9 класс

9.1 Является ли разность $\underbrace{111...111}_{2017\,единиц}\underbrace{222...222}_{2017\,двоек}-\underbrace{333...333}_{2017\,троек}$ квадратом натурального числа? Если является, то укажите это число.

Решение:

$$\underbrace{111...111}_{2017\,единиц}\underbrace{222...222}_{2017\,двоек}-\underbrace{333...333}_{2017\,троек}=\underbrace{111...111}_{2017\,единиц}\underbrace{000...000}_{2017\,нулей}+\underbrace{222...222}_{2017\,двоек}-\underbrace{333...333}_{2017\,троек}=$$

$$=\underbrace{111...111}_{2017\,единиц}\cdot(10^{2017}+2-3)=\underbrace{111...111}_{2017\,единиц}\cdot(10^{2017}-1)=\underbrace{111...111}_{2017\,единиц}\cdot\underbrace{999...999}_{2017\,девяток}=$$

$$=\underbrace{111...111}_{2017\,единиц}\cdot 9\cdot\underbrace{111...111}_{2017\,единиц}=9\cdot\underbrace{111...111}_{2017\,единиц}{}^2=\underbrace{333...333}_{2017\,троек}{}^2.$$

Ответ: $\underbrace{333...333}_{2017\,троек}{}^2$.

9.2 Существуют ли целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению

$$2x^2-5y^2=7.$$

Решение (основано на свойствах делимости):

Число 7 – простое нечетное число, являющееся разностью двух чисел, поэтому эти числа разной четности, но $2x^2$ - четное, тогда $5y^2$ - нечетное.

$5y^2$ - нечетное, 5 – нечетное $\Rightarrow y^2$ - нечетное $\Rightarrow y$ – нечетное $\Rightarrow y=2m+1$

$y^2=4m^2+4m+1$, тогда $5y^2=20m^2+20m+5$, подставим это в уравнение.

Получаем $2x^2-20m^2-20m-5=7\Rightarrow x^2-10m^2-10m=6.$

Так как числа $10m^2, 10m$ – четные, и разность $x^2-10m^2-10m=6$ тоже четное, то x^2 – четное число $\Rightarrow x=2n\Rightarrow x^2=4n^2$.

Тогда получим уравнение $4n^2-10m^2-10m=6\Rightarrow 2n^2-5m^2-5m=3\Rightarrow$

$\Rightarrow 2n^2-5m(m+1)=3$. Так как $2n^2$ – четное, $m(m+1)$ – четное, как произведение последовательных целых чисел, тогда $2n^2-5m(m+1)$ – четное $\Rightarrow 2n^2-5m(m+1)\neq 3$ ни при каких целых m и $n\Rightarrow 2x^2-5y^2=7$ решений в целых числах не имеет.

Ответ: не существует.

9.3 При каких a неравенство $(4-a^2)x^2+(a+2)x-1\le 0$ выполняется для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|\ge 3$?

Решение:

Решая неравенство $|x|\ge 3$, получаем $x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. Итак, нам надо найти все значения а,при которых неравенство $(4-a^2)x^2+(a+2)x-1\le 0$ будет выполняться для всех x из указанного множества. Т.к. в этой задаче коэффициент при x^2 зависит от параметра, то необходимо разобрать три случая: $4-a^2=0$;
$4-a^2>0$ и $4-a^2<0$.

Случай 1.

$4-a^2=0;\leftrightarrow a=\pm 2$.

При $a=-2$ неравенство (*) принимает вид: $0\cdot x^2+0\cdot x-1\le 0,\quad -1\le 0$. Его решениями будут $x\in(-\infty:+\infty)$. Следовательно $a=-2$ удовлетворяет условию задачи.

При $a=2$ неравенство (*) принимает вид: $0\cdot x^2+4x-1\le 0,\quad x\le\dfrac{1}{4}$.

То есть наше неравенство выполняется только для $x\le\dfrac{1}{4}$, следовательно $a=2$ условию задачи не удовлетворяет.

Случай 2.

