Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Тульский государственный университет

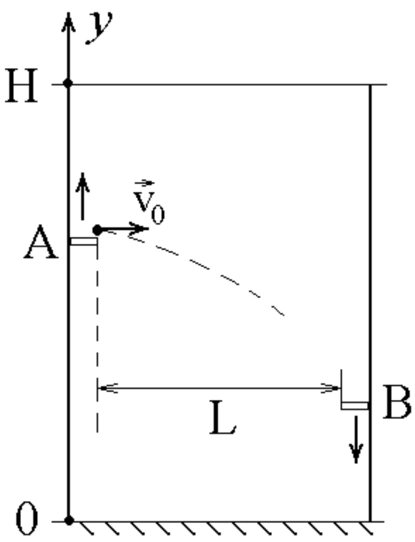
Олимпиада школьников по физике
«Наследники Левши»

Заключительный этап
2012-2013 учебного года
11 класс

Тула

Задача 1

Условие:



1-1. Для ремонта десятиэтажного здания рядом с соседними подъездами были установлены лифты для подъема и спуска строительных материалов на высоту H = 30 м. Платформа левого лифта A начинает свое движение снизу, а платформа правого лифта B начинает двигаться одновременно с ним, но сверху. При работе лифты первую половину своего пути проходят с ускорением $a = 5$ м/с^2, а вторую половину тормозят с таким же ускорением до полной остановки в конечной точке. Когда лифт A прошел расстояние $h = 2H/3$, маляр, находящийся в нем, сбил ногой кусочек застывшего бетона на правом краю своей платформы, придав ему скорость $v_0 = 2$ м/с относительно платформы в горизонтальном направлении, и этот кусочек попал точно в левый край платформы B. Сколько времени летел кусочек, на какой высоте произошло попадание и каково расстояние L между платформами? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение:

Скорости лифтов во время движения в любой момент времени одинаковы по модулю, но разные по направлению. Найдем скорость лифта B в начальный момент полета кусочка бетона из уравнения без времени:

$$\frac{1}{3}H = \frac{0 - v_1^2}{-2a} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2aH}{3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 30}{3}} = 10 \text{ м/с}$$

Время до остановки платформы B после этого момента равно $t_1 = \dfrac{0 - v_1}{-a} = \dfrac{10}{5} = 2$ с.

Уравнение вертикальной координаты кусочка бетона $y_1 = \dfrac{2}{3}H + v_1 t - \dfrac{gt^2}{2} = 20 + 10t - 5t^2$.

К моменту остановки лифта B кусочек бетона окажется в точке с координатой $y_1 = 20 + 10 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 20$ м, то есть он продолжит движение и попадет в уже покоящуюся платформу B в точке с координатой $y_1 = 0$.

Решим квадратное уравнение $0 = 20 + 10t - 5t^2$ и найдем время

$$t = \frac{10 + \sqrt{100 + 4 \cdot 5 \cdot 20}}{2 \cdot 5} = 3{,}24 \text{ с}$$

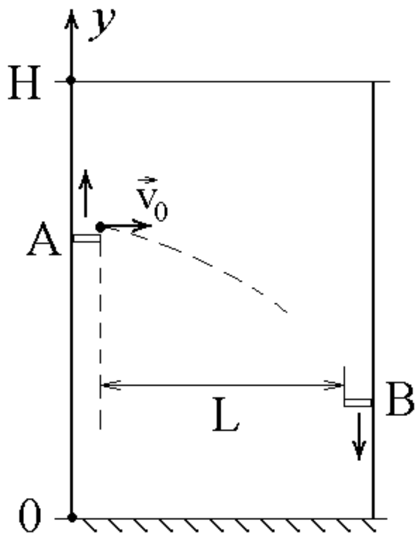
$$L = v_0 t = 2 \cdot 3{,}24 = 6{,}48 \text{ м}$$

Ответ: через 3,24 с на высоте 0 м, L = 6,48 м .

Критерии оценивания:

		Балл
1	Найдены скорости лифтов в момент времени, когда кусочек бетона начал падать. Для лифта B: $\frac{1}{3}H=\frac{0-V_B^2}{-2a}$, $V_B=\sqrt{\frac{2aH}{3}}=10м/с$ Для лифта A: $H-\frac{1}{3}H=\frac{0-V_A^2}{-2a}$, $V_A=\sqrt{\frac{2aH}{3}}=10м/с$ или указано. что скорости лифтов в любой момент времени одинаковы	1-5 баллов
2	Записаны уравнения движения кусочка бетона: $x=V_0t$ и $y=\frac{2}{3}H+V_At-\frac{gt^2}{2}$	1-4 балла
3	Показано (сделан вывод о том, что) кусочек бетона попадает в покоящуюся платформу. Определено время остановки лифта B 2с, и показано, что в этот момент времени кусочек бетона будет находится на высоте 20м	1-5 баллов
4	Из условия, что конечная координата равна нулю найдено время падения куска бетона $y=\frac{2}{3}H+V_At-\frac{gt^2}{2}=0$, $t_{полета}$=3,24сек	1-5 баллов
5	Расстояние между платформами $L=V_0t_{полета}=6,48м$	1 балл

Условие:



1-2. Для ремонта десятиэтажного здания рядом с соседними подъездами были установлены лифты для подъема и спуска строительных материалов на высоту H = 27 м. Платформа левого лифта A начинает свое движение снизу, а платформа правого лифта B начинает двигаться одновременно с ним, но сверху. При работе лифты первую половину своего пути проходят с ускорением $a = 8$ м/с^2, а вторую половину тормозят с таким же ускорением до полной остановки в конечной точке. Когда лифт A прошел расстояние $h = 2H/3$, маляр, находящийся в нем, сбил ногой кусочек застывшего бетона на правом краю своей платформы, придав ему скорость $v_0 = 1{,}5$ м/с относительно платформы в горизонтальном направлении, и этот кусочек попал точно в левый край платформы B. Сколько времени летел кусочек, на какой высоте произошло попадание и каково расстояние L между платформами? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение:

Скорости лифтов во время движения в любой момент времени одинаковы по модулю, но разные по направлению. Найдем скорость лифта B в начальный момент полета кусочка бетона (когда до его остановки осталось треть пути) из уравнения без времени:

$$\frac{1}{3}H = \frac{0 - v_1^2}{-2a} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2aH}{3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 27}{3}} = 12 \text{ м/с}$$

Время до остановки платформы B после этого момента равно $t_1 = \frac{0 - v_1}{-a} = \frac{12}{8} = 1{,}5$ с.

