

9 класс

9.1 Вычислите $\sqrt{4444488889}$.

Решение:

$$\begin{aligned}\sqrt{4444488889} &= \sqrt{4444444444 + 44444 + 1} = \\&= \sqrt{4 \cdot 1111111111 + 4 \cdot 11111 + 1} = \frac{1}{3} \sqrt{4 \cdot 9999999999 + 4 \cdot 99999 + 9} = \\&= \frac{1}{3} \sqrt{4 \cdot (10^{10} - 1) + 4 \cdot (10^5 - 1) + 9} = \frac{1}{3} \sqrt{4 \cdot 10^{10} + 4 \cdot 10^5 + 1} = \\&= \frac{1}{3} \sqrt{(2 \cdot 10^5 + 1)^2} = \frac{1}{3} (2 \cdot 10^5 + 1) = \frac{200001}{3} = 66667.\end{aligned}$$

Ответ: 66667.

9.2 Найдите значение выражения

$$\frac{b^2}{b^4 + 4},$$

если известно, что $\frac{1}{b} + \frac{b+1}{2} = 3,5$.

Решение:

$$\begin{aligned}\frac{1}{b} + \frac{b}{2} + \frac{1}{2} &= 3,5, \\ \frac{1}{b} + \frac{b}{2} &= 3, \\ \left(\frac{1}{b} + \frac{b}{2}\right)^2 &= 9, \\ \frac{1}{b^2} + 2 \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} &= 9, \\ \frac{1}{b^2} + 1 + \frac{b^2}{4} &= 9, \\ \frac{4 + b^4}{4b^2} &= 8, \\ \frac{4 + b^4}{b^2} &= 32, \\ \frac{b^2}{4 + b^4} &= \frac{1}{32}.\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{32}$.

9.3 Из пункта A в пункт B выехал легковой автомобиль, одновременно навстречу ему из пункта B в A выехал грузовой автомобиль. Легковой автомобиль прибыл в пункт B через 2 ч после встречи с грузовым, а грузовой прибыл в пункт A через 4,5 ч после встречи с легковым. Сколько часов были в пути легковой и грузовой автомобили?

Решение:

Пусть легковой и грузовой автомобили до встречи были в пути t часов. Обозначим: v_1 км/ч – скорость легкового автомобиля, а v_2 км/ч – скорость грузового автомобиля.

До встречи грузовой автомобиль проехал расстояние, равное $v_2 t$. Это расстояние легковой автомобиль преодолел после встречи за 2 часа. Поэтому скорость легкового автомобиля может быть представлена так:

$$v_1 = \frac{v_2 t}{2}.$$

Аналогично скорость грузового автомобиля равна:

$$v_2 = \frac{v_1 t}{4,5}.$$

Таким образом, имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{v_2 t}{2}, \\ v_2 = \frac{v_1 t}{4,5}, \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2v_1}{t} = \frac{v_1 t}{4,5}, \frac{2}{t} = \frac{t}{4,5}, t^2 = 9, t = 3.$$

Тогда время движения легкового автомобиля 5 ч ($3+2=5$), время движения грузового автомобиля 7,5 ч ($3+4,5=7,5$).

Ответ: 5 ч; 7,5 ч.

9.4 При каких a неравенство

$$\frac{x^2 + (2a - 1)x + 8 - 9a}{2x^2 - 3x + 3} \leq 1$$

выполняется при всех x .

Решение:

У квадратного трехчлена $2x^2 - 3x + 3$ дискриминант $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 < 0$, это означает, что он положителен при всех x . Следовательно, умножив обе части неравенства

$$\frac{x^2 + (2a - 1)x + 8 - 9a}{2x^2 - 3x + 3} \leq 1$$

на выражение $2x^2 - 3x + 3$, получим равносильное неравенство

$$x^2 + (2a - 1)x + 8 - 9a \leq 2x^2 - 3x + 3.$$

Раскрыв скобки, получим

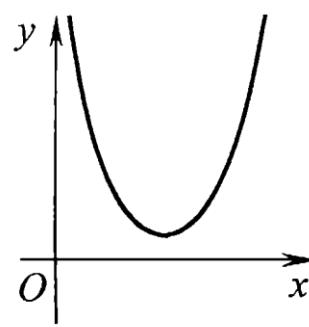
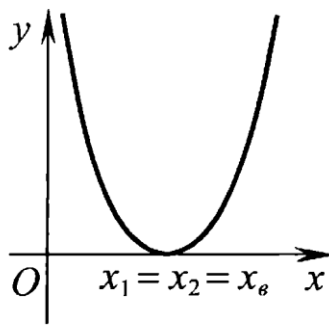
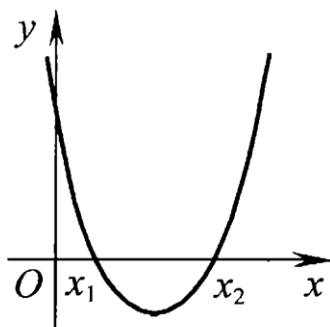
$$x^2 - 2(a + 1)x + 9a - 5 \geq 0.$$

Тогда задача свелась к задаче, при каких a неравенство

$$x^2 - 2(a + 1)x + 9a - 5 \geq 0$$

выполняется при всех x .

Нарисуем график функции $y = x^2 - 2(a + 1)x + 9a - 5$. В зависимости от знака дискриминанта возможны три случая $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$ соответственно



Надо выбрать ту параболу, для которой $y = x^2 - 2(a + 1)x + 9a - 5 \geq 0$. Этому условию удовлетворяют вторая и третья параболы, то есть $D \leq 0$.

$$D = 4(a + 1)^2 - 4 \cdot (9a - 5) = 4a^2 + 8a + 4 - 36a + 20 = 4a^2 - 28a + 24$$

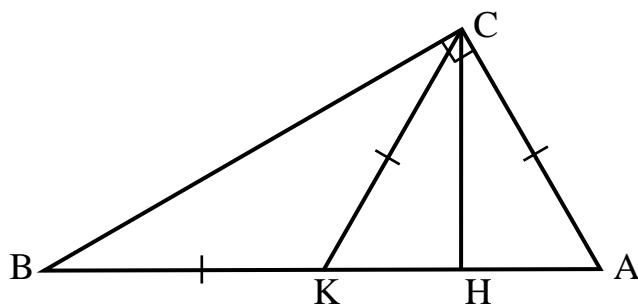
$$4a^2 - 28a + 24 \leq 0,$$

$$a^2 - 7a + 6 \leq 0 \Leftrightarrow a \in [1; 6].$$

Ответ: $a \in [1; 6]$.

9.5 В треугольнике ABC , с прямым углом C , из вершины угла C опущена высота CH , так что $BH - HA = AC$. Найдите углы треугольника.

Решение:



Пусть ABC – прямоугольный треугольник с прямым углом C и CH – высота. На отрезке BH отметим точку K , такую, что $AH = HK$. Из условия задачи следует, что $KB = AC = CK$. Поэтому $\angle CAB = \angle AKC$, а также $\angle ABC = \angle BCK$.

Пусть $\angle ABC = \angle BCK = \alpha$. Рассматривая треугольник ВКС, можем записать: $\angle BKC = 180^\circ - 2\alpha$. С другой стороны, $\angle BKC$ и $\angle AKC$ являются смежными. Поэтому $\angle AKC = 2\alpha$.

Поскольку треугольник ABC – прямоугольный, имеем: $\alpha + 2\alpha = 90^\circ$, откуда получаем: $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$.

Ответ: $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$.