9 класс

Вариант 1

1. Жонглёр бросает мячи вверх один за другим. Каждый следующий мяч он бросает в момент, когда предыдущий достигает верхней точки полёта. На какую высоту поднимаются мячи, если жонглёр бросает два мяча в секунду? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10 м/с^2$, сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Высота подъёма мяча $h = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}$ (1).

В верхней точке траектории $\upsilon = \upsilon_0 - gt = 0$. Тогда $\upsilon_0 = gt$, подставляем в (1) и получаем $h = \frac{gt^2}{2}$.

Так как жонглёр бросает два мяча в секунду, то время подъёма мяча $t = 0{,}5с$. Подставляя это время в (2), получаем $h = \frac{10 \cdot 0{,}25}{2} = 1{,}25 м$.

2. Герой рассказа О'Генри дал пинок поросёнку с такой силой, что тот полетел "опережая звук собственного визга". С какой силой должен был ударить поросёнка герой рассказа, чтобы это произошло в действительности? Массу поросёнка принять равной *m=5кг,* продолжительность удара $\Delta t = 0{,}01с$, скорость звука в воздухе *320 м/с.*

Решение

По закону изменения импульса $F \cdot \Delta t = p_2 - p_1$.

Импульс после удара $p_2 = m\upsilon$ до удара – 0.

Тогда сила удара $F = \frac{m\upsilon}{\Delta t} = \frac{5 \cdot 320}{0{,}01} = 160 \cdot 10^3 Н = 160 кН$

3. Маленькой обезьянке понравилось качаться на лиане. Наблюдавший за ней Николай посчитал, что за минуту она делает 15 колебаний. Определите длину лианы. Масса обезьянки *m = 5 кг,* ускорение свободного падения принять равным $g = 10 м/с^2$, сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Так как обезьянка маленькая для определения периода колебаний можно воспользоваться формулой для математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

Длина лианы $L = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g$ (1)

Из условия время одного колебания $T = \frac{t}{N} = \frac{60}{15} = 4c$.

Подставляя в (1) известные величины получаем $L = \left(\frac{4}{2\pi}\right)^2 10 = 4{,}05м$

4. В ёлочной гирлянде были лампочки трёх цветов, соединённые последовательно. Ребята решили добавить лампочки ещё одного цвета. Они перепаяли гирлянду, оставив последовательное соединение лампочек. Лампочек каждого цвета получилось одинаковое количество, сопротивления у всех лампочек одинаковое. Во сколько раз изменилась яркость гирлянды?

Решение

Пусть общее сопротивление лампочек каждого цвета *R*. Так как все лампочки одинаковые и соединение последовательное, то $R_1 = 3R, R_2 = 4R$. Учтем, что напряжение будет одинаковое.

Яркость гирлянды связана с мощностью $\begin{cases} P_1 = \frac{U^2}{R_1} = \frac{U^2}{3R} \\ P_2 = \frac{U^2}{R_2} = \frac{U^2}{4R} \end{cases}$

Отношение $\frac{P_1}{P_2} = \frac{4}{3} = 1{,}33$. Следовательно, яркость уменьшится в 1,33 раза.

5. Москвич Володя, находясь на смотровой площадке Исаакиевского собора, решил провести опыт по определению ускорения свободного падения (проверить действительно ли оно изменяется в зависимости от широты местности). Экскурсовод сказал, что площадка находится на высоте *H = 43 м*. У Володи в кармане было несколько стальных шариков, и он замерил время их падения, пользуясь секундомером в телефоне. Среднее время оказалось равно *t = 2,959с*. Какой результат получил мальчик? Ответ дать с точностью до четырёх значащих цифр.

Решение

Высоту можно связать с временем падения. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то $H = \frac{gt^2}{2}$.

Тогда ускорение свободного падения $g = \frac{2H}{t^2} = 9{,}822 м/c^2$

9 класс

Вариант 2

1. Вася поливает газон из шланга. Он заметил, что максимальная дальность полёта струи воды $L = 20м$. Ему было удобнее держать шланг под углом $\beta = 60^\circ$, хотя дальность полёта при этом была меньше. Вася решил рассчитать, на сколько различается масса воды, находящейся в воздухе, в этих двух случаях. Считать, что начальная и конечная точки траектории находятся на одной горизонтали, напор воды не изменяется, радиус шланга $r = 5$ *мм*, плотность воды $\rho = 10^3 кг/м^3$, ускорение свободного падения принять равным $g = 10 м/с^2$. Какой результат получил Вася?

Решение

Запишем уравнения кинематики в проекциях на координатные оси

$$x = \upsilon_0 \cos\alpha\, t_1 = L\,,$$

$$y = \upsilon_0 \sin\alpha\, t_1 - \frac{g t_1^2}{2} = 0\,.$$

Из этих уравнений получаем время полёта и его дальность.

Дальность полета струи $L = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Максимальная дальность будет, если угол наклона шланга к горизонту будет $\alpha = 45^\circ$.

Отсюда найдем начальную скорость $\upsilon_0 = \sqrt{\dfrac{Lg}{\sin 2\alpha}} = 14{,}1 м/с$.

Время в полёте $t_1 = \dfrac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g} = 2с$, $\qquad t_2 = \dfrac{2\upsilon_0 \sin\beta}{g} = 2{,}44с$

Масса воды, находящейся в воздухе в первом и втором случаях

$m_1 = \rho S \upsilon_0 t_1$; $m_2 = \rho S \upsilon_0 t_2$.

