

8 класс

8.1 Найдите цифры X , Y , Z , если $XY \cdot XY = XZZ$.

Решение:

Произведение $XY \cdot XY$ начинается той же цифрой X , что и число XY , это возможно только при $X = 1$. Если произведение оканчивается двумя одинаковыми цифрами, то это возможно в двух случаях: $10 \cdot 10 = 100$, $12 \cdot 12 = 144$. Но первый вариант отпадает, так как тогда $Y = Z = 0$, а разные буквы должны обозначать разные цифры.

Ответ: $X=1$, $Y=2$, $Z=4$.

8.2 В супермаркете цены на огурцы летом уменьшились на 25%, затем осенью увеличились на 20%, затем действовала скидка на 10%, а за весну подорожали на 20%. В итоге цена на огурцы уменьшилась или увеличилась? На сколько процентов?

Решение:

Пусть a – первоначальная цена, тогда через год она будет равна:

$$a \cdot 0,75 \cdot 1,2 \cdot 0,9 \cdot 1,2 = 0,972a,$$

что меньше чем a .

Таким образом, огурцы подешевели на $(100 - 97,2)\% = 2,8\%$.

Ответ: цена уменьшилась на 2,8%.

8.3 Решите уравнение $511x^3 - 3x^2 - 3x = 1$.

Решение:

$$511x^3 - 3x^2 - 3x = 1,$$

$$512x^3 - x^3 - 3x^2 - 3x = 1,$$

$$512x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,$$

$$512x^3 = (x + 1)^3,$$

$$(8x)^3 = (x + 1)^3,$$

$$8x = x + 1,$$

$$x = \frac{1}{7}.$$

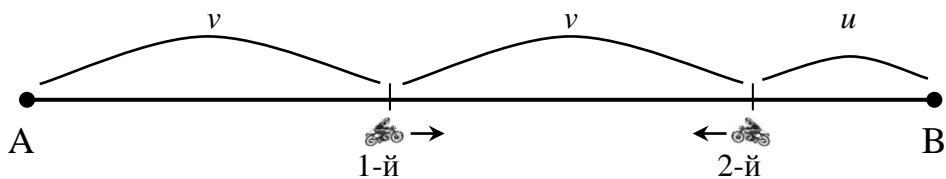
Ответ: $x = \frac{1}{7}$.

8.4 В 12.00 из пункта A в пункт B выехал первый мотоциclist. Одновременно из B в A по той же дороге выехал второй мотоциclist. Через час первый находился на полпути от A до второго. Когда он окажется на полпути от второго до B ? (Скорости мотоцилистов постоянны и отличаются менее чем вдвое.)

Решение:

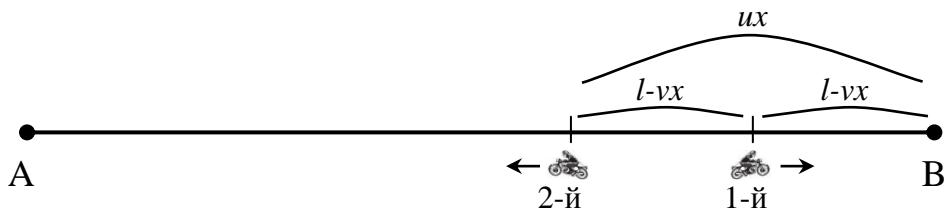
Пусть скорость первого мотоциклиста v , а второго – u , а расстояние AB равно l . Тогда в 13.00 (или через один час после старта) мотоциклисты находятся на расстояниях v и $l - u$ от A , то есть $2v = l - u$.

Состояние системы в 13.00 можно представить с помощью следующего рисунка.



Пусть через x часов после старта первый мотоциclist будет на полпути от B до второго. Тогда расстояния от мотоциклистов до пункта B будут равны: для первого $l - xv$, для второго xu , то есть $l - xv = xu$.

Через x часов после старта система будет находиться в состоянии, представленном на следующем рисунке.



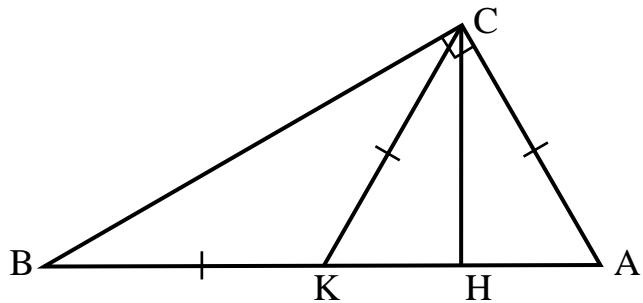
Таким образом, получаем соотношения:

$$\begin{cases} 2v + u = l, \\ xu = 2(l - xv), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v + u = l, \\ x(u + 2v) = 2l, \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 14.00 (через 2 часа после старта).

8.5 В треугольнике ABC , с прямым углом C , из вершины угла C опущена высота CH , так что $BH - HA = AC$. Найдите углы треугольника.

Решение:



Пусть ABC – прямоугольный треугольник с прямым углом C и CH – высота. На отрезке BH отметим точку K , такую, что $AH=HK$. Из условия задачи следует, что $KB=AC=CK$. Поэтому $\angle CAB = \angle AKC$, а также $\angle ABC = \angle BCK$. Пусть $\angle ABC = \angle BCK = \alpha$. Рассматривая треугольник BKC , можем записать: $\angle BKC = 180^\circ - 2\alpha$. С другой стороны, $\angle BKC$ и $\angle AKC$ являются смежными. Поэтому $\angle AKC = 2\alpha$.

Поскольку треугольник ABC – прямоугольный, имеем: $\alpha + 2\alpha = 90^\circ$, откуда получаем: $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$.

Ответ: $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$.