Уравнение вертикальной координаты кусочка бетона

$$y_1 = \frac{2}{3}H + v_1 t - \frac{gt^2}{2} = 18 + 12t - 5t^2.$$

К моменту остановки лифта B кусочек бетона окажется в точке с координатой $y_1 = 18 + 12 \cdot 1{,}5 - 5 \cdot 1{,}5^2 = 24{,}75$ м, то есть он продолжит движение и попадет в уже покоющуюся платформу B в точке с координатой $y_1 = 0$.

Решим квадратное уравнение $0 = 18 + 12t - 5t^2$ и найдем время

$$t = \frac{12 + \sqrt{12^2 + 4 \cdot 5 \cdot 18}}{2 \cdot 5} = 3{,}44 \text{ с}$$

$$L = v_0 t = 1{,}5 \cdot 3{,}44 \approx 5{,}2 \text{ м}$$

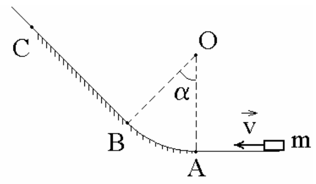
Ответ: через 3,44 с на высоте 0 м, L = 5,2 м .

Критерии оценивания:

		Балл
1	Найдены скорости лифтов в момент времени, когда кусочек бетона начал падать. Для лифта В: $\frac{1}{3}H=\frac{0-V_B^2}{-2a}$, $V_B=\sqrt{\frac{2aH}{3}}=12\,м/с$ Для лифта А: $H-\frac{1}{3}H=\frac{0-V_A^2}{-2a}$, $V_A=\sqrt{\frac{2aH}{3}}=12\,м/с$ или указано. что скорости лифтов в любой момент времени одинаковы	1-5 баллов
2	Записаны уравнения движения кусочка бетона: $x=V_0t$ и $y=\frac{2}{3}H+V_At-\frac{gt^2}{2}$	1-4 балла
3	Показано (сделан вывод о том, что) кусочек бетона попадает в покоящуюся платформу. Определено время остановки лифта В 1,5с, и показано, что в этот момент времени кусочек бетона будет находится на высоте 24,75 м	1-5 баллов
4	Из условия, что конечная координата равна нулю, найдено время падения куска бетона $y=\frac{2}{3}H+V_At-\frac{gt^2}{2}=0$, $t_{полета}$=3,24сек	1-5 баллов
5	Расстояние между платформами $L=V_0t_{полета}\approx 5,2м$	1 балл

Задача 2

Условие:



1-1. Маленький мальчик играет с деревянным бруском массы m = 50 г из набора для детского творчества. Построив горку он двигает брусок с постоянной скоростью v = 10 см/с, толкая его вдоль траектории движения бруска (движение бруска в вертикальной плоскости). Оказалось, что первая часть траектории AB представляет из себя часть дуги радиусом R = OA = 20 см, угловые размеры которой α = 30°, а вторая часть BC = 40 см это прямолинейное продолжение, касательное к дуге AB. Коэффициент трения бруска о поверхность горки везде одинаков и равен μ = 0,4. Во сколько раз отличается работа, совершенная мальчиком на этих двух участках горки, если отрезок OA вертикален? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Решение:

На участке BC сила трения постоянна и равна $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha = 0,4\cdot 0,05\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,173$ Н.

Работа силы трения на этом участке $A_{тр} = -F_{тр}\left|BC\right| = -0,173\cdot 0,4 = -0,0692$ Дж.

Потенциальная энергия бруска увеличилась на

$\Delta E_п = mgh = mg\left|BC\right|\sin\alpha = 0,05\cdot 10\cdot 0,4\cdot 0,5 = 0,1$ Дж.

Используем закон изменения полной механической энергии для этого участка:

$A_1 + A_{тр} = \Delta E_п \;\Rightarrow\; A_1 = \Delta E_п - A_{тр} = 0,1 + 0,0692 = 0,1692$ Дж это работа мальчика на участке BC.

На участке AB у бруска есть центростремительное ускорение, поэтому

$$N - mg\cos\beta = \frac{mv^2}{R} \;\Rightarrow\; N = mg\cos\beta + \frac{mv^2}{R}$$

Сила трения будет зависеть от угла β наклона касательной в каждой точке дуги к горизонту: $F_{тр} = \mu N = \frac{\mu mv^2}{R} + \mu mg\cos\beta$

Чтобы найти работу трения, надо разбить участок AB на маленькие участки длиной Δl и суммировать все работы на каждом участке:

$$A_{тр} = -\sum F_{тр}\Delta l = -\sum\frac{\mu mv^2}{R}\Delta l - \sum mg\cos\beta\Delta l$$

Учтем, что $\Delta l\cdot\cos\beta = \Delta x$ и тогда можно упростить суммирование:

$A_{тр} = -\frac{\mu mv^2}{R}l_{дуги} - mg\Delta x_{общ}$, где $l_{дуги} = \frac{\pi R}{6}$, а $\Delta x_{общ} = R\sin\alpha$

Таким образом $A_{тр} = -\frac{\mu mv^2\pi}{6} - \mu mgR\sin\alpha = -0,4\cdot 0,05\left(\frac{3,14\cdot 0,1^2}{6} + 10\cdot 0,2\cdot\frac{1}{2}\right) = -0,0201$ Дж.