Площадь сечения шланга $S = \pi r^2$.

Тогда масса воды в воздухе различается на $\Delta m = \rho S \upsilon_0 (t_2 - t_1) = 0{,}443 кг$

2. Космонавт на Земле весит $P = 1000 Н$. Сколько он будет весить на планете радиуса $R = 8000$ *км*, если на облёт этой планеты по круговой траектории радиуса $r = 8500$ *км* было затрачено $t = 2$ *час*.

Решение

Уравнение динамики для корабля $\dfrac{GMm}{r^2} = m\dfrac{\upsilon^2}{r}$, (1)

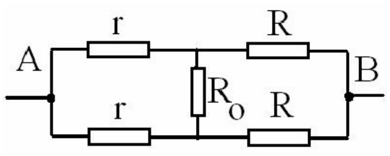
где M – масса планеты, m – масса корабля.

Скорость движения по круговой орбите $\upsilon = \dfrac{2\pi r}{T}$. (2)

Из (1) и (2) получаем $\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{GM}{r} = \frac{GM}{R^2}\cdot\frac{R^2}{r} = \frac{gR^2}{r}$.

Ускорение свободного падения на неизвестной планете $g = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 r = 7{,}3\,м/с^2$.

Вес космонавта на Земле $P = mg_0$, на другой планете $P_1 = mg = \frac{P}{g_0}g = 730H$.



3. Сопротивление участка AB на приведённой схеме $R_{AB} = 6\,Ом$, r = 2 *Ом*. Определите величину сопротивления R.

Решение

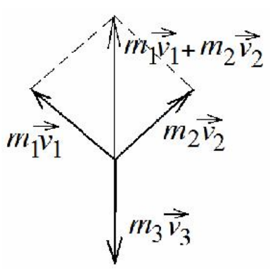
Из симметрии схемы следует, что ток в точке A делится на две одинаковые части. Следовательно, потенциалы в точках 1 и 2 одинаковы, т.е. через резистор R_0 ток не идёт .

Тогда сопротивления верхнего и нижнего участков одинаковы и равны (r $+R$). Сопротивление $\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{r+R} + \frac{1}{r+R}$.

Из этого уравнения получаем $R = 2R_{AB} - r = 10\,Ом$.

4. Снаряд массы m = 800 кг, выпущенный вертикально вверх с поверхности Земли, разрывается в верхней точке траектории на три части, которые разлетаются под углами 120° друг к другу. Массы осколков $m_1 : m_2 : m_3 = 1:2:4$. Скорость меньшего осколка после взрыва $\upsilon_1 = 20\,м/с$. Определить 1) скорости остальных осколков; 2)кинетическую энергию осколков сразу после взрыва.

Решение



В верхней точке траектории скорость снаряда равна нулю. По закону сохранения импульса $0 = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + m_3\vec{\upsilon}_3$.

Если осколки разлетаются под углами 120°, то суммарный импульс будет равен нулю, если модули импульсов одинаковы, тогда $m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2 = 2m_1\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{\upsilon_1}{2} = 10\,м/с$

$$m_1\upsilon_1 = m_3\upsilon_3 = 4m_1\upsilon_3 \Rightarrow \upsilon_3 = \frac{\upsilon_1}{4} = 5\,м/с$$

С учётом соотношения масс, получаем $m = m_1 + m_2 + m_3 = 7m_1 \Rightarrow m_1 = \frac{m}{7}$.

Кинетическая энергия после взрыва

$$E=\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}+\frac{m_2\upsilon_2^2}{2}+\frac{m_3\upsilon_3^2}{2}=\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}\cdot\frac{7}{4}=\frac{m\ \upsilon_1^2}{8}=\frac{800\cdot 400}{8}=40000\,Дж=40\,кДж$$

5. Сергей и Володя перед поездкой на поезде решили приготовить лёд и взять его с собой в термосе, чтобы охлаждать лимонад. Они залили воду в формочки и поместили их в комнатный холодильник. За 5 *минут* температура воды понизилась от $t_1=16^\circ C$ до $t_2=12^\circ C$. До выхода из дома оставалось *2 час 15 мин*. Получат ли друзья лёд к моменту выхода? Сколько времени уйдёт на его приготовление? Удельная теплота кристаллизации воды $\lambda=3{,}35\cdot 10^5\frac{Дж}{кг}$, удельная теплоемкость льда $c_1=2100\frac{Дж}{кг\cdot K}$, удельная теплоемкость воды $c_2=4200\frac{Дж}{кг\cdot K}$.

Решение

Мощность комнатного холодильника считаем одинаковой.

Для первых пяти минут $c_2m(t_2-t_1)=P\tau_1$ (1)

Для остывания воды до $0^\circ C$ и кристаллизации $c_2(0-t_2)m-m\lambda=P\tau_2$. (2)

Разделив (2) на (1) получим $\frac{c_2t_2+\lambda}{c_2(t_1-t_2)}=\frac{\tau_2}{\tau_1}$.

Время $\tau_2=\frac{(c_2t_2+\lambda)\,\tau_1}{c_2(t_1-t_2)}=115\,мин$.

Общее время с момента закладки в холодильник до получения льда 120 мин, или 2 часа, т.е. друзья успеют получить лёд до отъезда.

10 класс

Вариант 1

1. Жонглёр бросает мячи вверх один за другим. Каждый следующий мяч он бросает в момент, когда предыдущий достигает верхней точки полёта. На какую высоту поднимаются мячи, если жонглёр бросает два мяча в секунду? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10 м/с^2$, сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Высота подъёма мяча $h = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}$ (1).

