

9 класс

9.1 Какое из двух чисел больше $\sqrt{6} - \sqrt[3]{3}$ или 1?

Решение:

Предположим, что $\sqrt{6} - \sqrt[3]{3} > 1$. Заменим неравенство равносильным $\sqrt{6} - 1 > \sqrt[3]{3}$, после чего возведем обе части последнего неравенства в куб $6\sqrt{6} - 3 \cdot 6 \cdot 1 + 3\sqrt{6} \cdot 1 - 1 > 3$, то есть $9\sqrt{6} > 22$. Возводя обе части полученного неравенства в квадрат, получим $81 \cdot 6 > 484$, или $486 > 484$. Получив в итоге верное неравенство, делаем вывод, что исходное неравенство также было верным и, значит, $\sqrt{6} - \sqrt[3]{3} > 1$.

Ответ: $\sqrt{6} - \sqrt[3]{3} > 1$.

9.2 Восстановите цифры x, y, z в следующем равенстве

$$\overline{x5} \cdot \overline{3yz} = 7850.$$

Решение:

Из условия следует, что $\overline{x5} = \frac{7850}{\overline{3yz}} \leq \frac{7850}{300} = 26\frac{1}{6}$; следовательно, $\overline{x5} < 26$, и x может принимать только значения 1 и 2. При $x = 2$ получим:

$$\overline{3yz} = \frac{7850}{\overline{x5}} = \frac{7850}{25} = 314;$$

$x = 1$ не подходит, так как 7850 не делится на 15. $25 \cdot 314 = 7850$

Ответ: $x = 2, y = 1, z = 4$.

9.3 В машину грузят мешки со строительной смесью массой 160 кг и 130 кг. Сколько мешков каждого вида надо погрузить в машину, чтобы общий вес всего груза составил 3 тонны? Укажите все решения.

Решение:

Обозначим количество мешков первого вида за y , второго – через x . Получаем уравнение $130x + 160y = 3000$, $13x + 16y = 300$.

Воспользуемся делимостью на 13. Для этого $16y$ представим в виде $13y + 3y$, а 300 разделим на 13 с остатком.

$$13x + 13y + 3y = 13 \cdot 23 + 1,$$

$$3y - 1 = 13(23 - x - y).$$

Правая часть последнего уравнения делится на 13, следовательно, и левая часть должна делиться на 13. Для того чтобы найти значения y , при которых разность $3y - 1$ делится на 13, применим перебор. Приравняем $3y - 1$ к числам, делящимся на 13: 13, 26, 39, 52, 65 и т.д., выясняя каждый раз, является ли корень соответствующего уравнения целым или дробным. Целые корни получаются в следующих случаях:

$$3y - 1 = 26, y = 9,$$

$$3y - 1 = 65, y = 22 \text{ и др.}$$

Но уже значение $y = 22$ слишком велико, так как в этом случае $16y = 16 \cdot 22 = 352 > 300$. При $y = 9$ из уравнения можно найти x : $13x + 16 \cdot 9 = 300$, $x = 12$.

Ответ: 9 мешков по 160 кг и 12 мешков по 130 кг.

9.4 Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD описана около окружности. Известно, что $\angle BCD = 2\angle BAD$. Найдите отношение $\frac{AB}{BC}$.

Решение:

Обозначим через O центр окружности, вписанной в трапецию. Так как CO – биссектриса угла BCD , $\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD = \angle BAD = 180^\circ - \angle ABC$, откуда $CO \parallel AB$. Рассмотрим прямую MN , симметричную прямой AB относительно центра O (M и N – точки на прямых BC и AD соответственно). Она касается окружности и параллельна AB . Прямая CO равноудалена от сторон AB и MN параллелограмма $ABMN$, откуда $BC = CM = \frac{BM}{2}$. Параллелограмм $ABMN$ является ромбом, так как описан около окружности, поэтому $AB = BM$, и значит,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BM}{BC} = 2.$$

Ответ: 2.

9.5 В таблице размера 3×3 расставлены числа следующим образом

	3	2
6	7	0
4	9	5

Одним ходом разрешается к любым двум числам, стоящим в соседних клетках, прибавить одно и то же число (клетки называются соседними, если они имеют общую сторону).

Можно ли за несколько ходов получить:

а) таблицу, во всех клетках которой стоят нули?

б) таблицу, в клетках которой стоят нули и одна единица?

Решение:

а) Требуемую таблицу можно получить за 5 ходов, например, следующим образом

0	3	2
6	7	0
4	9	5

Прибавим -2

0	1	0
6	7	0
4	9	5

прибавим -4

0	1	0
6	7	0
0	5	5

прибавим -5

0	1	0
6	7	0
0	0	0

прибавим -6

0	1	0
0	1	0
0	0	0

прибавим -1

0	0	0
0	0	0
0	0	0

Пара клеток, к которым применяется операция, выделены жирным контуром. Число, прибавляемое к числам в этих клетках, записано рядом.

б) если к таблице

a	b	c
d	e	f
g	h	k

применить операцию, разрешенную условием задачи, то в выражении

$$S = (a + c + e + g + k) - (b + d + f + h)$$

к уменьшаемому и вычитаемому прибавится одно и то же число, и это выражение не изменится. В данной таблице

$$S = (0 + 2 + 7 + 4 + 5) - (3 + 6 + 0 + 9) = 0.$$

Таблица же, в клетках которой стоят нули и одна единица, имеет сумму S , равную 1 или -1 , а не нулю. Следовательно, эта таблица не может быть получена из данной.

Ответ: а) можно; б) нельзя.