

8 класс

8.1 Вычислите

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \ddots + \frac{1}{2020}}}}}} + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \ddots + \frac{1}{2020}}}}}.$$

Решение:

В каждой из дробей обозначим через x ту часть, которая записывается так

$$x = \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \ddots + \frac{1}{2020}}}}.$$

Тогда получим

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} + \frac{1}{2+x} = \frac{1+x}{2+x} + \frac{1}{2+x} = 1.$$

Ответ: 1.

8.2 Петя увидел два двузначных числа, начинающиеся с цифры 6, на стекле магазина, а остальные цифры этих чисел не равны 6. Он заметил, что произведения увиденных двузначных чисел не меняются, если записать их наоборот. Какие числа были написаны на стекле?

Решение:

Пусть цифры единиц задуманных двузначных чисел x и y , причем $x \neq 6, y \neq 6$.

По условию $\overline{6x} \cdot \overline{6y} = \overline{x6} \cdot \overline{y6}$, т. е, имеем уравнение

$$(6 \cdot 10 + x)(6 \cdot 10 + y) = (10x + 6)(10y + 6).$$

Решая это уравнение, получим

$$\begin{aligned} 36 \cdot 100 + 60x + 60y + xy &= 100xy + 60x + 60y + 36, \\ 99xy &= 36 \cdot 99, \quad xy = 36. \end{aligned}$$

Учитывая, что x и y – натуральные числа, меньшие 10 (x и y – цифры) и не равные по условию 6, получаем $x = 9$, $y = 4$ или $x = 4$, $y = 9$. На стекле магазина были написаны числа 69 и 64.

Ответ: 69 и 64.

8.3 Решите уравнение

$$\frac{x}{5a+x} - \frac{5a+x}{x-5a} = \frac{100a^2}{25a^2 - x^2}.$$

Решение:

По смыслу задачи $(5a+x)(5a-x) \neq 0$, то есть $x \neq \pm 5a$.

Умножив обе части уравнения на произведение $(5a+x)(5a-x)$, получим уравнение

$$\begin{aligned} x(5a-x) + (5a+x)^2 &= 100a^2, \\ 5ax - x^2 + 25a^2 + 10ax + x^2 &= 100a^2, \\ 15ax &= 75a^2, \\ ax &= 5a^2. \end{aligned}$$

При $a = 0$ уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$, решением которого будет любое число, кроме нуля (так как $x \neq \pm 5a$).

При $a \neq 0$ уравнение примет вид $x = 5a$. Этот корень попадает под ограничение $x \neq \pm 5a$.

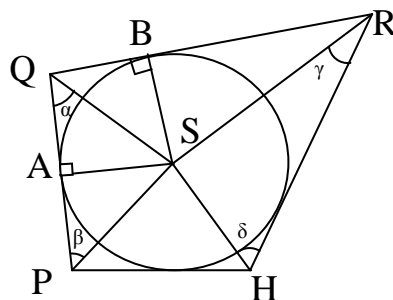


Ответ: при $a = 0$ уравнение имеет бесконечно много решений: все действительные числа, кроме нуля; при любом $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ решений нет.

8.4 Четырехугольник $PQRH$ описан около окружности с центром S , угол PSQ равен 85° . Найдите угол RSH .

Решение:

Так как AS , BS – радиусы, проведенные в точку касания, то $\triangle QBS$ и $\triangle QAS$ – прямоугольные и равные ($AS = BS, QA = QB$ (отрезки касательных, проведенных из одной точки)). Тогда $\angle AQS = \angle SBQ = \alpha$. Аналогично $\angle APS = \angle SPH = \beta$, $\angle PHS = \angle SHR = \delta$, $\angle BRS = \angle SRH = \gamma$.



$$\angle PSQ = 180^\circ - \alpha - \beta, \quad \angle RSH = 180^\circ - \delta - \gamma.$$

Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360° , то

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{1}{2}(\angle P + \angle Q + \angle R + \angle H) = 180^\circ.$$

Из этого следует, что $\angle PSQ + \angle RSH = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 180^\circ$, тогда $\angle RSH = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$.

Ответ: 95° .

8.5 Токарь за смену должен выточить 20 деталей. За каждую качественно изготовленную деталь он получит 800 рублей, за бракованную – штраф 500 рублей, за деталь, которую он не успел сделать, – 0 рублей. Сколько деталей изготовил токарь (качественных и бракованных), если за эту смену он получил 1300 рублей?

Решение:

Пусть x – количество качественно изготовленных деталей, y – бракованных. Тогда $800x - 500y = 1300$ или $8x - 5y = 13$. переписав это уравнение в виде

$$8(x + y) = 13(1 + y)$$

Видно, что число $(x + y)$ делится на 13. С другой стороны, по условию, $(x + y)$ не больше 20. Поэтому $x + y = 13$, если $x = 6, y = 7$.

Ответ: 13 деталей.