В верхней точке траектории $\upsilon = \upsilon_0 - gt = 0$. Тогда $\upsilon_0 = gt$, подставляем в (1) и получаем $h = \frac{gt^2}{2}$.

Так как жонглёр бросает два мяча в секунду, то время подъёма мяча $t = 0{,}5с$. Подставляя это время в (2), получаем $h = \frac{10 \cdot 0{,}25}{2} = 1{,}25 м$.

2. Герой рассказа О'Генри дал пинок поросёнку с такой силой, что тот полетел “опережая звук собственного визга”. С какой силой должен был ударить поросёнка герой рассказа, чтобы это произошло в действительности? Массу поросёнка принять равной *m=5кг,* продолжительность удара $\Delta t = 0{,}01 с$, скорость звука в воздухе *320 м/с.*

Решение

По закону изменения импульса $F \cdot \Delta t = p_2 - p_1$.

Импульс после удара $p_2 = m\upsilon$ до удара – 0.

Тогда сила удара $F = \frac{m\upsilon}{\Delta t} = \frac{5 \cdot 320}{0{,}01} = 160 \cdot 10^3 H = 160 кН$

3. Маленькой обезьянке понравилось качаться на лиане. Наблюдавший за ней Николай посчитал, что за минуту она делает 15 колебаний. Определите длину лианы. Масса обезьянки *m = 5 кг,* ускорение свободного падения принять равным $g = 10 м/с^2$, сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Так как обезьянка маленькая для определения периода колебаний можно воспользоваться формулой для математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

Длина лианы $L=\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g$ (1)

Из условия время одного колебания $T=\frac{t}{N}=\frac{60}{15}=4c$.

Подставляя в (1) известные величины получаем $L=\left(\frac{4}{2\pi}\right)^2 10=4{,}05м$

4. В ёлочной гирлянде были лампочки трёх цветов, соединённые последовательно. Ребята решили добавить лампочки ещё одного цвета. Они перепаяли гирлянду, оставив последовательное соединение лампочек. Лампочек каждого цвета получилось одинаковое количество, сопротивления у всех лампочек одинаковое. Во сколько раз изменилась яркость гирлянды?

Решение

Пусть общее сопротивление лампочек каждого цвета *R*. Так как все лампочки одинаковые и соединение последовательное, то $R_1=3R, R_2=4R$. Учтем, что напряжение будет одинаковое.

Яркость гирлянды связана с мощностью $\begin{cases} P_1=\frac{U^2}{R_1}=\frac{U^2}{3R} \\ P_2=\frac{U^2}{R_2}=\frac{U^2}{4R} \end{cases}$

Отношение $\frac{P_1}{P_2}=\frac{4}{3}=1{,}33$. Следовательно, яркость уменьшится в 1,33 раза.

5. Москвич Володя, находясь на смотровой площадке Исаакиевского собора, решил провести опыт по определению ускорения свободного падения (проверить действительно ли оно изменяется в зависимости от широты местности). Экскурсовод сказал, что площадка находится на высоте *H = 43 м*. У Володи в кармане было несколько стальных шариков, и он замерил время их падения, пользуясь секундомером в телефоне. Среднее время оказалось равно *t = 2,959с*. Какой результат получил мальчик? Ответ дать с точностью до четырёх значащих цифр.

Решение

Высоту можно связать с временем падения. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то $H=\frac{gt^2}{2}$.

Тогда ускорение свободного падения $g=\frac{2H}{t^2}=9{,}822м/c^2$

10 класс

Вариант 2

1. В безветренную погоду воздушный шар поднимается с поверхности Земли вертикально вверх с постоянной скоростью. Этот шар запустили при горизонтальном ветре, скорость которого увеличивается с высотой по линейному закону. Коэффициент пропорциональности $A = 0,4$. В момент, когда шар переместился по горизонтали на $S = 480$ *м*, его высота над поверхностью Земли оказалась равна $H = 120$*м*. Определите величину скорости шара в этот момент времени и угол наклона к горизонту.

Решение

Высота подъёма шара $H = V_0 t$, где V_0 - вертикальная составляющая скорости.

Горизонтальная составляющая скорости $V_x = A \cdot H = AV_0 t$, т.е. ускорение по оси X равно $a_x = A \cdot V_0$.

Тогда расстояние, на которое шар переместился по горизонтали $S = \frac{a_x t^2}{2} = \frac{AV_0}{2} \cdot \frac{H^2}{V_0^2} = \frac{AH^2}{2V_0}$. О

тсюда $V_0 = \frac{AH^2}{2S} = \frac{0,4 \cdot 120^2}{2 \cdot 480} = 6 м/с = const$.

В заданный в условии момент $V_x = 0,4 \cdot 120 = 48 м/с$.

Полная скорость $V = \sqrt{V_0^2 + V_x^2} = 48,4 м/с$.

Тангенс угла наклона к горизонту $tg\alpha = \frac{V_0}{V_x} = \frac{6}{48} = 0,125$. Угол $\alpha = 7,1^\circ$.