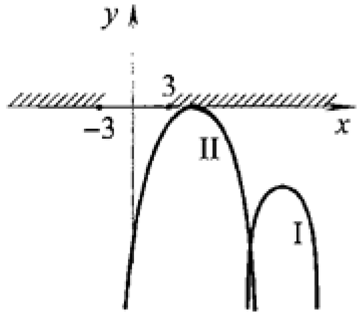
$4-a^2>0$;

Решением неравенства (*) будет либо пустое множество, либо точка, либо промежуток $[x_1;x_2]$. Ни в одном из этих случаев неравенство не будет выполняться для всех $x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$, следовательно, случай 2 нам не подходит.

Случай 3.

$4-a^2<0$.

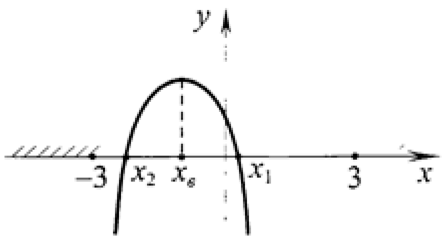
Тогда ветви параболы $y=(4-a^2)x^2+(a+2)x-1$ направлены вниз.
а) если парабола находится под осью *Ox*(I) или касается ее (II) (рис.3). Такие параболы нам подходят. Следовательно, имеем



$$\begin{cases} 4-a^2<0 \\ D\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4>0 \\ D=(a+2)^2-4(4-a^2)(-1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$a\in(-\infty;-2)\cup\left[\frac{10}{3};+\infty\right).$$

б) Если парабола $y=(4-a^2)x^2+(a+2)x-1$ пересекает ось Ox в двух точках, то нам подходит только случай, изображенный на рисунке 4, когда корни трехчлена находятся между числами 3 и -3 (возможно совпадая с ними).



Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 4-a^2<0 \\ D>0 \\ -3<x<3 \\ y(-3)\le 0 \\ y(3)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4>0 \\ D=(a+2)^2-4(4-a^2)(-1)>0 \\ -3<-\dfrac{a+2}{2(4-a^2)}<3 \\ y(-3)=(4-a^2)(-3)^2+(a+2)(-3)-1\le 0 \\ y(3)=(4-a^2)3^2+(a+2)3-1\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

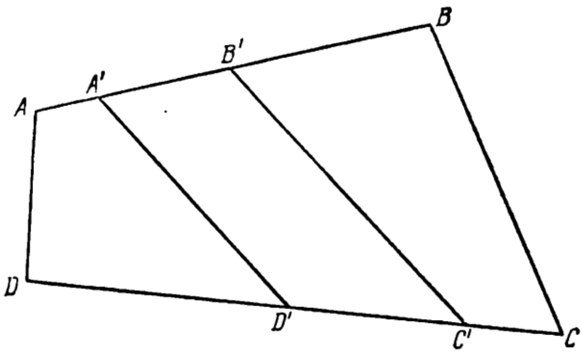
$$\Leftrightarrow a\in\left[\frac{1+\sqrt{165}}{6};\frac{10}{3}\right).$$

Собирая все найденные решения, получаем:

$$a\in(-\infty;-2]\cup\left[\frac{1+\sqrt{165}}{6};+\infty\right).$$

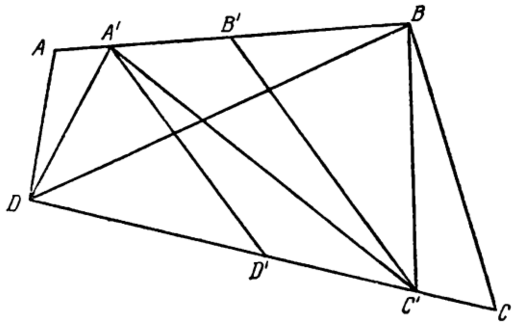
Ответ: $a\in(-\infty;-2]\cup\left[\frac{1+\sqrt{165}}{6};+\infty\right)$.

9.4 Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ площадью 1. На сторонах AB и CD отмечены точки A', B', C', D' так, что $\frac{AA'}{AB} = \frac{CC'}{CD} = a,\ \frac{BB'}{AB} = \frac{DD'}{CD} = b,$ где $a + b < 1$ (см. рис.). Определите площадь четырехугольника $A'B'C'D'$.



