9 класс

9.1 Сумма цифр двузначного числа равна 6. Если к этому числу прибавить 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

Решение:
Пусть x – число десятков искомого числа, y – число единиц. Тогда искомое число можно записать в виде$10x + y$. В этих предположениях задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ 10x + y + 18 = 10y + x. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $x = 2$, $y = 4$.

Ответ: 24.

9.2 Сравните два числа

$$a = \frac{9}{\sqrt{11} - \sqrt{2}} \text{ и } b = \frac{6}{3 - \sqrt{3}}.$$

Решение:
Избавимся от иррациональности

$$a = \frac{9}{\sqrt{11} - \sqrt{2}} = \frac{9(\sqrt{11} + \sqrt{2})}{(\sqrt{11} - \sqrt{2})(\sqrt{11} + \sqrt{2})} = \frac{9(\sqrt{11} + \sqrt{2})}{9} = \sqrt{11} + \sqrt{2}.$$

$$b = \frac{6}{3 - \sqrt{3}} = \frac{6(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} = \frac{6(3 + \sqrt{3})}{9 - 3} = 3 + \sqrt{3}.$$

Возведем оба числа в квадрат

$\sqrt{11} + \sqrt{2}$	$3 + \sqrt{3}$
$(\sqrt{11} + \sqrt{2})^2$	$(3 + \sqrt{3})^2$
$11 + 2\sqrt{22} + 2$	$9 + 6\sqrt{3} + 3$
$13 + 2\sqrt{22}$	$12 + 6\sqrt{3}$
$1 + 2\sqrt{22}$	$6\sqrt{3}$

Еще раз возведем в квадрат

$1 + \sqrt{88}$	$\sqrt{108}$

$(1 + \sqrt{88})^2$ $\qquad$ 108

$89 + 2\sqrt{88}$ $\qquad$ 108

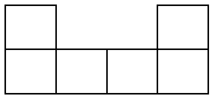
Вычтем 89 из двух чисел

$\sqrt{352}$ $\qquad$ $<$ $\qquad$ $19 = \sqrt{361}$

И расставляя неравенство, начиная с конца, получим, что $b > a$.

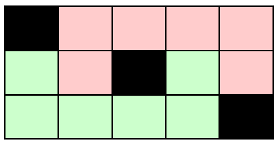
Ответ: $a < b$.

9.3 Клетчатый прямоугольник разрезали по линиям сетки на шестиклеточные фигуры и нечетное число клеточек. Какое наименьшее число отдельных клеточек могло при этом оказаться? (Шестиклеточные фигуры выглядят так, как на рисунке, их можно поворачивать)



Решение:

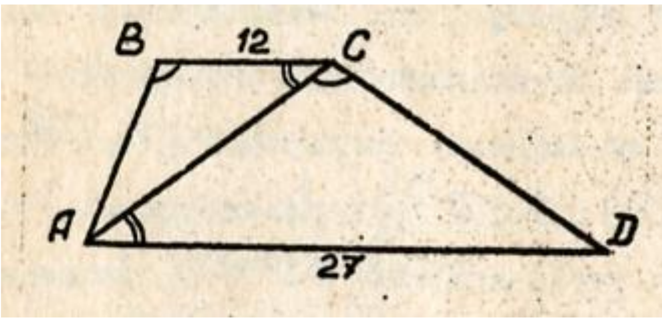
Так как шестиклеточная фигура имеет площадь клеточек, а количество отдельных клеточек нечетно, то площадь прямоугольника должна быть нечетной, то есть обе стороны прямоугольника – нечетные. Шестиклеточная фигура может примыкать к стороне прямоугольника либо двумя клетками, либо четырьмя, но одна клеточка не может сделать все стороны прямоугольника (которые по длине не короче 3) нечетными, так как одна клетка не может примыкать ко всем четырем сторонам. Следовательно, клеточек по крайней мере 3. Пример для трех клеточек (прямоугольник 3×5) показан на рисунке.



Ответ: 3.

9.4 В трапеции *ABCD* с диагональю *AC* углы *ABC* и *ACD* равны. Найдите диагональ *AC*, если основания *BC* и *AD* соответственно равны 12 см и 27 см.

Решение:



В трапеции $ABCD$ по условию $\angle ABC = \angle ACD$ и $\angle BCA = \angle CAD$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD. Следовательно, $\Delta ABC \backsim \Delta DCA$, откуда

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AD}; \frac{12}{AC} = \frac{AC}{27}, AC = 18.$$

Ответ: $AC = 18$ см.

9.5 При каких значениях a квадратные трехчлены

$$x^2 + ax + 1 \text{ и } x^2 + x + a$$

имеют общий корень?

Решение:

Сначала определим множество значений a, при которых данные трехчлены одновременно имеют действительные корни. С этой целью составим дискриминанты и решим систему неравенств

$$\begin{cases} a^2 - 4 \geq 0, \\ 1 - 4a \geq 0; \end{cases} \begin{cases} |a| \geq 2, \\ a \leq \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Отсюда$a \leq -2$.

Теперь решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 = 0, \\ x^2 + x + a = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$ax - x + 1 - a = 0,$$
$$(a - 1)x = a - 1.$$

Заметив, что $a \leq -2$, находим $x = 1$. Подставив $x = 1$ в любое из уравнений системы, найдем $a = -2$.

Проверка показывает, что при $a = -2$ данные квадратные трехчлены имеют общий корень.

Ответ: –2.