9 класс

9.1 Вычислите

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\ddots+\cfrac{1}{2020}}}}}}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\ddots+\cfrac{1}{2020}}}}}.$$

<u>Решение:</u>

В каждой из дробей обозначим через *x* ту часть, которая записывается так

$$x=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\ddots+\cfrac{1}{2020}}}}.$$

Тогда получим

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}+\frac{1}{2+x}=\frac{1+x}{2+x}+\frac{1}{2+x}=1.$$

Ответ: 1.

9.2 При каком значении a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2+(a-1)x-2a=0$$

равна 9?

<u>Решение:</u>

Применяя теорему Виетта, получим

$$\begin{cases} x_1+x_2=1-a, \\ x_1\cdot x_2=-2a, \\ x_1^2+x_2^2=9. \end{cases}$$

Так как $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2$, то $9=(1-a)^2+4a$, откуда $a^2+2a-8=0, a_1=2, a_2=-4$. Условию задачи удовлетворяет только $a=2$, так как уравнение имеет корни лишь при условии $D=(a-1)^2+8a\geq 0$, а при $a=-4$ дискриминант отрицательный.

Ответ: $a=2$.

9.3 Решите в целых числах уравнение

$$3x^2 + 5y^2 = 345.$$

Решение:

Так как 345 и $5y^2$ делятся на 5, то и $3x^2$ делится на 5, откуда следует, что $x = 5u$, где u – целое число. Аналогично $y = 3v$ для некоторого целого числа v. Уравнение принимает вид

$$3(5u)^2 + 5(3v)^2 = 345,$$
$$3 \cdot 25u^2 + 5 \cdot 9v^2 = 345,$$
$$5u^2 + 3v^2 = 23.$$

Следовательно, $v^2 \leq \frac{23}{3}$, $u^2 \leq \frac{23}{5}$, откуда $|u| \leq 2$, $|v| \leq 2$. перебором устанавливаем, что $|u| = 2, |v| = 1$. отсюда получаем следующее множество решений:

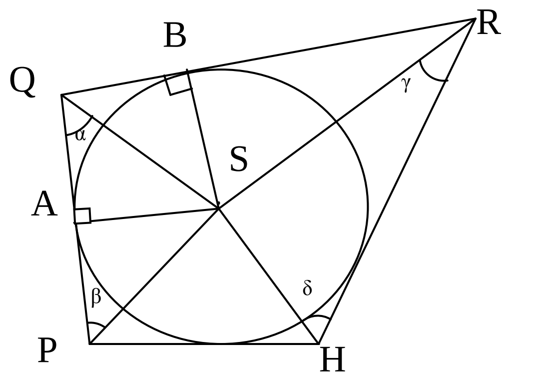
$$\{(10;\ 3);\ (10; -3);\ (-10; 3);\ (-10;\ -3)\}.$$

Ответ: $(10;\ 3);\ (10; -3);\ (-10; 3);\ (-10;\ -3)$.

9.4 Четырехугольник *PQRH* описан около окружности с центром *S*, угол *PSQ* равен 85°. Найдите угол *RSH*.

Решение:

Так как *AS*, *BS* – радиусы, проведенные в точку касания, то ΔQBS и ΔQAS – прямоугольные и равные ($AS = BS, QA = QB$ (отрезки касательных, проведенных из одной точки)). Тогда $\angle AQS = \angle SBQ = \alpha$. Аналогично $\angle APS = \angle SPH = \beta, \angle PHS = \angle SHR = \delta, \angle BRS = \angle SRH = \gamma.$



$\angle PSQ = 180^\circ - \alpha - \beta,\ \angle RSH = 180^\circ - \delta - \gamma.$

Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°, то

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{1}{2}(\angle P + \angle Q + \angle R + \angle H) = 180^\circ.$$

Из этого следует, что $\angle PSQ + \angle RSH = 360^{\circ} - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 180^{\circ}$, тогда $\angle RSH = 180^{\circ} - 85^{\circ} = 95^{\circ}$.

Ответ: 95°.

9.5 Из города A в город B выехал первый автомобиль. Одновременно навстречу ему из города B в A отправился второй автомобиль. Первый прибыл в B через 2,5 часа после встречи, а второй прибыл в A через 1,6 часов после встречи. Сколько часов был в пути каждый автомобиль?

Решение:
Пусть x км/ч – скорость первого автомобиля, y км/ч – скорость второго автомобиля. Тогда 1,6y км – путь первого автомобиля до встречи, а 2,5x км – путь второго автомобиля до встречи. (2,5x + 1,6y) км – расстояние между A и B. Так как пути, проходимые телами при равномерном движении за одно и то же время, пропорциональны их скоростям, то имеем уравнение

$$\frac{1{,}6y}{2{,}5x} = \frac{x}{y}.$$

Откуда находим

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{16}{25}, \frac{x}{y} = \frac{4}{5}.$$

С помощью последнего равенства вычислим, сколько часов требуется каждому автомобилисту на путь:

$$\frac{2{,}5x + 1{,}6y}{x} = 2{,}5 + 1{,}6\frac{y}{x} = 2{,}5 + 1{,}6 \cdot \frac{5}{4} = 4{,}5;$$

$$\frac{2{,}5x + 1{,}6y}{y} = 2{,}5\frac{x}{y} + 1{,}6 = 2{,}5 \cdot \frac{4}{5} + 1{,}6 = 3{,}6.$$

Ответ: 4,5 ч и 3,6 ч.