Решение:

$$S_{DA'BC'} = S_{\Delta DA'B} + S_{\Delta BC'D} = \frac{1}{2} A'B \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2} DC' \cdot h_{DC'}$$



$$S_{ABCD} = S_{\Delta DAB} + S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} AB \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2} DC \cdot h_{DC'}.$$

Из условия $\frac{AA'}{AB} = \frac{CC'}{CD} = a,$ получаем, что

$$AB = \frac{AA'}{a} = \frac{AB - A'B}{a},\ a \cdot AB = AB - A'B,\ A'B = AB(1-a),$$

$$CD = \frac{CC'}{a} = \frac{CD - C'D}{a},\ a \cdot CD = CD - C'D,\ C'D = CD(1-a).$$

$$\frac{S_{DA'BC'}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} A'B \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2} DC' \cdot h_{DC'}}{\frac{1}{2} AB \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2} DC \cdot h_{DC'}} = \frac{\frac{1}{2} AB(1-a) \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2} CD(1-a) \cdot h_{DC'}}{\frac{1}{2} AB \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2} DC \cdot h_{DC'}} =$$

$$= \frac{(1-a)\left(\frac{1}{2} AB \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2} CD \cdot h_{DC'}\right)}{\frac{1}{2} AB \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2} DC \cdot h_{DC'}} = 1 - a.$$

$$S_{A'B'C'D'} = S_{\Delta D'A'C'} + S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2} A'B' \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2} D'C' \cdot h_{DC'},$$

$$S_{DA'BC'} = S_{\Delta A'BC'} + S_{\Delta DA'C'} = \frac{1}{2} A'B \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2} DC' \cdot h_{DC'}.$$

Из условия $\dfrac{AA'}{AB} = \dfrac{CC'}{CD} = a,\ \dfrac{BB'}{AB} = \dfrac{DD'}{CD} = b$ получаем, что

$A'B' = AB - AA' - BB' = AB - aAB - bAB = AB(1-a-b),$

$D'C' = CD - DD' - CC' = CD - aCD - bCD = CD(1-a-b).$

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{DA'BC'}} = \frac{\frac{1}{2} A'B' \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2} D'C' \cdot h_{DC'}}{\frac{1}{2} A'B \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2} DC' \cdot h_{DC'}} = \frac{\frac{1}{2} AB(1-a-b) \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2} CD(1-a-b) \cdot h_{DC'}}{\frac{1}{2} AB(1-a) \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2} DC(1-a) \cdot h_{DC'}} =$$

$$= \frac{(1-a-b)\left(\frac{1}{2} AB \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2} CD \cdot h_{DC'}\right)}{(1-a)\left(\frac{1}{2} AB \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2} DC \cdot h_{DC'}\right)} = \frac{1-a-b}{1-a}.$$

Тогда $S_{A'B'C'D'} = \dfrac{1-a-b}{1-a} S_{DA'BC'} = \dfrac{1-a-b}{1-a}(1-a) S_{ABCD} = 1-(a+b).$

Ответ. $S_{A'B'C'D'} = 1-(a+b).$

9.5 В шахматном турнире участвовало два ученика 8 класса и несколько учеников 9 класса. Каждый играл с каждым другим ровно один раз. Два восьмиклассника набрали вместе 8 очков, а все девятиклассники набрали поровну очков. Сколько девятиклассников участвовало в турнире? (При игре за победу дается 1 очко, за ничью $\frac{1}{2}$, за проигрыш 0 очков)

Решение:

Пусть n – число девятиклассников, m – число очков, набранных каждым из них. Всего очков в турнире набрано $mn+8$. С другой стороны, $n+2$ участника сыграют $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ партий и наберут столько же очков. Откуда

$$mn + 8 = \frac{(n+2)(n+1)}{2},$$

$$2mn + 16 = n^2 + 3n + 2,\ \ n^2 + 3n - 2mn = 14,$$

$$n(n + 3 - 2m) = 14.$$

Т.к. n и $2m$ целые числа, то n – или 1,или 2, или 7, или 14. Если n = 1 или n = 2, то два восьмиклассника не смогут набрать 8 очков. Итак, n = 7 или n = 14.

Ответ: n = 7 или n = 14.