Изменение потенциальной энергии на этом участке равно

$$\Delta E_п = mgh = mgR\left(1-\cos\alpha\right) = 0,5\cdot 0,2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0,0134\text{Дж}$$

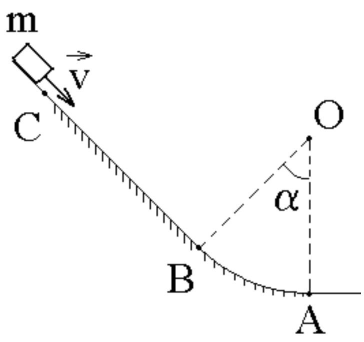
Используем закон изменения полной механической энергии для этого участка:

$A_2 + A_{тр} = \Delta E_п \;\Rightarrow\; A_2 = \Delta E_п - A_{тр} = 0,0335$ Дж это работа мальчика на участке AB. Она меньше работы на участке BC в $\frac{0,1692}{0,0335} = 5,05$ раза

Критерии оценивания:

			БАЛЛ
1	Найдена работа на участке ВС		1-8 баллов
	1.1	Записано выражение для силы трения $F_{тр} = \mu \cdot N = \mu \cdot mg \cdot \cos(\alpha) = 0.173H$	1-2 балла
	1.2	Найдена работа силы трения $A_{тр} = -F_{тр} \cdot \lvert BC \rvert = -0,0692 Дж$	1-2 балла
	1.3	Найдена работа силы тяжести $A_{mg} = -\Delta E_n = -mgh = -mg\lvert BC \rvert \sin(\alpha) = -0.1 Дж$	1-2 балла
	1.4	Записан закон изменения полной механической энергии или теорема об изменении кинетической энергии: $A_F + A_{тр} = \Delta E_n$ или $A_F + A_{тр} + A_{mg} = 0$ ($A_{mg} = -\Delta E_n$)	1 балл
	1.5	Вычислена работа силы F (работа мальчика) на ВС $A_F = 0,1692 Дж$	1 балл
2	Найдена работа на участке ВА		1-11 баллов
	2.1	Записан второй закон Ньютона найдена сила нормальной реакции опоры $N = mg\cos(\beta) + \frac{mV^2}{R}$	1-2 балла
	2.2	Записано выражение для силы трения $F_{тр} = \mu \cdot N = \mu mg\cos(\beta) + \frac{\mu mV^2}{R}$, показано, что сила трения зависит от угла наклона силы N к нормали	1-2 балла
	2.3	Найдена работа силы трения $A_{тр} = \sum -F_{тр} \cdot \Delta L = -\mu mg \sum \Delta L \cos(\beta) - \frac{mV^2}{R}\sum \Delta L$, где $\sum \Delta L = L_{дуги} = \frac{2\pi R \cdot 30}{360}$, а $\sum \Delta L \cos(\beta) = \Delta x = R \cdot \sin(\alpha)$ $A_{тр} = -0.0201 Дж$	1-3 балла
	2.3	Найдена работа силы тяжести $A_{mg} = -\Delta E_n = mgh = mgR(1-\cos(\alpha)) = 0.0134 Дж$	1-2 балла
	2.4	Записан закон изменения полной механической энергии или теорема об изменении кинетической энергии: $A_F + A_{тр} = \Delta E_n$ или $A_F + A_{тр} + A_{mg} = 0$ ($A_{mg} = -\Delta E_n$)	1 балла
	2.5	Вычислена работа силы F (работа мальчика) $A_F = 0.0335 Дж$	1 балла
3	Найдено отношение работ на участках СВ и ВА 5,05 раза		1 балл

Условие:



1-2. Маленький мальчик играет с деревянным бруском массы m = 100 г из набора для детского творчества. Построив горку он двигает брусок с постоянной скоростью v = 20 см/с, действуя на него силой вдоль траектории движения бруска (движение бруска в вертикальной плоскости). Оказалось, что первая наклонная прямолинейная часть траектории CB длиной 30 см плавно переходит на горизонтальный участок по дуге BA, которая является частью окружности радиуса R = OA = 30 см, причем угловые размеры дуги α = 60°. Коэффициент трения бруска о поверхность горки везде одинаков и равен μ = 0,5. Во сколько раз отличается работа, совершенная мальчиком на этих двух участках горки, если отрезок OA вертикален? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Решение:

На участке CB сила треня постоянна и равна $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha = 0,5\cdot 0,1\cdot 10\cdot \frac{1}{2} = 0,25$ Н.

Работа силы трения на этом участке $A_{тр} = -F_{тр}\left|CB\right| = -0,25\cdot 0,3 = -0,075$ Дж.

Потенциальная энергия бруска уменьшилась

$\Delta E_n = -mgh = -mg\left|BC\right|\sin\alpha = -0,1\cdot 10\cdot 0,3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -0,26$ Дж.

Используем закон изменения полной механической энергии для этого участка:

$A_1 + A_{тр} = \Delta E_n \;\; \Rightarrow\; A_1 = \Delta E_n - A_{тр} = -0,26 + 0,075 = -0,185$ Дж это работа мальчика на участке CB.

На участке BA у бруска есть центростремительное ускорение, поэтому

$N - mg\cos\beta = \frac{mv^2}{R} \;\; \Rightarrow\; N = mg\cos\beta + \frac{mv^2}{R}$

Сила трения будет зависеть от угла β наклона касательной в каждой точке дуги к горизонту: $F_{тр} = \mu N = \frac{\mu mv^2}{R} + \mu mg\cos\beta$

Чтобы найти работу трения, надо разбить участок AB на маленькие участки длиной Δl и суммировать все работы на каждом участке:

$A_{тр} = -\sum F_{тр}\Delta l = -\sum\frac{\mu mv^2}{R}\Delta l - \sum mg\cos\beta\Delta l$

Учтем, что $\Delta l\cdot\cos\beta = \Delta x$ и тогда можно упростить суммирование:

$A_{тр} = -\frac{\mu mv^2}{R}l_{дуги} - mg\Delta x_{общ}$, где $l_{дуги} = \frac{\pi R}{3}$, а $\Delta x_{общ} = R\sin\alpha$

Таким образом $A_{тр} = -\frac{\mu mv^2\pi}{3} - \mu mgR\sin\alpha = -0,5\cdot 0,1\left(\frac{3,14\cdot 0,2^2}{3} + 10\cdot 0,3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -0,132$ Дж.

