

## 8 класс

**8.1** Найдите цифры  $X, Y, Z$ , если  $XY \cdot XY = XZZ$ .

Решение:

Произведение  $XY \cdot XY$  начинается той же цифрой  $X$ , что и число  $XY$ , это возможно только при  $X = 1$ . Если произведение оканчивается двумя одинаковыми цифрами, то это возможно в двух случаях:  $10 \cdot 10 = 100$ ,  $12 \cdot 12 = 144$ . Но первый вариант отпадает, так как тогда  $Y = Z = 0$ , а разные буквы должны обозначать разные цифры.

**Ответ:**  $X=1, Y=2, Z=4$ .

**8.2** В супермаркете цены на огурцы летом уменьшились на 25%, затем осенью увеличились на 20%, затем действовала скидка на 10%, а за весну подорожали на 20%. В итоге цена на огурцы уменьшилась или увеличилась? На сколько процентов?

Решение:

Пусть  $a$  – первоначальная цена, тогда через год она будет равна:

$$a \cdot 0,75 \cdot 1,2 \cdot 0,9 \cdot 1,2 = 0,972 a,$$

что меньше чем  $a$ .

Таким образом, огурцы подешевели на  $(100 - 97,2)\% = 2,8\%$ .

**Ответ:** цена уменьшилась на 2,8%.

**8.3** Решите уравнение  $511x^3 - 3x^2 - 3x = 1$ .

Решение:

$$\begin{aligned} 511x^3 - 3x^2 - 3x &= 1, \\ 512x^3 - x^3 - 3x^2 - 3x &= 1, \\ 512x^3 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \\ 512x^3 &= (x + 1)^3, \\ (8x)^3 &= (x + 1)^3, \\ 8x &= x + 1, \\ x &= \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

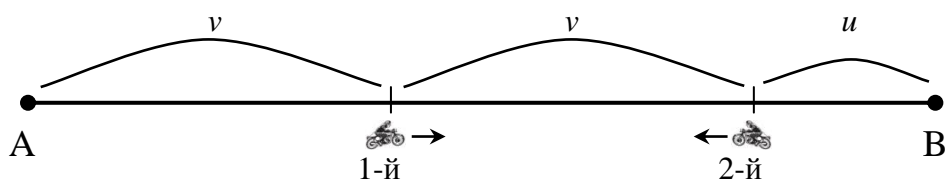
**Ответ:**  $x = \frac{1}{7}$ .

**8.4** В 12.00 из пункта  $A$  в пункт  $B$  выехал первый мотоциклист. Одновременно из  $B$  в  $A$  по той же дороге выехал второй мотоциклист. Через час первый находился на полпути от  $A$  до второго. Когда он окажется на полпути от второго до  $B$ ? (Скорости мотоциклистов постоянны и отличаются менее чем вдвое.)

Решение:

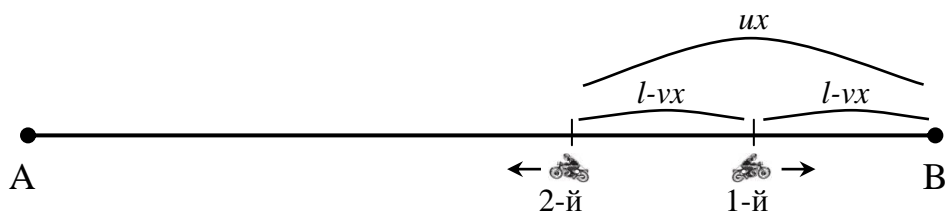
Пусть скорость первого мотоциклиста  $v$ , а второго —  $u$ , а расстояние  $AB$  равно  $l$ . Тогда в 13.00 (или через один час после старта) мотоциклисты находятся на расстояниях  $v$  и  $l - u$  от  $A$ , то есть  $2v = l - u$ .

Состояние системы в 13.00 можно представить с помощью следующего рисунка.



Пусть через  $x$  часов после старта первый мотоциклист будет на полпути от  $B$  до второго. Тогда расстояния от мотоциклистов до пункта  $B$  будут равны: для первого  $l - xv$ , для второго  $xu$ , то есть  $l - xv = xu$ .

Через  $x$  часов после старта система будет находиться в состоянии, представленном на следующем рисунке.



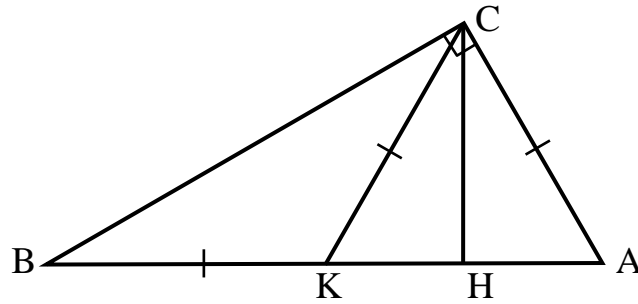
Таким образом, получаем соотношения:

$$\begin{cases} 2v + u = l, \\ xu = 2(l - xv), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v + u = l, \\ x(u + 2v) = 2l, \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

**Ответ:** 14.00 (через 2 часа после старта).

**8.5** В треугольнике  $ABC$ , с прямым углом  $C$ , из вершины угла  $C$  опущена высота  $CH$ , так что  $BH - HA = AC$ . Найдите углы треугольника.

Решение:



Пусть  $ABC$  – прямоугольный треугольник с прямым углом  $C$  и  $CH$  – высота. На отрезке  $BH$  отметим точку  $K$ , такую, что  $AH=HK$ . Из условия задачи следует, что  $KB=AC=CK$ . Поэтому  $\angle CAB = \angle AKC$ , а также  $\angle ABC = \angle BCK$ . Пусть  $\angle ABC = \angle BCK = \alpha$ . Рассматривая треугольник  $BKC$ , можем записать:  $\angle BKC = 180^\circ - 2\alpha$ . С другой стороны,  $\angle BKC$  и  $\angle AKC$  являются смежными. Поэтому  $\angle AKC = 2\alpha$ .

Поскольку треугольник  $ABC$  – прямоугольный, имеем:  $\alpha + 2\alpha = 90^\circ$ , откуда получаем:  $\angle ABC = 30^\circ$ ,  $\angle CAB = 60^\circ$ .

**Ответ:**  $\angle ABC = 30^\circ$ ,  $\angle CAB = 60^\circ$ .