

## 9 класс

**9.1** Какое из двух чисел больше  $\sqrt{6} - \sqrt[3]{3}$  или 1?

Решение:

Предположим, что  $\sqrt{6} - \sqrt[3]{3} > 1$ . Заменим неравенство равносильным  $\sqrt{6} - 1 > \sqrt[3]{3}$ , после чего возведем обе части последнего неравенства в куб  $6\sqrt{6} - 3 \cdot 6 \cdot 1 + 3\sqrt{6} \cdot 1 - 1 > 3$ , то есть  $9\sqrt{6} > 22$ . Возведя обе части полученного неравенства в квадрат, получим  $81 \cdot 6 > 484$ , или  $486 > 484$ . Получив в итоге верное неравенство, делаем вывод, что исходное неравенство также было верным и, значит,  $\sqrt{6} - \sqrt[3]{3} > 1$ .

**Ответ:**  $\sqrt{6} - \sqrt[3]{3} > 1$ .

**9.2** Восстановите цифры  $x, y, z$  в следующем равенстве

$$\overline{x5} \cdot \overline{3yz} = 7850.$$

Решение:

Из условия следует, что  $\overline{x5} = \frac{7850}{3yz} \leq \frac{7850}{300} = 26\frac{1}{6}$ ; следовательно,  $\overline{x5} < 26$ , и  $x$  может принимать только значения 1 и 2. При  $x = 2$  получим:

$$\overline{3yz} = \frac{7850}{\overline{x5}} = \frac{7850}{25} = 314;$$

$x = 1$  не подходит, так как 7850 не делится на 15.  $25 \cdot 314 = 7850$

**Ответ:**  $x = 2, y = 1, z = 4$ .

**9.3** В машину грузят мешки со строительной смесью массой 160 кг и 130 кг. Сколько мешков каждого вида надо погрузить в машину, чтобы общий вес всего груза составил 3 тонны? Укажите все решения.

Решение:

Обозначим количество мешков первого вида за  $y$ , второго – через  $x$ . Получаем уравнение  $130x + 160y = 3000$ ,  $13x + 16y = 300$ .

Воспользуемся делимостью на 13. Для этого  $16y$  представим в виде  $13y + 3y$ , а 300 разделим на 13 с остатком.

$$13x + 13y + 3y = 13 \cdot 23 + 1,$$

$$3y - 1 = 13(23 - x - y).$$

Правая часть последнего уравнения делится на 13, следовательно, и левая часть должна делиться на 13. Для того чтобы найти значения  $y$ , при которых разность  $3y - 1$  делится на 13, применим перебор. Приравняем  $3y - 1$  к числам, делящимся на 13: 13, 26, 39, 52, 65 и т.д., выясняя каждый раз, является ли корень соответствующего уравнения целым или дробным. Целые корни получаются в следующих случаях:

$$3y - 1 = 26, y = 9,$$

$$3y - 1 = 65, y = 22 \text{ и др.}$$

Но уже значение  $y = 22$  слишком велико, так как в этом случае  $16y = 16 \cdot 22 = 352 > 300$ . При  $y = 9$  из уравнения можно найти  $x$ :  $13x + 16 \cdot 9 = 300$ ,  $x = 12$ .

**Ответ:** 9 мешков по 160 кг и 12 мешков по 130 кг.

**9.4** Трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  описана около окружности. Известно, что  $\angle BCD = 2\angle BAD$ . Найдите отношение  $\frac{AB}{BC}$ .

Решение:

Обозначим через  $O$  центр окружности, вписанной в трапецию. Так как  $CO$  – биссектриса угла  $BCD$ ,  $\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD = \angle BAD = 180^\circ - \angle ABC$ , откуда  $CO \parallel AB$ . Рассмотрим прямую  $MN$ , симметричную прямой  $AB$  относительно центра  $O$  ( $M$  и  $N$  – точки на прямых  $BC$  и  $AD$  соответственно). Она касается окружности и параллельна  $AB$ . Прямая  $CO$  равноудалена от сторон  $AB$  и  $MN$  параллелограмма  $ABMN$ , откуда  $BC = CM = \frac{BM}{2}$ . Параллелограмм  $ABMN$  является ромбом, так как описан около окружности, поэтому  $AB = BM$ , и значит,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BM}{BC} = 2.$$

**Ответ:** 2.

**9.5** В таблице размера  $3 \times 3$  расставлены числа следующим образом

	3	2
6	7	0
4	9	5

Одним ходом разрешается к любым двум числам, стоящим в соседних клетках, прибавить одно и тоже число (клетки называются соседними, если они имеют общую сторону).

Можно ли за несколько ходов получить:

- а) таблицу, во всех клетках которой стоят нули?
- б) таблицу, в клетках которой стоят нули и одна единица?

Решение:

а) Требуемую таблицу можно получить за 5 ходов, например, следующим образом

<table border="1"><tr><td>0</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>0</td></tr><tr><td>4</td><td>9</td><td>5</td></tr></table>	0	3	2	6	7	0	4	9	5	Прибавим $-2$	<table border="1"><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>0</td></tr><tr><td>4</td><td>9</td><td>5</td></tr></table>	0	1	0	6	7	0	4	9	5	прибавим $-4$	<table border="1"><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>5</td><td>5</td></tr></table>	0	1	0	6	7	0	0	5	5	прибавим $-5$
0	3	2																														
6	7	0																														
4	9	5																														
0	1	0																														
6	7	0																														
4	9	5																														
0	1	0																														
6	7	0																														
0	5	5																														

<table border="1"><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	1	0	6	7	0	0	0	0	прибавим $-6$	<table border="1"><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	1	0	0	1	0	0	0	0	прибавим $-1$	<table border="1"><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0																													
6	7	0																													
0	0	0																													
0	1	0																													
0	1	0																													
0	0	0																													
0	0	0																													
0	0	0																													
0	0	0																													

Пара клеток, к которым применяется операция, выделены жирным контуром.  
Число, прибавляемое к числам в этих клетках, записано рядом.

б) если к таблице

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>g</i>	<i>h</i>	<i>k</i>

применить операцию, разрешенную условием задачи, то в выражении

$$S = (a + c + e + g + k) - (b + d + f + h)$$

к уменьшаемому и вычитаемому прибавится одно и то же число, и это выражение не изменится. В данной таблице

$$S = (0 + 2 + 7 + 4 + 5) - (3 + 6 + 0 + 9) = 0.$$

Таблица же, в клетках которой стоят нули и одна единица, имеет сумму  $S$ , равную 1 или  $-1$ , а не нулю. Следовательно, эта таблица не может быть получена из данной.

**Ответ:** а) можно; б) нельзя.