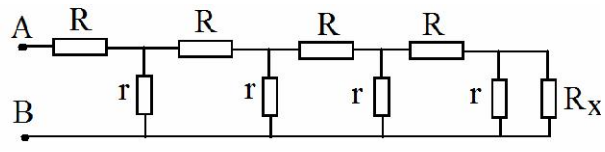
2. Любители экстремального спорта прыгают с моста высотой *H,* привязавшись к перилам резиновым жгутом. Длина и жёсткость жгута подбираются таким образом, чтобы у поверхности воды скорость спортсмена падала до нуля. После прекращения колебаний спортсмен зависает на высоте $h = 10м$ над поверхностью воды. Максимальная скорость экстремала во время падения $\upsilon_{max} = 100 км/час$. Чему равна высота моста? Ускорение свободного падения принять $g = 10 м/с^2$, сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

В положении равновесия (на высоте h над поверхностью воды) $mg = kx$, где k - жёсткость пружины, x– деформация жгута. При колебаниях амплитуда равна h.

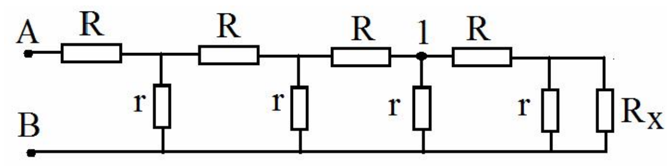
Из закона сохранения энергии : $mgH = \frac{kh^2}{2}$; $mgH = \frac{kx^2}{2} + \frac{mV_m^2}{2} + mgh$.

Из этих уравнений получаем H =49,1$м$



3. Цепь состоит из сопротивлений R =4 $Ом$ и r = 8 $Ом$. При какой величине R_X сопротивление такой цепи не будет зависеть от числа звеньев?

Решение



Если справа от точки 1 сопротивление равно R_x, то общее сопротивление не будет зависеть от числа звеньев. $R_x = R + \frac{r \cdot R_x}{r + R_x}$.

Получаем квадратное уравнение $R_x^2 - RR_x - Rr = 0$.

Его решение $R_x = \frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4} + rR} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} + 8 \cdot 4} = 2 \pm 6$. Следовательно $R_x = 8\,Ом$.

4. Горизонтальный цилиндр разделён неподвижной перегородкой на две равные части. В левой части находится $m = 50\,г$ смеси кислорода и водорода, правая часть откачена до вакуума. В перегородке открывают мембрану проницаемую только для молекул водорода. Когда система перешла в равновесное состояние, давление в левом сосуде уменьшилось на 40%. Определите массу кислорода и водорода в смеси.

Решение

Пусть ν_1 - количество вещества кислорода, ν_2 - водорода. Молярная масса кислорода $\mu_1 = 32\frac{г}{моль}$, водорода $\mu_2 = 2\frac{г}{моль}$.

В исходном состоянии для левой части сосуда $(\nu_1 + \nu_2)RT = PV$ (1)

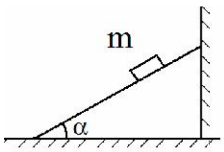
После открытия заслонки $\left(\nu_1 + \frac{\nu_2}{2}\right)RT = 0,6PV$ (2)

Разделим (1) на (2) $\frac{v_1+v_2}{v_1+0,5v_2}=\frac{1}{0,6}$, отсюда получим $v_2=4v_1$, т.е.

$$\frac{m_2}{\mu_2}=\frac{4m_1}{\mu_1}\Rightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{\mu_1}{4\mu_2}=\frac{32}{2\cdot 4}=4.$$

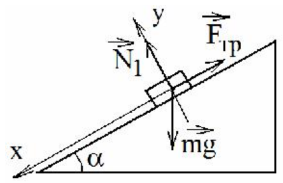
Общая масса $m=m_1+m_2=5m_2$.

Следовательно $m_2=10г; m_1=40г$.

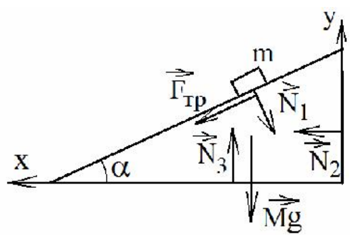


5 . Брусок массы *m =1 кг* положили на клин, имеющий угол наклона $\alpha=30^\circ$. Клин находится на гладкой горизонтальной поверхности, коэффициент трения скольжения между бруском и наклонной плоскостью $\mu=0,2$. С какой силой давит клин на вертикальную стенку? Ускорение свободного падения принять $g=10м/с^2$.

Решение



Для бруска запишем II закон Ньютона в проекции на ось ОУ: $N_1-mg\cos\alpha=0$. тогда сила трения между бруском и клином равна $F_{тр}=\mu mg\cos\alpha$.

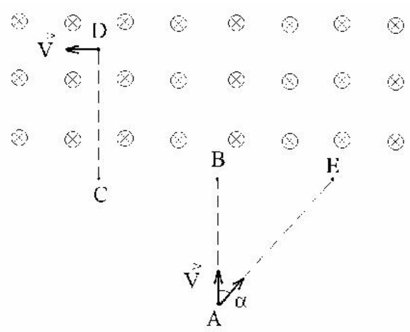


Для клина в проекции на ОХ: $N_2+F_{тр}\cos\alpha-N_1\sin\alpha=0$, отсюда

$N_2=-F_{тр}\cos\alpha+N_1\sin\alpha=-\mu mg\cos^2\alpha+mg\cos\alpha\cdot\sin\alpha$