Изменение потенциальной энергии на этом участке равно

$\Delta E_n = -mgh = -mgR\left(1-\cos\alpha\right) = -0,1\cdot 10\cdot 0,5\left(1-\frac{1}{2}\right) = -0,25$ Дж

Используем закон изменения полной механической энергии для этого участка:

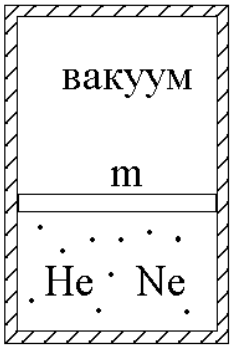
$A_2 + A_{тр} = \Delta E_n \;\; \Rightarrow\; A_2 = \Delta E_n - A_{тр} = -0,25 + 0,132 = -0,118$ Дж это работа мальчика на участке BA. Она меньше работы на участке CB в $\frac{0,185}{0,118} = 1,57$ раза

Критерии оценивания:

			БАЛЛ
1	Найдена работа на участке СВ		1-8 баллов
	1.1	Записано выражение для силы трения $F_{тр} = \mu \cdot N = \mu \cdot mg \cdot \cos(\alpha) = 0.25H$	1-2 балла
	1.2	Найдена работа силы трения $A_{тр} = -F_{тр} \cdot \lvert BC \rvert = -0,075Дж$	1-2 балла
	1.3	Найдена работа силы тяжести $A_{mg} = -\Delta E_n = -mgh = -mg\lvert BC \rvert \sin(\alpha) = -0,26Дж$	1-2 балла
	1.4	Записан закон изменения полной механической энергии или теорема об изменении кинетической энергии: $A_F + A_{тр} = \Delta E_n$ или $A_F + A_{тр} + A_{mg} = 0$ ($A_{mg} = -\Delta E_n$)	1 балл
	1.5	Вычислена работа силы F (работа мальчика) на ВС $A_F = -0,185Дж$	1 балл
2	Найдена работа на участке АВ		1-11 баллов
	2.1	Записан второй закон Ньютона найдена сила нормальной реакции опоры $N = mg\cos(\beta) + \frac{mV^2}{R}$	1-2 балла
	2.2	Записано выражение для силы трения $F_{тр} = \mu \cdot N = \mu mg\cos(\beta) + \frac{\mu mV^2}{R}$, показано, что сила трения зависит от угла наклона силы N к нормали	1-2 балла
	2.3	Найдена работа силы трения $A_{тр} = \sum -F_{тр} \cdot \Delta L = \mu mg \sum \Delta L \cos(\beta) + \frac{mV^2}{R} \sum \Delta L$, где $\sum \Delta L = L_{дуги} = \frac{2\pi R \cdot 30}{360}$, а $\sum \Delta L \cos(\beta) = \Delta x = R \cdot \sin(\alpha)$ $A_{тр} = -0.132Дж$	1-3 балла
	2.3	Найдена работа силы тяжести $A_{mg} = -\Delta E_n = mgh = mgR(1 - \cos(\alpha)) = 0.25Дж$	1-2 балла
	2.4	Записан закон изменения полной механической энергии или теорема об изменении кинетической энергии: $A_F + A_{тр} = \Delta E_n$ или $A_F + A_{тр} + A_{mg} = 0$ ($A_{mg} = -\Delta E_n$)	1 балла
	2,5	Вычислена работа силы F (работа мальчика) $A_F = -0,118Дж$	1 балла
3	Найдено отношение работ на участках ВС и АВ 1,57 раза		1 балл

Задача 3

Условие:



3-1. Вертикальный цилиндрический теплоизолированный сосуд с гладкими стенками разделен на две части подвижным поршнем массой m = 200 кг, который сделан из пористого материала. В нижней части цилиндра вначале находилась смесь гелия и неона в количестве ν_1 = 0,4 моль и ν_2 =0,6 моль соответственно при температуре 177 °C, а в верхней части был вакуум. Оказалось, что через мелкие поры поршня могут проходить только маленькие молекулы гелия, но не неона. Когда установилось новое равновесие, поршень переместился. На сколько при этом изменилась температура смеси (в °C)? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2, газы считать идеальными. Ответ округлить до целых.

Решение:

Напишем условие равновесия поршня: $mg = P_1 S$, где S – площадь его сечения, h_1 высота нижней части сосуда.

Из этого уравнения и из уравнения состояния идеального газа $P_1 S h_1 = (\nu_1 + \nu_2) R T_1$ следует, что

$$mgh_1 = (\nu_1 + \nu_2) R T_1 \qquad (1)$$

Для гелия поршень не является препятствием, поэтому он распространится на весь объем сосуда равномерно, а неон останется в нижней части. Парциальное давление гелия будет одинаковым в разных частях сосуда, потому что его концентрация и температура будут одинаковы, а $P = nkT$. Поэтому гелий действует на поршень с двух сторон с одинаковыми силами и их действие компенсируется.

В новом положении равновесия $mg = P_2{}'S$, где $P_2{}'$ – парциальное давление неона. Из этого уравнения и из уравнения состояния идеального газа $P_2{}'Sh_2 = \nu_2 R T_2$ следует, что

$$mgh_2 = \nu_2 R T_2. \qquad (2)$$

Так как сосуд теплоизолирован, то можно применить закон сохранения энергии для системы "смесь газов - поршень" с учетом того, что благородные газы одноатомны

$$\frac{3}{2}(\nu_1 + \nu_2) R T_1 + mgh_1 = \frac{3}{2}(\nu_1 + \nu_2) R T_2 + mgh_2 \qquad (3)$$

подставим уравнения (1) и (2) в (3)

$$\frac{3}{2}(\nu_1 + \nu_2) R T_1 + (\nu_1 + \nu_2) R T_1 = \frac{3}{2}(\nu_1 + \nu_2) R T_2 + \nu_2 R T_2$$

откуда получим температуру T_2

$$T_2 = \frac{5(\nu_1 + \nu_2) T_1}{(3\nu_1 + 5\nu_2)} = \frac{5 \cdot 1 \cdot 450}{(3 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,6)} = 535,7 \text{ К}$$

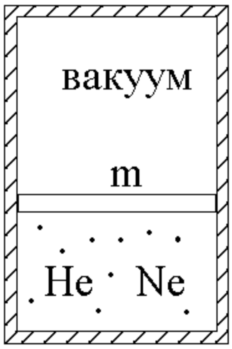
Температура изменилась на $\Delta T = T_2 - T_1 = 535,7 - 450 = 85,7 \approx 86$ К

Ответ: 86 К = 86°С

Критерии оценивания:

