9 класс

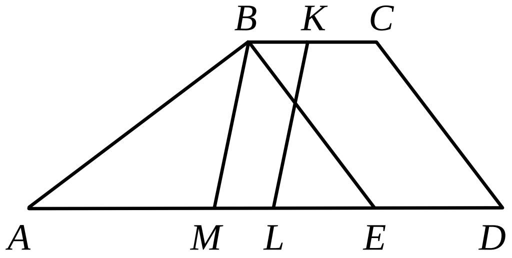
9.1 Не выполняя действий умножения и возведения в степень, сравните числа $923654781 \cdot 923654783$ и 923654782^2 .

Решение:
Обозначим число 923654782 через x. Тогда левое выражение превратится в $(x-1)(x+1) = x^2 - 1 < x^2$.
Таким образом, $923654781 \cdot 923654783 < 9236547822^2$.

Ответ: $923654781 \cdot 923654783 < 9236547822^2$.

9.2 В трапеции длина средней линии равна 4, углы при одном из оснований имеют величины 40° и 50°. Найдите длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований, равна 1.

Решение:
Обозначим вершины трапеции буквами *A*, *B*, *C*, *D* так, что $\angle A = 40^\circ$, $\angle D = 50^\circ$, $BC \| AD$.



Поскольку $\angle A + \angle D = 90° < 180°$, то $AD > BC$. По условию длина средней линии трапеции равна 4, значит,

$$\frac{AD + BC}{2} = 4.$$

Проведём через точку *B* прямую *BE* параллельно *CD* и обозначим через *K*, *L*, *M* соответственно середины отрезков *BC*, *AD* и *AE*. Имеем

$$ML = AL - AM = \frac{AD}{2} - \frac{AE}{2} = \frac{AD - AE}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{BC}{2} = BK.$$

Отсюда следует, что четырёхугольник *BKLM* – параллелограмм, и потому $BM = KL = 1$. В треугольнике *ABE* угол *B* – прямой, так как $\angle BAE + \angle BEA = \angle A + \angle D = 40° + 50° = 90°$. Поскольку середина гипотенузы равноудалена от всех вершин прямоугольного треугольника, то $AM = ME = BM = 1$. Так как $AE = AM + ME = 2$, то $AD - BC = AD - ED = AE = 2$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} AD + BC = 8 \\ AD - BC = 2 \end{cases}$$

находим, что $AD = 5$, $BC = 3$.

Ответ: длины оснований трапеции равны 5 и 3.

9.3 Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу из двух населенных пунктов P, Q и встретились в 36 км от Q. Прибыв в пункты P и Q, автомобили сразу же повернули назад и встретились вновь в 18 км от P. Сколько километров между P и Q?

<u>Решение:</u>
Пусть расстояние между населенными пунктами P и Q равно S км, v_1км/ч – скорость автомобиля, выехавшего из P, v_2км/ч – скорость автомобиля, выехавшего из Q. До первой встречи автомобили проехали соответственно пути $(S-36)$ км и 36 км, затратив на это одно и то же время

$$\frac{S-36}{v_1} = \frac{36}{v_2}.$$

От первой до второй встречи они проехали соответственно пути
$36 \text{ км} + (S-18) \text{ км} = (S+18)\text{км}$ и $(S-36) \text{ км} + 18 \text{ км} = (S-18)\text{км}$
также за одно время

$$\frac{S+18}{v_1} = \frac{S-18}{v_2}.$$

Разделив почленно эти уравнения, получим

$$\frac{S-36}{S+18} = \frac{36}{S-18}, S^2 - 90S = 0, S(S-90) = 0, S = 90.$$

Ответ: 90 км.

9.4[*] При каком значении a сумма квадратов корней трехчлена

$$x^2 - (a-2)x - a - 1$$

принимает наименьшее значение?

[*] При тиражировании заданий была допущена опечатка. В задании было указано «При каком значении a сумма квадратов корней трехчлена $x^2 - (a^2 - 2)x - a - 1$ принимает наименьшее значение?» В такой формулировке решение задачи является крайне трудоемким. В связи с этим оргкомитетом олимпиады принято решение снять задачу 9.4 с проверки и оценивать решения участников-девятиклассников из максимума в 28 баллов – 4 задачи по 7 баллов каждая (а не 35 баллов – 5 задач по 7 баллов каждая). Оргкомитет олимпиады приносит участникам свои извинения.

Решение:

Пусть x_1, x_2 – корни данного квадратного трёхчлена. По теореме Виета имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a - 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -a - 1 \end{cases} \qquad (1)$$

Находим с помощью системы (1):

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a-2)^2 - 2(-a-1) = a^2 - 4a + 4 + 2a +$$
$$+2 = (a^2 - 2a + 1) + 5 = (a-1)^2 + 5 \qquad (2)$$

Ясно, что сумма (2), а следовательно, сумма квадратов корней принимает наименьшее значение при $a = 1$.

Проверим, имеет ли данный квадратный трехчелен при $a = 1$ действительные корни?

$$x^2 + x - 2 = 0,\ x_1 = -2,\ x_2 = 1$$

Ответ: 1.

9.5 Найдите число членов арифметической прогрессии, у которой отношение суммы первых тринадцати членов к сумме последних тринадцати членов равно $\frac{1}{2}$, а отношение суммы всех членов без первых трех к сумме всех членов, без последних трех равно $\frac{4}{3}$.

Решение:

Пусть a – первый член арифметической прогрессии, d – её разность, n – число её членов.

Тогда $\frac{a+(a+12d)}{2} \cdot 13 = 13(a + 6d)$ – сумма первых тринадцати членов.

$\frac{(a+(n-13)d)+(a+(n-1)d)}{2} \cdot 13 = 13(a + (n-7)d)$ – сумма последних тринадцати членов,

$\frac{(a+3d)+(a+3d+(n-4)d)}{2}\cdot(n-3)=\frac{2a+(n+2)d}{2}(n-3)$ – сумма всех членов без первых трёх,

$\frac{a+a+(n-4)}{2}\cdot(n-3)=\frac{2a+(n-4)d}{2}(n-3)$ – сумма всех членов без последних трёх.

Согласно условиям задачи составляем систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{a+6d}{a+(n-7)d}=\frac{1}{2},\\ \frac{2a+(n+2)d}{2a+(n-4)d}=\frac{4}{3}.\end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений относительно n:

$$\begin{cases}2a+12d=a+(n-7)d,\\ 6a+3(n+2)d=8a+4(n-4)d.\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=(n-19)d,\\ -2a=(n-22)d\end{cases}(a\neq 0, d\neq 0)$$

$$\frac{n-19}{n-22}=\frac{-1}{2},\ 2n-38=-(n-22),\ n=20.$$

Ответ: 20.