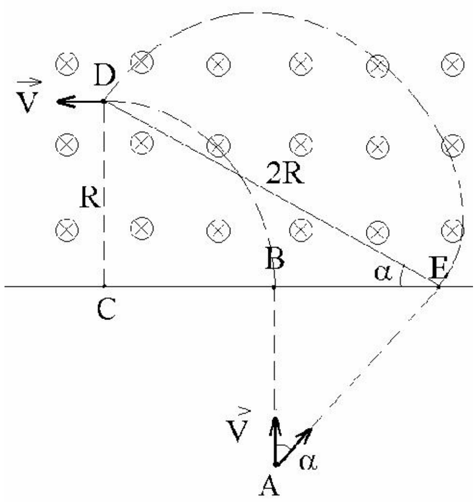
11 класс

1. Бесконечная плоскость **C-B-E** делит пространство на две области, в одной из которых создано однородное магнитное поле параллельное этой плоскости (см. рисунок). Микрочастица, обладающая электрическим зарядом $q = 1$ *мКл* и массой $m = 10^{-10}$ *кг*, вылетела из точки **A** со скоростью $V = 10^5$ *м/с* и устремилась по кратчайшему пути к границе областей, войдя в магнитное поле в точке **B**. Через время $t_1 = 12{,}56$ *мкс* частица была уже в точке **D**, где ее скорость в этот момент была параллельна границе. Если бы эта частица вылетела из точки **A** под углом α к нормали **AB**, то она попала бы в магнитное поле в точке **E** и также пролетела бы через точку **D**, двигаясь в той же плоскости, но при этом время ее движения от **E** до **D** было бы в два раза больше, чем t_1. Принять $\pi = 3{,}14$.



1) Чему равно кратчайшее расстояние **DC** от точки **D** до границы раздела?
2) Чему равна индукция магнитного поля?
3) Под каким углом вылетела частица во втором случае?
4) Чему равно расстояние **AB**?
5) Во сколько раз время движения от точки **A** до точки **D** во втором случае больше, чем в первом?

Решение



Частица в магнитном поле будет двигаться по дуге окружности.
В первом случае за время t_1 частица прошла путь $S = V \cdot t_1 = 10^5 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-6} = 1{,}256$ м, что составило четверть окружности $S = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}$.
Значит радиус окружности $R = \frac{2S}{\pi} = \frac{2 \cdot 1{,}256}{3{,}14} = 0{,}8$ м.
Но расстояния DC и CB как раз и равны этому радиусу.
С другой стороны $R = \frac{mV}{qB}$, значит индукция магнитного поля равна $B = \frac{mV}{qR} = \frac{10^{-10} \cdot 10^5}{10^{-3} \cdot 0{,}8} = 0{,}0125$ Тл.

Если время движения в магнитном поле во втором случае в два раза больше, то частица прошла половину окружности, значит расстояние DE это диаметр. Значит угол CED = 30º, который в свою очередь равен углу BAE.
Найдем длины отрезков AB и AE, а также времена движения по этим отрезкам.

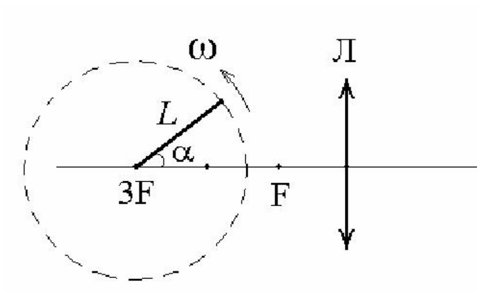
$AB = BE \cdot ctg\alpha = (CE - CB) \cdot ctg\alpha = (2R\cos\alpha - R)ctg\alpha = R\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{3} = 1{,}01$ м, $t_{AB} = \dfrac{AB}{V} = 1{,}01 \cdot 10^{-5}$ с

$AE = \dfrac{AB}{\cos\alpha} = \dfrac{1{,}01}{\sqrt{3}} \cdot 2 = 1{,}17$ м, $t_{AE} = \dfrac{AE}{V} = 1{,}17 \cdot 10^{-5}$ с.

$$\frac{t_{AED}}{t_{ABD}} = \frac{2t_1 + t_{AE}}{t_1 + t_{AB}} = \frac{2 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-6} + 1{,}17 \cdot 10^{-5}}{12{,}56 \cdot 10^{-6} + 1{,}01 \cdot 10^{-5}} = \frac{3{,}682}{2{,}266} = 1{,}62$$

Ответ: 1) DC = R = 0,8 м
2) B = 0,0125 Тл
3) $\alpha = 30^o$
4) AB = 1,01 м
5) время движения во втором случае в 1,62 раза больше, чем в первом.

2. Перед тонкой собирающей линзой с фокусным расстоянием F = 10 см в плоскости рисунка вращается стержень длиной L = 1,5F с угловой скоростью $\omega = 0{,}1$ рад/с вокруг своего конца, помещенного в тройной фокус линзы. Найдите угловую скорость изображения в линзе в тот момент, когда угол α между стержнем и главной оптической осью равен
1) $\alpha = 0°$ 2) $\alpha = 90°$ 3) $\alpha = 45°$

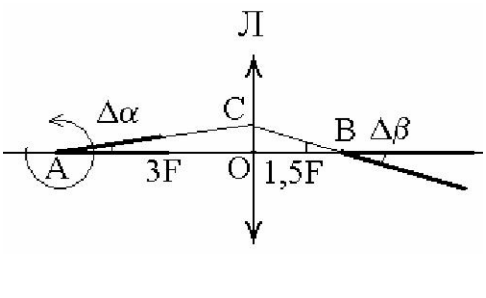


Решение

С помощью формулы тонкой линзы рассчитаем положение изображения конца стержня в тройном фокусе.