		Балл
1	Из уравнения состояния идеального газа $P_1Sh_1=(\nu_1+\nu_2)RT_1$ и условия равновесия тяжелого поршня $mg=P_1S$ следует, что $mgh_1=(\nu_1+\nu_2)RT_1$	1-4 баллов
2	Сделан вывод о том, что парциальное давление гелия будет одинаковым в разных частях сосуда ($P=nkT$)	1балл
3	В новом положении равновесия из уравнения состояния идеального газа $P_2'Sh_2=\nu_2RT_2$ и условия равновесия тяжелого поршня $mg=P_2'S$ следует, что $mgh_2=\nu_2RT_2$.	1-5 баллов
4	Так как сосуд теплоизолирован, то можно применить закон сохранения энергии для системы "смесь газов - поршень" с учетом того, что благородные газы одноатомны $\frac{3}{2}(\nu_1+\nu_2)RT_1+mgh_1=\frac{3}{2}(\nu_1+\nu_2)RT_2+mgh_2$ получена температура T_2 $T_2=\frac{5(\nu_1+\nu_2)T_1}{(3\nu_1+5\nu_2)}=\frac{5\cdot1\cdot450}{(3\cdot0,4+5\cdot0,6)}=535,7$ К	1-9 баллов
5	Температура изменилась на $\Delta T=T_2-T_1=535,7-450=85,7\approx86$ К	1 балл

Условие:



3-2. Вертикальный цилиндрический теплоизолированный сосуд с гладкими стенками разделен на две части подвижным поршнем массой m = 300 кг, который сделан из пористого материала. В нижней части цилиндра вначале находилась смесь гелия и неона в количестве ν_1 = 0,1 моль и ν_2=0,9 моль соответственно при температуре 207 °С, а в верхней части был вакуум. Оказалось, что через мелкие поры поршня могут проходить только маленькие молекулы гелия, но не неона. На сколько миллиметров опустится поршень при установлении нового положения равновесия? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/моль·К. Газы считать идеальными. Ответ округлить с точностью до целых.

Решение:

Напишем условие равновесия поршня: $mg = P_1 S$, где S – площадь его сечения, h_1 высота нижней части сосуда.

Из этого уравнения и из уравнения состояния идеального газа $P_1 S h_1 = (\nu_1 + \nu_2) R T_1$ следует, что

$$mgh_1 = (\nu_1 + \nu_2) R T_1 \qquad (1)$$

Для гелия поршень не является препятствием, поэтому он распространится на весь объем сосуда равномерно, а неон останется в нижней части. Парциальное давление гелия будет одинаковым в разных частях сосуда, потому что его концентрация и температура будут одинаковы, а $P = nkT$. Поэтому гелий действует на поршень с двух сторон с одинаковыми силами и их действие компенсируется.

В новом положении равновесия $mg = P_2' S$, где P_2' – парциальное давление неона. Из этого уравнения и из уравнения состояния идеального газа $P_2' S h_2 = \nu_2 R T_2$ следует, что

$$mgh_2 = \nu_2 R T_2 . \qquad (2)$$

Так как сосуд теплоизолирован, то можно применить закон сохранения энергии для системы "смесь газов - поршень" с учетом того, что благородные газы одноатомны

$$\frac{3}{2}(\nu_1 + \nu_2) R T_1 + mgh_1 = \frac{3}{2}(\nu_1 + \nu_2) R T_2 + mgh_2 \qquad (3)$$

подставим уравнения (1) и (2) в (3)

$$\frac{3}{2}(\nu_1 + \nu_2) R T_1 + (\nu_1 + \nu_2) R T_1 = \frac{3}{2}(\nu_1 + \nu_2) R T_2 + \nu_2 R T_2$$

откуда получим температуру T_2

$$T_2 = \frac{5(\nu_1 + \nu_2) T_1}{(3\nu_1 + 5\nu_2)} = \frac{5 \cdot 1 \cdot 480}{(3 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,9)} = 500 \text{ К}$$

Температура изменилась на $\Delta T = T_2 - T_1 = 500 - 480 = 20$ К

Из (3) найдем, что $mg(h_1 - h_2) = \frac{3}{2}(\nu_1 + \nu_2) R \Delta T$ и

$$h_1 - h_2 = \frac{3(\nu_1 + \nu_2) R \Delta T}{2mg} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 8,31 \cdot 20}{2 \cdot 300 \cdot 10} = 0,0831 \text{ м или } 83,1 \text{ мм}$$

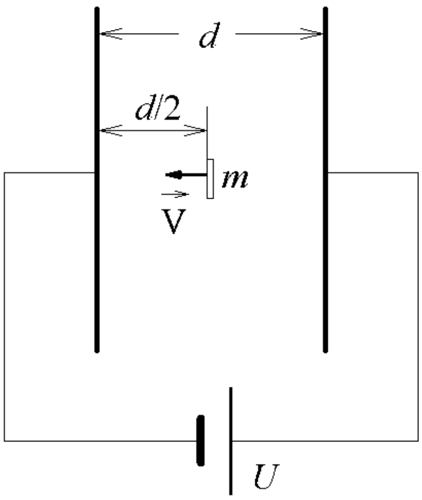
Ответ: 83 мм

Критерии оценивания:

		Балл
1	Из уравнения состояния идеального газа $P_1Sh_1 = (\nu_1 + \nu_2)RT_1$ и условия равновесия тяжелого поршня $mg = P_1S$ следует, что $mgh_1 = (\nu_1 + \nu_2)RT_1$	1-4 баллов
2	Сделан вывод о том, что парциальное давление гелия будет одинаковым в разных частях сосуда ($P = nkT$)	1балл
3	В новом положении равновесия из уравнения состояния идеального газа $P_2'Sh_2 = \nu_2RT_2$ и условия равновесия тяжелого поршня $mg = P_2'S$ следует, что $mgh_2 = \nu_2RT_2$.	1-5 баллов
4	Так как сосуд теплоизолирован, то можно применить закон сохранения энергии для системы "смесь газов - поршень" с учетом того, что благородные газы одноатомны $\frac{3}{2}(\nu_1 + \nu_2)RT_1 + mgh_1 = \frac{3}{2}(\nu_1 + \nu_2)RT_2 + mgh_2$; $\left[mg(h_1 - h_2) = \frac{3}{2}(\nu_1 + \nu_2)R\Delta T\right]$ получена температура T_2 : $T_2 = \frac{5(\nu_1 + \nu_2)T_1}{(3\nu_1 + 5\nu_2)} = \frac{5 \cdot 1 \cdot 480}{(3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}9)} = 500$ К	1-9 баллов
5	Найдено изменение высоты $h_1 - h_2 = \frac{3(\nu_1 + \nu_2)R\Delta T}{2mg} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 8{,}31 \cdot 20}{2 \cdot 300 \cdot 10} = 0{,}0831$ м или 83,1 мм	1 балл

