8 класс

8.1 Не выполняя действий умножения и возведения в степень, сравните числа $923654781 \cdot 923654783$ и 923654782^2 .

Решение:
Обозначим число 923654782 через x. Тогда левое выражение превратится в $(x-1)(x+1) = x^2 - 1 < x^2$.
Таким образом, $923654781 \cdot 923654783 < 9236547822^2$.

Ответ: $923654781 \cdot 923654783 < 9236547822^2$.

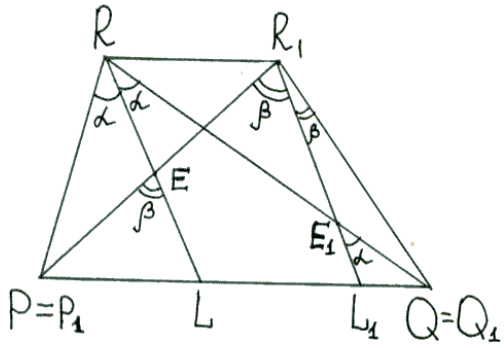
8.2 В ресторане «Макдональдс» не менее 93,5% и не более 94,5% занятых столиков. Какое наименьшее количество столиков удовлетворяют этому условию.

Решение:
Так как хотя бы один столик свободен, то меньше всего свободных столиков будет в ресторане, где свободен только один столик. Поскольку свободных столиков не более 6,5% от общего числа столиков, то всего в ресторане не менее $1:0{,}065 = 15\frac{1}{40}$ столиков, то есть не менее 16 столиков. Ресторан из 16 столиков, среди которых ровно один свободен, удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 16 столиков в ресторане, из них 15 столиков заняты, 1 – свободен.

8.3 В двух треугольниках PQR и $P_1Q_1R_1$ проведены биссектрисы RL и R_1L_1 ($L \in PQ, L_1 \in P_1Q_1$). Известно, что площадь треугольника $P_1Q_1R_1$ равна 56, $PQ = P_1Q_1$, $R_1L_1 = RL$, $\angle PLR = \angle P_1L_1R_1$. Найдите площадь треугольника PQR.

Решение:
Расположим данные треугольники так, чтобы отрезки PQ и P_1Q_1 совпадали, а сами треугольники лежали в одной полуплоскости относительно прямой PQ.



Предположим, $\Delta PQR \neq \Delta P_1Q_1R_1$. Тогда их вершины R и R_1 различны. Если $R_1 \notin RL$, то $R_1L_1 \| RL$, так как $\angle PLR = \angle P_1L_1R_1$. Следовательно, $\angle LRQ = \angle L_1E_1Q = \alpha$ и $\angle PEL = \angle L_1R_1P = \beta$. Так как RL и R_1L_1 биссектрисы, то $\angle PRL = \alpha$, $\angle QR_1L_1 = \beta$. Применяя к ΔPER и ΔQE_1R_1 теорему о внешнем угле треугольника, получаем $\beta > \alpha$ и $\alpha > \beta$. Эти неравенства противоречат друг другу, следовательно прямые RL и R_1L_1 совпадают, тогда точки R и R_1 совпадают. Следовательно, $\Delta PQR = \Delta P_1Q_1R_1$ и площадь треугольника PQR равна 56.

Ответ: 56**.**

8.4 Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу из двух населенных пунктов P, Q и встретились в 36 км от Q. Прибыв в пункты P и Q, автомобили сразу же повернули назад и встретились вновь в 18 км от P. Сколько километров между P и Q?

Решение:

Пусть расстояние между населенными пунктами P и Q равно S км, v_1км/ч – скорость автомобиля, выехавшего из P, v_2км/ч – скорость автомобиля, выехавшего из Q. До первой встречи автомобили проехали соответственно пути $(S-36)$ км и 36 км, затратив на это одно и то же время

$$\frac{S-36}{v_1} = \frac{36}{v_2}.$$

От первой до второй встречи они проехали соответственно пути $36 \text{ км} + (S-18) \text{ км} = (S+18)\text{км}$ и $(S-36) \text{ км} + 18 \text{ км} = (S-18)\text{км}$ также за одно время

$$\frac{S+18}{v_1} = \frac{S-18}{v_2}.$$

Разделив почленно эти уравнения, получим

$$\frac{S-36}{S+18} = \frac{36}{S-18}, S^2 - 90S = 0, S(S-90) = 0, S = 90.$$

Ответ: 90 км.

8.5 При каких значениях параметров a и b уравнение

$$(2a - b + 1)x + 2a + b - 3 = 0$$

имеет не менее двух различных решений?

<u>Решение:</u>
Относительно множества решений любого линейного уравнения возможны лишь следующие случаи: решение единственно, нет решений и множество решений совпадает с множеством **R**, поэтому если линейное уравнение имеет не менее двух различных решений, то обязательно множество решений уравнения совпадает с **R**. Это возможно тогда и только тогда, когда коэффициент при x и свободный член уравнения одновременно равны 0, т.е.

$$\begin{cases} 2a - b + 1 = 0, \\ 2a + b - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = -1, \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2, \\ b = 2. \end{cases}$$

Ответ: при $a = 1/2$ и $b = 2$.