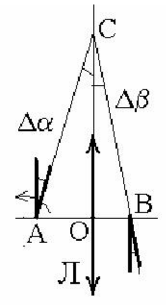
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{3F} + \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{3F} = \frac{2}{3F} \Rightarrow f = 1{,}5F$$

Проведем вдоль стержня луч, который после линзы пересечет главную оптическую ось на расстоянии f = 1,5F от линзы и пройдет по изображению стержня.



Рассмотрим первый момент времени, когда угол $\alpha = 0°$. За малое время Δt стержень успеет повернуться на малый угол $\Delta\alpha$, а его изображение повернется на малый угол $\Delta\beta$.
Из рисунка видно, что
$OC = 3F\,\mathrm{tg}\,\Delta\alpha = 1{,}5F\,\mathrm{tg}\,\Delta\beta \quad \Rightarrow \quad 2\Delta\alpha \approx \Delta\beta$,
так как при малых углах $\mathrm{tg}\,\Delta\alpha \approx \Delta\alpha$.

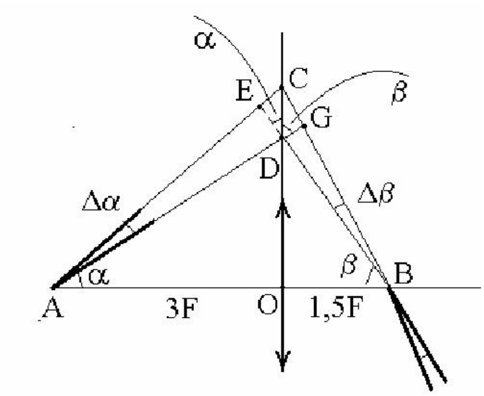
Угловая скорость изображения в этот момент равна $\omega_1 = \dfrac{\Delta\beta}{\Delta t} \approx \dfrac{2\Delta\alpha}{\Delta t} = 2\omega$



Рассмотрим второй момент, когда за малое время Δt стержень повернется на малый угол Δα и станет перпендикулярным главной оптической оси. За это же время изображение повернется на малый угол Δβ и тоже станет перпендикулярным главной оптической оси.

Из рисунка видно, что $OC = \dfrac{3F}{\operatorname{tg}\Delta\alpha} = \dfrac{1,5F}{\operatorname{tg}\Delta\beta} \Rightarrow 2\Delta\beta \approx \Delta\alpha$

Угловая скорость изображения в этот момент равна $\omega_1 = \dfrac{\Delta\beta}{\Delta t} \approx \dfrac{\Delta\alpha}{2\Delta t} = \dfrac{\omega}{2}$



Рассмотрим третий момент, когда стержень находится под углом α = 45° к главной оптической оси и за малое время Δt поворачивается на малый угол Δα. Сначала найдем угол β, под которым в данный момент расположено изображение стержня:

$OD = 3F\operatorname{tg}\alpha = 1,5F\operatorname{tg}\beta \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}45° = 2$

При этом $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

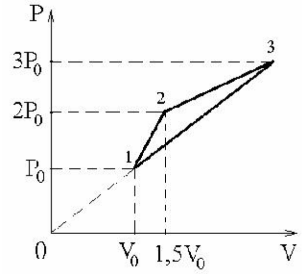
Далее проведем перпендикуляры из точки D на луч AC и на луч BC. Выразим длину луча $AD = \dfrac{3F}{\cos\alpha}$ и длину луча $BD = \dfrac{1,5F}{\cos\beta}$. Выразим длины отрезков $DE \approx AD\cdot\Delta\alpha$ и $DG \approx BD\cdot\Delta\beta$.

И наконец

$$DC = \frac{DE}{\cos\alpha} = \frac{DG}{\cos\beta} \Rightarrow \frac{AD\cdot\Delta\alpha}{\cos\alpha} = \frac{BD\cdot\Delta\beta}{\cos\beta} \Rightarrow \frac{3F\cdot\Delta\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1,5F\cdot\Delta\beta}{\cos^2\beta} \Rightarrow \Delta\beta = \frac{2\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}\Delta\alpha$$

$$\omega_1 = \frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \frac{2\cdot 1/5}{1/2}\cdot\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{4}{5}\omega$$

3. Тепловая машина работает по циклу, изображенному на рисунке. Нагревателем для этой машины служит печь, в которой горит уголь с удельной теплотой сгорания *q = 30 МДж/кг*, а холодильником служит тающий лед с удельной теплотой *плавления λ = 0,33 МДж/кг.* Рабочим телом является идеальный одноатомный газ. Эта машина развивала механическую мощность *N = 1 кВт* в течение одного часа.



1) Каков КПД этой тепловой машины?

2) Сколько угля сгорело за это время?
3) Сколько льда расплавилось за это время?