Задача 4

Условие:



4-1. Посередине между обкладками плоского воздушного конденсатора, подключенного к идеальному источнику постоянного напряжения U = 1000 В, поместили тонкую незаряженную металлическую пластинку площадью S = 1 мм^2 и массой m = 0,1 г. Затем ее толкнули со скоростью V = 1,77 мм/с в направлении, перпендикулярном одной из обкладок. При абсолютно упругом ударе с обкладкой пластинка мгновенно получает заряд, поверхностная плотность которого равна поверхностной плотности заряда обкладки. Через какое время после толчка кинетическая энергия пластинки увеличится в 25 раз? Расстояние между обкладками d = 1 см. Плоскости пластинки и обкладок все время параллельны, силы гравитации отсутствуют, краевыми эффектами и сопротивлением воздуха пренебречь. Считать, что электрическое поле пластинки не влияет на распределение заряда на обкладках конденсатора, а размеры пластинки намного меньше размеров обкладок. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Решение:

поверхностную плотность заряда на обкладках конденсатора:

$$\sigma = \frac{q_1}{S_1} = \frac{CU}{S_1} = \frac{\varepsilon_0 S_1}{d}\frac{U}{S_1} = \frac{\varepsilon_0 U}{d}$$

Заряд пластинки $q = \sigma S = \dfrac{\varepsilon_0 SU}{d}$. Напряженность поля между обкладками $E = \dfrac{U}{d}$ действует на пластинку силой $F = qE = \dfrac{\varepsilon_0 SU^2}{d^2} = \dfrac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-6} \cdot 10^{6}}{10^{-4}} = 8{,}85 \cdot 10^{-8}$Н, которая придает ей ускорение $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{8{,}85 \cdot 10^{-8}}{10^{-4}} = 8{,}85 \cdot 10^{-4}$м/с^2. При перезарядке пластинки во время ударов ее скорость и ускорение не меняются по модулю, хотя направление меняется на противоположное. Таким образом, можно не рассматривать отдельные удары и считать все движение после первого удара равноускоренным с начальной скоростью V.

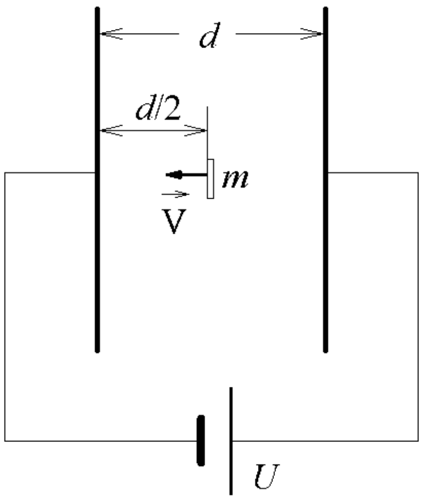
Чтобы кинетическая энергия увеличилась в 25 раз, нужно, чтобы скорость увеличилась в 5 раз. На это потребуется время $t = \dfrac{5\text{V} - \text{V}}{a} = \dfrac{4\text{V}}{a} = \dfrac{4 \cdot 1{,}77 \cdot 10^{-3}}{8{,}85 \cdot 10^{-4}} = 8$ с. К этому времени надо добавить время равномерного движения до первого столкновения $t_0 = \dfrac{d}{2\text{V}} = \dfrac{0{,}01}{2 \cdot 1{,}77 \cdot 10^{-3}} = 2{,}82$ с.

Ответ: 10,82 с

Критерии оценивания:

		Балл
1	Определен заряд пластинки: записаны формулы: $q = \sigma \cdot S_{пласт}$, $\sigma = \dfrac{q_C}{S_C}$, $q_C = C \cdot U$, $C = \dfrac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S_C}{d}$, получено выражение или ответ $q = \sigma S_{пласт} = \dfrac{\varepsilon_0 \cdot S_{пласт} \cdot U}{d} = 0{,}885 нКл$	0-8 баллов
2	После столкновения со стенкой (удар абсолютно упругий) скорость пластинки по модулю не изменилась, изменилось направление на противоположное.	1 балл
3	Так как кинетическая энергия увеличилась в 25 раз, скорость должна увеличиться в 5 раз	1 балл
4	На это потребуется время $t = \dfrac{5V - V}{a} = \dfrac{4V}{a}$, ускорение равно $a = \dfrac{F}{m}$, $F = qE$, $E = \dfrac{U}{d}$ (возможно вычислены $E = 10^5 В/м$, сила $F = 8.85 \cdot 10^{-8} Н$ $a = 8{,}85 \cdot 10^{-4} м/с$) надо добавить время равномерного движения до первого столкновения $t_0 = \dfrac{d}{2V} = \dfrac{0{,}01}{2 \cdot 1{,}77 \cdot 10^{-3}} = 2{,}82$ с.	1-9 баллов
5	Вычислено время t=10,82 с	1 балл

Условие:



4-2. Посередине между обкладками плоского воздушного конденсатора, подключенного к идеальному источнику постоянного напряжения U = 500 В, поместили тонкую незаряженную металлическую пластинку площадью S = 4 мм^2 и массой m = 0,1 г. Затем ее толкнули со скоростью V = 1,77 мм/с в направлении, перпендикулярном одной из обкладок. При абсолютно упругом ударе с обкладкой пластинка мгновенно получает заряд, поверхностная плотность которого равна поверхностной плотности заряда обкладки. На каком расстоянии от левой обкладки окажется пластинка, когда ее кинетическая энергия увеличится в 100 раз? Расстояние между обкладками d = 1 см. Плоскости пластинки и обкладок все время параллельны, силы гравитации отсутствуют, краевыми эффектами и сопротивлением воздуха пренебречь. Считать, что электрическое поле пластинки не влияет на распределение заряда на обкладках конденсатора, а размеры пластинки намного меньше размеров обкладок. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Решение:
Найдем поверхностную плотность заряда на обкладках конденсатора:

$$\sigma = \frac{q_1}{S_1} = \frac{CU}{S_1} = \frac{\varepsilon_0 S_1}{d}\frac{U}{S_1} = \frac{\varepsilon_0 U}{d}$$

Заряд пластинки $q = \sigma S = \frac{\varepsilon_0 SU}{d}$. Напряженность поля между обкладками $E = \frac{U}{d}$ действует на пластинку силой $F = qE = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{d^2} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10^4}{10^{-4}} = 8{,}85 \cdot 10^{-8}$ Н, которая придает ей ускорение $a = \frac{F}{m} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-8}}{10^{-4}} = 8{,}85 \cdot 10^{-4}$ м/с^2. При перезарядке пластинки во время ударов ее скорость и ускорение не меняются по модулю, хотя направление меняется на противоположное. Таким образом, можно не рассматривать отдельные удары и считать все движение после первого удара равноускоренным с начальной скоростью V.

