

9 класс

9.1 Упростите выражение

$$(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) : \frac{a + b - c}{a + b + c}.$$

Результат вычислите при $a = 8,6$; $b = \sqrt{3}$; $c = 3\frac{1}{3}$.

Решение:

Используя формулы сокращенного умножения, получим

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) : \frac{a + b - c}{a + b + c} &= (a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)) : \frac{a + b - c}{a + b + c} = \\ &= (a^2 - (b - c)^2) : \frac{a + b - c}{a + b + c} = \frac{(a - b + c)(a + b - c)(a + b + c)}{(a + b - c)} = \\ &= (a - b + c)(a + b + c) = ((a + c) - b)((a + c) + b) = (a + c)^2 - b^2 \end{aligned}$$

При $a = 8,6$; $b = \sqrt{3}$; $c = 3\frac{1}{3}$ выражение $(a + c)^2 - b^2 = 139\frac{91}{225}$.

Ответ: $139\frac{91}{225}$.

9.2 Грю решил продать остатки бананов и печенья. У него есть коробка, в которую помещается 200 кг бананов или 40 кг печенья, а сама коробка ничего не весит. За один раз он может увезти в этой коробке 100 кг. Один килограмм печенья в магазине стоит 60 руб, а один килограмм бананов – 20 руб. Какое наибольшее количество денег может получить Грю за одну поездку?

Решение:

Первый способ. Предположим, Грю взял x кг бананов и y кг печенья. В этом случае он сможет получить $20x + 60y$ рублей. Грю может увезти не более 100 кг, то $x + y \leq 100$. 1 кг бананов занимает $\frac{1}{200}$, а 1 кг печенья – $\frac{1}{40}$ часть коробки. Значит, $\frac{x}{200} + \frac{y}{40} \leq 1$ или $x + 5y \leq 200$. Сложив неравенства $x + y \leq 100$ и $x + 5y \leq 200$ и умножив на 10, получим: $20x + 60y \leq 3000$. Следовательно, Грю сможет получить не более 3000 рублей. Осталось показать, что Грю сможет унести бананы и печенья на эту сумму. Для этого необходимо и достаточно, чтобы в неравенствах $x + y \leq 100$ и $x + 5y \leq 200$ были выполнены равенства. Решив соответствующую систему уравнений, найдём $x = 75$, $y = 25$. Это значит, что Грю сможет получить 3000 рублей, взяв 75 кг бананов и 25 кг печенья.

Второй способ. Вначале заметим, что 5 кг бананов имеют тот же объем, что и 1 кг печенья, но стоят дороже. Докажем, что:

1) Грю может получить 3000 рублей. Действительно в коробку входит 40кг печенья. Если мы заменим 15кг печенья на 75кг бананов, то объем коробки останется прежним, а стоимость его будет равна 3000 рублей.

2) Докажем теперь, что 3000 рублей – это наибольшая сумма, которую можно выручить. Если из коробки содержащей 25кг печенья и 75кг бананов убрать еще печенья, то заменить их будет можно таким же количеством бананов (чтобы не было превышения в весе) и общая стоимость уменьшится, так как печенья стоят дороже. Если же убрать часть бананов, то общая стоимость уменьшится, так как вес взятого вместо него печенья будет в пять раз меньше (иначе – превышение по объему). Например, если взять $5x$ кг бананов и заменить их на x кг печенья, то стоимость уменьшится на $40x$ рублей.

Ответ: 3000 рублей.

9.3 При каких значениях m квадратный трехчлен

$$mx^2 + (m-1)x + m - 1$$

принимает лишь отрицательные значения?

Решение:

Из свойств квадратного трехчлена следует, что он принимает только отрицательные значения, если его коэффициент при старшем члене отрицателен, а дискриминант меньше нуля.

Имеем

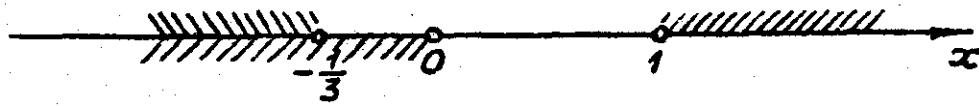
$$\begin{cases} m < 0, \\ (m-1)^2 - 4m(m-1) < 0. \end{cases}$$

Решим эту систему

$$\begin{cases} m < 0, \\ m^2 - 2m + 1 - 4m^2 + 4m < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m < 0, \\ 3m^2 - 2m - 1 > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m < 0, \\ (m-1)(3m+1) > 0. \end{cases}$$



Отсюда следует, что $m < -\frac{1}{3}$.

Ответ: $m \in (-\infty; -\frac{1}{3})$.

9.4 Известно, что числа k и $k + 15$ простые. Найдите все такие k .

Решение:

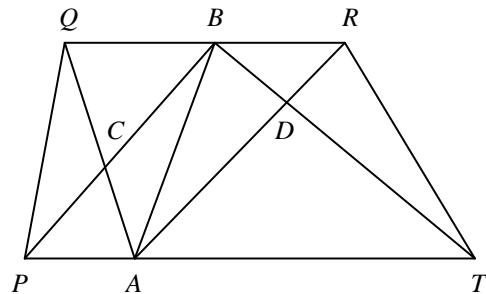
При $k = 2$ получаем, что число $k + 15 = 17$ простое.

Пусть $k > 2$. Тогда k нечетно. Следовательно, число $k + 15$ четно. Отсюда это число составное. Значит, никакое простое $k > 2$ не подходит.

Ответ: 2.

9.5 В трапеции $PQRT$ на основаниях PT и QR взяты точки A и B соответственно. Отрезки AQ и BP пересекаются в точке C , а отрезки BT и AR – в точке D . Площади треугольников PQC и DRT равны 6 см^2 и 8 см^2 соответственно. Найдите площадь четырехугольника $ACBD$.

Решение:



Имеем, $S_{\Delta PQA} = S_{\Delta PBA}$, так как они имеют общее основание PA и равные высоты, совпадающие с расстоянием между параллельными прямыми PT и QR . $S_{\Delta PQC} = S_{\Delta PQA} - S_{\Delta PCA} = S_{\Delta PBA} - S_{\Delta PCA} = S_{\Delta BCA}$. Аналогично, $S_{\Delta BDA} = S_{\Delta DRT}$. Таким образом, сумма площадей треугольников ΔBCA и ΔBDA равна площади четырёхугольника $ACBD$ и равна $6 + 8 = 14$.

Ответ: 14.