Решение

Так как процесс 3-1 линейный и проходит через 0, то $V_3 = 3V_0$
Работа за цикл есть площадь треугольника 1-2-3-1, что есть разность площадей под участками 1-2-3 и участком 3-1:

$$A = \frac{P_0 + 2P_0}{2} \cdot (1,5V_0 - V_0) + \frac{2P_0 + 3P_0}{2}(3V_0 - 1,5V_0) - \frac{3P_0 + P_0}{2}(3V_0 - V_0) = 0,5P_0V_0$$

Из условия задачи эту работу можно найти как $A = N \cdot t = 10^3 \cdot 3600 = 3,6 \cdot 10^6$ Дж
Приравнивая работу, найденную в общем виде, к ее числовому значению находим: $P_0V_0 = 7,2 \cdot 10^6$ Дж
Найдем тепло, отданное машиной холодильнику:

$$|Q_x| = |Q_{31}| = |\Delta U_{31} + A_{31}| = \frac{3}{2}(3P_0 \cdot 3V_0 - P_0V_0) + \frac{3P_0 + P_0}{2}(3V_0 - V_0) = 16P_0V_0 = 115,2 \cdot 10^6 \text{ Дж}$$

Найдем тепло, полученное машиной от нагревателя:

$$Q_н = A + |Q_x| = 3,6 \cdot 10^6 + 115,2 \cdot 10^6 = 118,8 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

1) Найдем КПД: $\eta = \dfrac{A}{Q_н} = \dfrac{3,6}{118,8} = 0,030$, т.е. 3%

2) Сгорело угля $m_1 = \dfrac{Q_н}{q} = \dfrac{118,8 \cdot 10^6}{30 \cdot 10^6} = 3,96$ кг

3) Расплавилось угля $m_2 = \dfrac{Q_x}{\lambda} = \dfrac{115,2 \cdot 10^6}{0,33 \cdot 10^6} = 349$ кг

4. Из горизонтальной трубы, расположенной над головой человека, вылетает однородный поток маленьких шариков массой $m_0 = 1$ *мг* каждый, концентрация которых равна $n = 100$ *см*$^{-3}$. Этот поток налетает на кружок площадью $S = 10$ *см*^{2}, прикрепленный стержнем к шарниру на поверхности земли, причем плоскость кружка перпендикулярна оси трубы, а расстояние от центра кружка до шарнира равно $L = 3$*м*. На расстоянии $l = 0,5$ *м* от шарнира к стержню прикреплен легкий трос. При абсолютно упругом столкновении шариков с кружком они давят на него, и человеку приходится прилагать усилие к тросу, чтобы удержать стержень в равновесии. При скорости шариков $V_1 = 10$ *м/с* человеку удается удерживать стержень в вертикальном положении (см. рис.1). Если скорость шариков увеличить вдвое, то стержень отклонится на угол $\alpha = 30^\circ$ (см. рис.2). В обоих случаях человек тянет трос в направлении, параллельном оси трубы. Найти силу натяжения троса в первом и втором случаях. Масса стержня вместе с кружком равна $M = 5$ *кг*, а центр масс этой системы находится на расстоянии $H = 2$ *м* от шарнира. Считать, что отскакивающие от кружка шарики не сталкиваются с шариками из налетающего потока. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

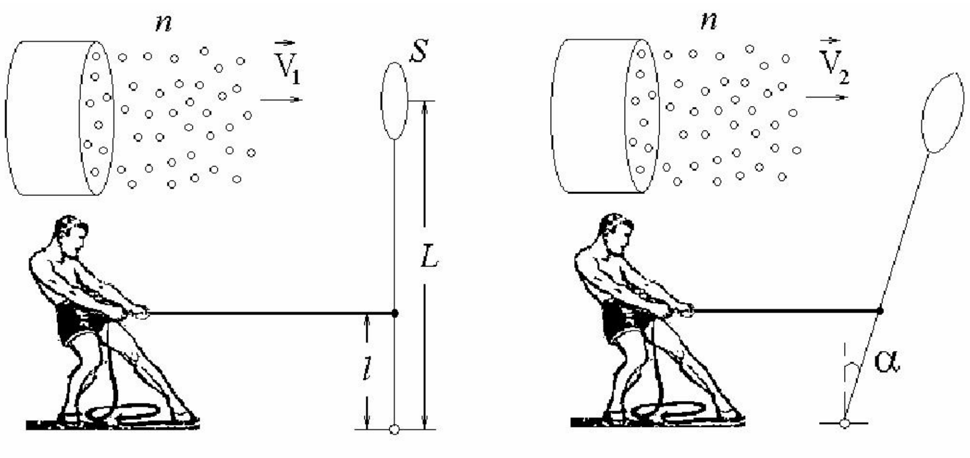


Рис.1 Рис.2

Решение

При абсолютно упругом ударе в первом случае изменение импульса одного шарика равно $\Delta p_1 = 2m_0V_1$. За время Δt на кружок успевает налететь $\Delta N = n \cdot S \cdot V_1 \Delta t$ шариков, где $S \cdot V_1 \cdot \Delta t$ – это объем, содержащий эти шарики. Из второго закона Ньютона можно найти силу давления этих шариков на кружок:

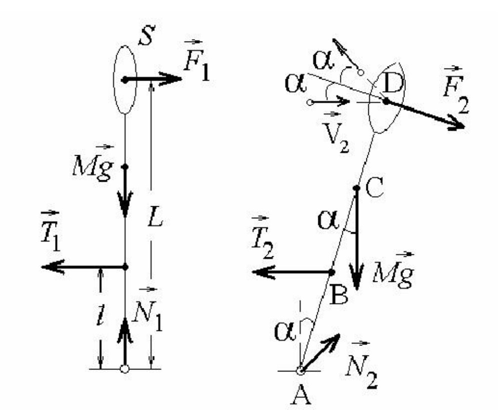
$$F_1 = \frac{\Delta N \cdot \Delta p_1}{\Delta t} = nSV_1 \cdot 2m_0V_1 = 2m_0nSV_1^2 = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 100 = 20\,\text{Н}$$

