9 класс

9.1 Вычислите $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+5\right)^{-1}$.

Решение:

Избавимся от иррациональности в знаменателях дробей.

$$\left(\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}+\frac{3(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}+\frac{15(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+5\right)^{-1}=\left(\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{3(\sqrt{3}+2)}{-1}+\frac{15(3+\sqrt{3})}{6}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+5}=\left(\sqrt{3}+1-3\sqrt{3}-6+\frac{15}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+5}=$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+5}=\frac{\sqrt{3}+5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+5}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

9.2 Найдите все простые числа вида $\frac{n(n+1)}{2}-1,\ \ n\in N$.

Решение:

При $n\geq 4$ из равенства $\frac{n(n+1)}{2}-1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ получаем, что число $\frac{n(n+1)}{2}-1$ составное. В самом деле, при $n=2k$ имеем $\frac{n(n+1)}{2}-1=(2k-1)(k+1)$, а при $n=2k+1$ имеем $\frac{n(n+1)}{2}-1=k(2k+3)$.

Если $n=2$, то получаем первое простое число 2, если $n=3$, то получаем второе простое число 5.

Ответ: 2; 5.

9.3 Найдите сумму корней уравнения $x^2+2(a^2-3a)x-(6a^3-14a^2+4)=0.$ Найдите значения a, при которых она принимает наибольшее значение.

Решение:

Найдем дискриминант:

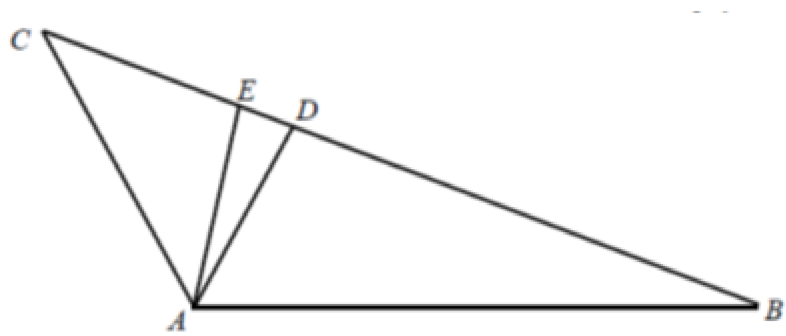
$$\frac{D}{4} = (a^2 - 3a)^2 + (6a^3 - 14a^2 + 4) = a^4 - 5a^2 + 4 = (a^2 - 1)(a^2 - 4)$$

Дискриминант неотрицателен при $a \in U = (-\infty; -2]U[-1; 1]U[2; +\infty)$. Сумма корней S = 2($3a - a^2$) принимает наибольшее значение при $a = \frac{3}{2}$, но при этом значении a дискриминант отрицателен, и корни не являются действительными числами. На промежутке $a \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$ сумма S возрастает и принимает наибольшее значение при наибольшем a из множества $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cap U$, т.е. при $a = 1$. Тогда S = 2. На промежутке $a \in \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$сумма S убывает и принимает наибольшее значение при наименьшем a из множества $a \in \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$, т.е. при $a=2$. Тогда S=2.

Ответ: $S = 2, a = 1, a = 2$.

9.4 В треугольнике ABC угол B равен 20°, а угол C равен 40°. Биссектриса AD угла A равна 2. Найдите $BC - AB$.

Решение:



На стороне BC отметим точку E так, чтобы $AB=BE$. Тогда $CE=BC-AB$.

Из треугольника ABC $\angle A = 180^0 - 40^0 - 20^0 = 120^0$. Так как AD – биссектриса, то $\angle BAD$=$120^0 : 2 = 60^0$. $\angle ADC$ – внешний для треугольника ADB.Тогда $\angle ADC$= $60^0 + 20^0$=80^0. ΔABE - равнобедренный по построению, тогда $\angle AEB$=$(180^0 - 20^0) : 2 = 80^0$. Таким образом ΔADE равнобедренный и AE=AD=2. Далее $\angle CEA = 180^0 - \angle AEB = 180^0 - 80^0 = 100^0$.

$\angle CAE = 180^0 - \angle ACE - \angle AEC = 180^0 - 40^0 - 100^0 = 40^0$, т.е. ΔACE - равнобедренный и *CE*=*AE*=2.

Ответ: 2.

9.5 Число двухкомнатных квартир в доме в 4 раза больше числа однокомнатных, а число трехкомнатных квартир кратно числу однокомнатных. Если число трехкомнатных увеличить в 5 раз, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если известно, что их не меньше 100?

Решение:

Пусть n – число однокомнатных квартир, тогда двухкомнатных – $4n$, а трехкомнатных- np, где $p\epsilon N$.

Из условия задачи получим систему:

$$\begin{cases} 5np - 4n = 22 \\ 5n + np \geq 100. \\ \quad n, p \in N \end{cases}$$

Перепишем первое уравнение в виде $n(5p-4) = 22$.

Заметим, что число *5p-4* является делителем числа 22, причем таким, что при делении на 5 оно дает в остатке 1. Таких чисел два: 1 и 11. При этом p = 1или p = 3. При p = 3 из первого уравнения n=2, но тогда не выполнено неравенство. При p=1, n=22. Тогда число квартир в доме равно 22+88+22=132.

Ответ: 132.