Чтобы кинетическая энергия увеличилась в 100 раз, нужно, чтобы скорость увеличилась в 10 раз. На это потребуется время $t = \frac{10\text{V} - \text{V}}{a} = \frac{9\text{V}}{a} = \frac{9 \cdot 1{,}77 \cdot 10^{-3}}{8{,}85 \cdot 10^{-4}} = 18$ с равноускоренного движения, начиная с момента первого удара. За это время пластинка пройдет расстояние $S = \text{V} \cdot t + \frac{at^2}{2} = 1{,}77 \cdot 10^{-3} \cdot 18 + \frac{8{,}85 \cdot 10^{-4} 18^2}{2} = 0{,}17523$ м. При этом, пройдя 17 см = 0,17 м, пластинка последний раз ударится о правую обкладку и затем удалится от нее еще на 0,00523 м. Это означает, что расстояние до левой обкладки равно 0,01 - 0,00523 = 0,00477 м или 4,77 мм

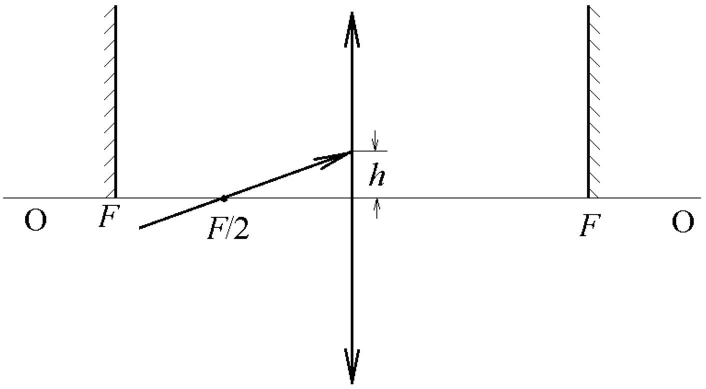
Ответ: 4,77 мм

Критерии оценивания:

		Балл
1	Определен заряд пластинки: записаны формулы: $q=\sigma\cdot S_{пласт}$, $\sigma=\frac{q_C}{S_C}$, $q_C=C\cdot U$, $C=\frac{\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot S_C}{d}$, получено выражение или ответ $q=\sigma S_{пласт}=\frac{\varepsilon_0\cdot S_{пласт}\cdot U}{d}=1,77 nКл$	0-8 баллов
2	После столкновения со стенкой (удар абсолютно упругий) скорость пластинки по модулю не изменилась, изменилось направление на противоположное.	1 балл
3	Так как кинетическая энергия увеличилась в 100 раз, скорость должна увеличиться в 10 раз	1 балл
4	На это потребуется время $t=\frac{10V-V}{a}=\frac{9V}{a}$, ускорение равно $a=\frac{F}{m}$, $F=qE$, $E=\frac{U}{d}$ (возможно вычислены $E=10^5 В/м$, сила $F=8.85\cdot10^{-8} Н$ $a=8,85\cdot10^{-4} м/с$ t=10,82 с)	1-8 баллов
5	За это время пластинка пройдет расстояние $S=V\cdot t+\frac{at^2}{2}=1,77\cdot10^{-3}\cdot18+\frac{8,85\cdot10^{-4}18^2}{2}=0,17523$ м. При этом, пройдя 17 см = 0,17 м, пластинка последний раз ударится о правую обкладку и затем удалится от нее еще на 0,00523 м.	1 балл
6	Расстояние до левой обкладки равно 0,01 - 0,00523 = 0,00477 м или 4,77 мм	1 балл

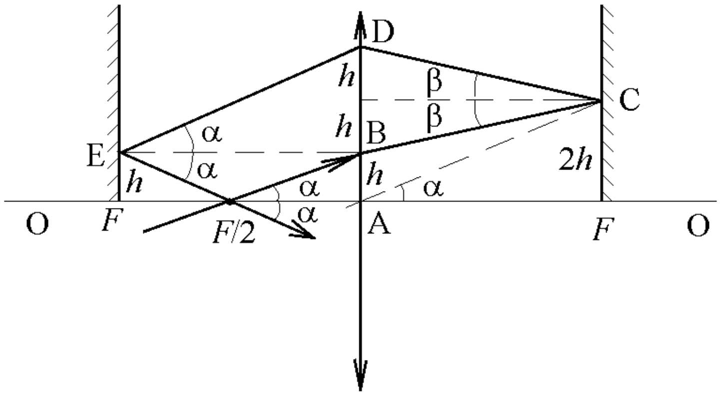
Задача 5

Условие:



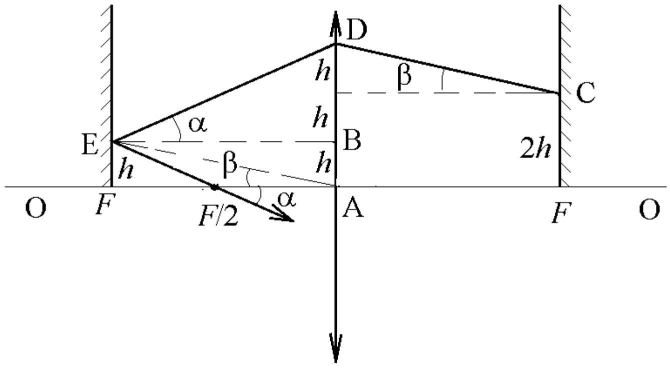
5-1. В фокальных плоскостях собирающей линзы с фокусным расстоянием F расположены плоские зеркала, как показано на рисунке. На линзу падает луч света, пересекая главную оптическую ось на расстоянии $F/2$, а саму линзу на расстоянии h от центра линзы, причем $\dfrac{h}{F} = 10^{-3}$. В какой точке и под каким углом (в градусах) отраженный от левого зеркала после прохождения этой оптической системы луч пересечет первоначальный луч? Для малых углов принять $\sin\alpha \approx tg\alpha \approx \alpha(\text{рад})$.