Если кружок наклонится, то число шариков, налетающих на кружок за время Δt, изменится и станет равным

$\Delta N_2 = n \cdot S\cos\alpha \cdot V_2 \Delta t$, а изменение импульса одного шарика равно $\Delta p_1 = 2m_0V_2\cos\alpha$ и направлено перпендикулярно плоскости кружка. Сила давления на кружок останется перпендикулярной к нему и будет равной

$$F_2 = \frac{\Delta N_2 \cdot \Delta p_1}{\Delta t} = 2m_0nSV_2^2\cos^2\alpha = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 400 \cdot \frac{3}{4} = 60\,\text{Н}.$$

Применим условие статики (равенство нулю суммы моментов сил) в двух случаях



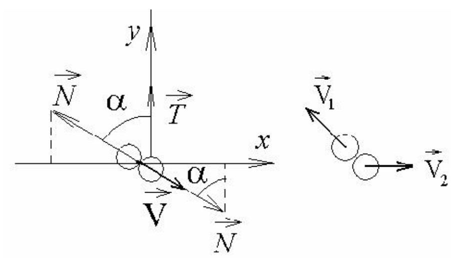
$$F_1L = T_1l \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{F_1L}{l} = \frac{20 \cdot 3}{0,5} = 120\,\text{Н}$$

$$F_2L + Mg \cdot H\sin\alpha = T_2 \cdot l\cos\alpha \quad \Rightarrow$$

$$T_2 = \frac{F_2L + Mg \cdot H\sin\alpha}{l\cos\alpha} = \frac{60 \cdot 3 + 50 \cdot 2 \cdot 0,5}{0,5 \cdot \sqrt{3}/2} = 532\,\text{Н}$$

5. На длинной невесомой нити длины L = 8,1 м висит маленький шарик массы *m = 100 г*. Такой же шарик подлетает к нему со скоростью
V = 5 м/с под углом $\alpha = 30°$ к вертикали. Между ними происходит центральный абсолютно упругий удар.
1) Найти скорости шариков сразу после удара;
2) На какую максимальную высоту поднимется шарик на нити?
3) Найти расстояние между шариками в тот момент, когда шарик на нити первый раз остановится.
Принять ускорение свободного падения равным $g = 10$ *м/с*^{2}, $\pi = 3,14$

Решение



Во время мгновенного удара между шариками возникает очень большая сила взаимодействия N и резко увеличивается сила натяжения нити. Силой тяжести в этот момент можно пренебречь.
Используем понятие импульс силы, данный телу:
$\Delta t \cdot \sum \vec{F}_i = \Delta \vec{p}$

Рассмотрим импульс силы, переданный шарику на нити в проекции на ось X:
$\Delta t \cdot N \cdot \sin\alpha = mV_2$.

Отсюда выразим $\Delta t \cdot N = \dfrac{mV_2}{\sin 30°} = 2mV_2$

Аналогично рассмотрим импульс силы, переданный первому шарику вдоль линии, соединяющей центры шариков, предполагая, что шарик изменит направление своего движения: $-\Delta t \cdot N = -mV_1 - mV$

Подставим в это уравнения найденное выражение $\Delta t \cdot N$ и выразим
$mV_1 = -mV + \Delta t \cdot N = -mV + 2mV_2$ или $V_1 = -V + 2V_2$

Применим закон сохранения энергии при абсолютно упругом ударе:
$\dfrac{mV^2}{2} = \dfrac{mV_2^2}{2} + \dfrac{mV_1^2}{2}$.

Сократив на массу и двойку, подставив выражения для V_1 получим:
$V^2 = V_2^2 + V_1^2 = V_2^2 + V^2 - 4V_2V + 4V_2^2$ откуда $5V_2^2 = 4V_2V$.

Таким образом $V_2 = \dfrac{4}{5}V = 4$ м/с и направлена горизонтально,

$V_1 = -V + \dfrac{8}{5}V = \dfrac{3}{5}V = 3$ м/с и направлена под углом α к вертикали в противоположную сторону первоначальному направлению.

По закону сохранения энергии найдем максимальную высоту подъема шарика на нити:
$\dfrac{mV_2^2}{2} = mgh \quad \Rightarrow \quad h = \dfrac{V_2^2}{2g} = \dfrac{16}{20} = 0,8$ м.

Как видно h <<L , значит, отклонения малы, т.е. шарик на нити можно считать математическим маятником с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

Время подъема шарика на нити составляет четверть периода колебаний математического маятника

$$t = \frac{1}{4}T = \frac{1}{4}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{3,14}{2}\sqrt{\frac{8,1}{10}} = 1,57\cdot 0,9 = 1,41 \text{ с.}$$

Найдем координаты центра первого шарика через это время:

$$x_1 = -V_1\sin\alpha\cdot t = -3\cdot\frac{1}{2}\cdot 1,41 = -2,12 \text{ м} \quad y_1 = V_1\cos\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2} = 3\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1,41 - \frac{10\cdot 1,41^2}{2} = -6,34 \text{ м}$$

Найдем координаты центра шарика на нити через это время: $y_2 = h = 0,8$ м

$$x_2 = \sqrt{L^2 - \left(L-h\right)^2} = \sqrt{8,1^2 - 7,3^2} = 3,51 \text{ м}$$

Расстояние между центрами шариков

$$r = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2} = \sqrt{\left(-2,12 - 3,51\right)^2 + \left(-6,34 - 0,8\right)^2} = \sqrt{31,7 + 51} = 9,1 \text{ м}$$