8 класс

8.1 Сумма цифр двузначного числа равна 6. Если к этому числу прибавить 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

Решение:
Пусть x – число десятков искомого числа, y – число единиц. Тогда искомое число можно записать в виде $10x + y$. В этих предположениях задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ 10x + y + 18 = 10y + x. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $x = 2$, $y = 4$.

Ответ: 24.

8.2 Вычислите

$$\frac{0{,}23(7) + \frac{43}{450}}{0{,}5(61) - \frac{113}{495}}.$$

Решение:
Представим бесконечные периодические дроби в виде обыкновенных дробей.
Для трансформации бесконечной дроби в обыкновенную потребуется:
1) посчитать, сколько цифр в периоде;
2) посчитать, сколько цифр после запятой, но до периода;
3) записать натуральным числом все цифры после запятой, включая период;
4) записать натуральным числом все цифры после запятой до периода;
5) записать разность этих двух натуральных чисел;
6) разделить эту разность на число, в котором столько девяток, сколько цифр в периоде нашей дроби и столько нулей, сколько цифр до периода. Полученную дробь сократить – это дробная часть числа;
7) не забыть про целую часть числа. Ее надо добавить к полученной дробной части.
Получаем:

$$0{,}23(7) = \frac{237 - 23}{900} = \frac{214}{900} = \frac{107}{450}.$$

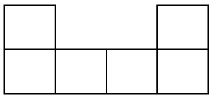
$$0{,}5(61) = \frac{561 - 5}{990} = \frac{556}{990} = \frac{278}{495}.$$

Подставим полученные дроби в исходное выражение

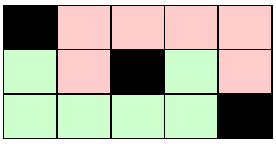
$$\frac{\frac{107}{450}+\frac{43}{450}}{\frac{278}{495}-\frac{113}{495}}=\frac{\frac{150}{450}}{\frac{165}{495}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=1\,.$$

Ответ: 1.

8.3 Клетчатый прямоугольник разрезали по линиям сетки на шестиклеточные фигуры и нечетное число клеточек. Какое наименьшее число отдельных клеточек могло при этом оказаться? (Шестиклеточные фигуры выглядят так, как на рисунке, их можно поворачивать)



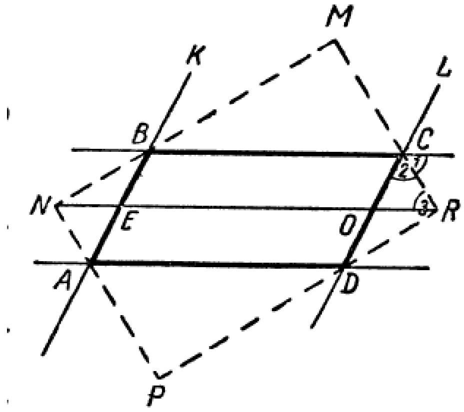
<u>Решение:</u>
Так как шестиклеточная фигура имеет площадь клеточек, а количество отдельных клеточек нечетно, то площадь прямоугольника должна быть нечетной, то есть обе стороны прямоугольника – нечетные. Шестиклеточная фигура может примыкать к стороне прямоугольника либо двумя клетками, либо четырьмя, но одна клеточка не может сделать все стороны прямоугольника (которые по длине не короче 3) нечетными, так как одна клетка не может примыкать ко всем четырем сторонам. Следовательно, клеточек по крайней мере 3. Пример для трех клеточек (прямоугольник 3×5) показан на рисунке.



Ответ: 3.

8.4 Докажите, что биссектрисы внешних углов параллелограмма при пересечении образуют прямоугольник, диагональ которого равна сумме двух соседних сторон параллелограмма.

Решение:



$\angle KBC + \angle LCB = 180^o$ (односторонние углы при $KB \parallel CL$ и секущей BC).

$\frac{1}{2}\angle KBC + \frac{1}{2}\angle LCB = 90^o$, т.е. $\angle MCB + \angle MBC = 90^o$, значит, в ΔBMC $\angle M = 90^o$.

Аналогично можем показать, что $\angle N = \angle P = \angle R = 90^o$, т.е. $NMRP$ – прямоугольник. $\angle 1 = \angle 2$ (CR – биссектриса внешнего угла параллелограмма). $\angle 1 = \angle 3$ (внутренние накрест лежащие углы). Значит $\angle 2 = \angle 3$, т.е. $OR = OC = OD = \frac{1}{2}CD$. Аналогично покажем, что $NE = EB = AE = \frac{1}{2}AB$.

Отсюда $NR = NE + EO + OR = BE + BC + OC = BC + AB$.

Доказано.

8.5 При всех a решите уравнение

$$\frac{3}{4}ax + 3a = x + 4.$$

Решение:

Запишем уравнения в стандартном виде

$$\left(\frac{3}{4}a - 1\right)x = 4 - 3a.$$

Схема исследования:

1) $\frac{3}{4}a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$. Тогда уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0$. это равенство верно при любом x. Следовательно, решением уравнения будет все множество действительных чисел $x \in R$.
2) $\frac{3}{4}a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{4}{3}$. Тогда

$$x = \frac{4 - 3a}{\frac{3}{4}a - 1} = -4.$$

Ответ: если $a = \frac{4}{3}$, то $x \in R$, если $a \neq \frac{4}{3}$, то $x = -4$.