Решение:



Преломленный в линзе луч должен пройти через точку C, которая является пересечением фокальной плоскости и дополнительной оптической оси AC, параллельной падающему лучу. Из подобия треугольников можно понять, что FC = 2AB = 2h. Если представить, что точка C является точечным источником света, то два луча CB и CD, вышедшие из фокальной плоскости, пойдут после линзы <u>параллельно.</u> Один из этих лучей это обратный падающему, идущий под углом α к главной оптической оси. Второй луч DE идет параллельно ему под тем же углом α и, отразившись от зеркала на расстоянии h от главной оптической оси, пересечется с падающим лучом под углом 2α в точке пересечения его с главной оптической осью на расстоянии $F/2$ от центра линзы. Найдем α.

Так как $\alpha \approx tg\alpha = \dfrac{h}{F/2} = \dfrac{2h}{F} = 2 \cdot 10^{-3}$рад, то $2\alpha = 4 \cdot 10^{-3}$ рад или 0,23°

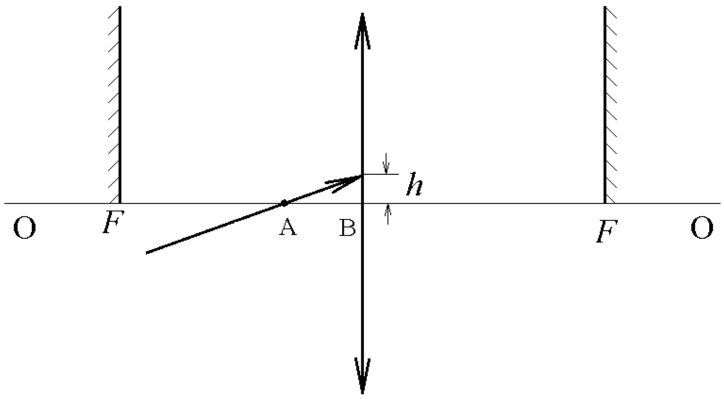


Альтернативное решение: аналогично построению преломленного луча BC можно построить преломленный луч DE с помощью дополнительной оптической оси AE, идущей параллельно лучу CD под углом β к главной оптической оси и пересекающейся в точке E с фокальной плоскостью на расстоянии h от главной оптической оси. Сравнивая треугольник BDE и ACF можно понять, что луч DE идет под углом α к главной оптической оси и отразится под тем же углом.

Критерии оценивания:

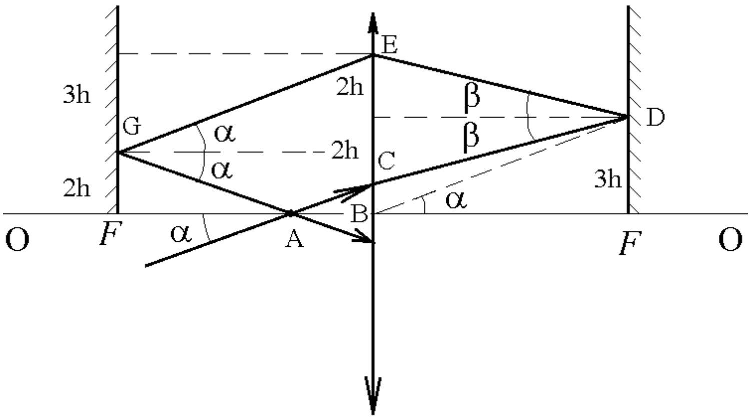
		Балл
1	Правильно построен ход луча после преломления в линзе, отражения от зеркала, нового преломления в линзе и отражения от второго зеркала	1-15 баллов
2	Найдена точка пересечения первоначального и отраженного луча верно определен угол $\alpha \approx tg\alpha = \dfrac{h}{F/2} = \dfrac{2h}{F} = 2 \cdot 10^{-3}$ рад, то $2\alpha = 4 \cdot 10^{-3}$ рад или 0,23°	1-5 баллов

Условие:



5-2. В фокальных плоскостях собирающей линзы с фокусным расстоянием F расположены плоские зеркала, как показано на рисунке. На линзу падает луч света, пересекая главную оптическую ось на расстоянии $AB = F/3$, а саму линзу на расстоянии h от центра линзы, причем $\frac{h}{F} = 3 \cdot 10^{-3}$. В какой точке и под каким углом (в градусах) отраженный от левого зеркала после прохождения этой оптической системы луч пересечет первоначальный луч? Для малых углов принять $\sin\alpha \approx tg\alpha \approx \alpha(\text{рад})$.

Решение:



Преломленный в линзе луч должен пройти через точку D, которая является пересечением фокальной плоскости и дополнительной оптической оси BD, параллельной падающему лучу. Из подобия треугольников можно понять, что FD = 3BC = 3h. Если представить, что точка C является точечным источником света, то два луча DC и DE, вышедшие из фокальной плоскости, пойдут после линзы <u>параллельно.</u> Один из этих лучей это обратный падающему, идущий под углом α к главной оптической оси. Второй луч EG идет параллельно ему под тем же углом α и, отразившись от зеркала на расстоянии 2h от главной оптической оси, пересечется с падающим лучом под углом 2α в точке A. Найдем α.

Так как $\alpha \approx tg\alpha = \frac{h}{F/3} = \frac{3h}{F} = 9 \cdot 10^{-3}$рад, то $2\alpha = 18 \cdot 10^{-3}$ рад или 1,03°

Критерии оценивания:

		Балл
1	Правильно построен ход луча после преломления в линзе, отражения от зеркала, нового преломления в линзе и отражения от второго зеркала	1-15 баллов
2	Найдена точка пересечения первоначального и отраженного луча верно определен угол $\alpha \approx tg\alpha = \frac{h}{F/2} = \frac{2h}{F} = 2 \cdot 10^{-3}$рад, то $2\alpha = 4 \cdot 10^{-3}$ рад или 0,23°	1-5 баллов