8 класс

8.1 Упростите выражение

$$(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) : \frac{a+b-c}{a+b+c}.$$

Результат вычислите при $a = 8{,}6;\ \ b = \sqrt{3};\ \ c = 3\frac{1}{3}$.

Решение:

Используя формулы сокращенного умножения, получим

$$(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) \div \frac{a+b-c}{a+b+c} = \left(a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)\right) \div \frac{a+b-c}{a+b+c} =$$

$$= (a^2 - (b-c)^2) \div \frac{a+b-c}{a+b+c} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}{(a+b-c)} =$$

$$= (a-b+c)(a+b+c) = ((a+c)-b)((a+c)+b) = (a+c)^2 - b^2$$

При $a = 8{,}6;\ \ b = \sqrt{3};\ \ c = 3\frac{1}{3}$ выражение $(a+c)^2 - b^2 = 139\frac{91}{225}$.

Ответ: $139\frac{91}{225}$.

8.2 Грю решил продать остатки бананов и печенья. У него есть коробка, в которую помещается 200 кг бананов или 40 кг печенья, а сама коробка ничего не весит. За один раз он может увезти в этой коробке 100 кг. Один килограмм печенья в магазине стоит 60 руб, а один килограмм бананов – 20 руб. Какое наибольшее количество денег может получить Грю за одну поездку?

Решение:

Первый способ. Предположим, Грю взял x кг бананов и y кг печенья. В этом случае он сможет получить $20x + 60y$ рублей. Грю может увезти не более 100 кг, то $x + y \le 100$. 1 кг бананов занимает $^1/_{200}$, а 1 кг печенья – $^1/_{40}$ часть коробки. Значит, $^x/_{200} + {}^y/_{40} \le 1$ или $x + 5y \le 200$. Сложив неравенства $x + y \le 100$ и $x + 5y \le 200$ и умножив на 10, получим: $20x + 60y \le 3000$. Следовательно, Грю сможет получить не более 3000 рублей. Осталось показать, что Грю сможет унести бананы и печенья на эту сумму. Для этого необходимо и достаточно, чтобы в неравенствах $x + y \le 100$ и $x + 5y \le 200$ были выполнены равенства. Решив соответствующую систему уравнений, найдём $x = 75$, $y = 25$. Это значит, что Грю сможет получить 3000 рублей, взяв 75 кг бананов и 25 кг печенья.

Второй способ. Вначале заметим, что 5 кг бананов имеют тот же объем, что и 1 кг печенья, но стоят дороже. Докажем, что:

1) Грю может получить 3000 рублей. Действительно в коробку входит 40кг печенья. Если мы заменим 15кг печенья на 75кг бананов, то объем коробки останется прежним, а стоимость его будет равна 3000 рублей.

2) Докажем теперь, что 3000 рублей – это наибольшая сумма, которую можно выручить. Если из коробки содержащей 25кг печенья и 75кг бананов убрать еще печенья, то заменить их будет можно таким же количеством бананов (чтобы не было превышения в весе) и общая стоимость уменьшится, так как печенья стоят дороже. Если же убрать часть бананов, то общая стоимость уменьшится, так как вес взятого вместо него печенья будет в пять раз меньше (иначе – превышение по объему). Например, если взять $5x$ кг бананов и заменить их на x кг печенья, то стоимость уменьшится на $40x$ рублей.

Ответ: 3000 рублей.

8.3 Решите уравнение $(a-4)(a+7)x = (a+3)(a-4)$ при всех значениях параметра a.

Решение:

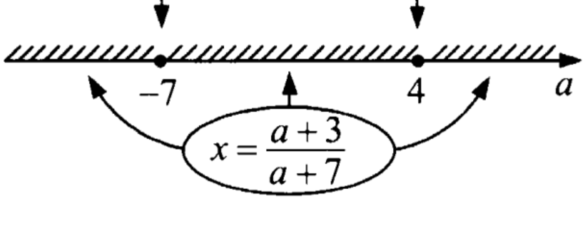
Сразу выделим случаи, когда коэффициент при x равен нулю и из уравнения нельзя найти решение делением обеих частей на этот коэффициент, ведь на ноль делить нельзя.

1) При $a = 4$ уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$, то есть его решением является любое действительное число;
2) При $a = -7$ уравнение примет вид $0 \cdot x = 44$, то есть, в этом случае корней нет;
3) При любом a из объединения промежутков $(-\infty; -7) \cup (-7; 4) \cup (4; +\infty)$ уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{(a+3)(a-4)}{(a-4)(a+7)} = \frac{a+3}{a+7}.$$

Например, $x = 0$ при $a = -3$, $x = \frac{1}{2}$ при $a = 1$ и т.д.

Покажем, как найти x для любого значения параметра a.



Ответ: при $a = 4$ x – любое действительное число; при $a = -7$ корней нет; при всех значениях a из множества $(-\infty; -7) \cup (-7; 4) \cup (4; +\infty)$ $x = \frac{a+3}{a+7}$.

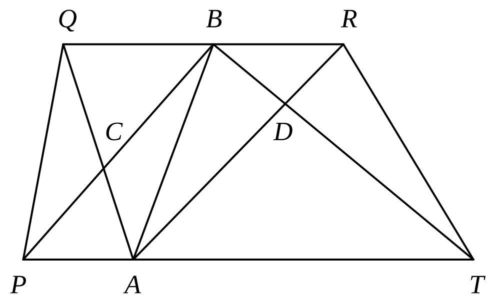
8.4 Дед Мороз решил упаковать подарки по коробкам, чтобы их было удобнее перевозить. Сначала он разложил их по 4 штуки в каждую коробку, потом по 5, затем по 6 и всегда оставался один подарок. Тогда он решил положить в каждую коробку по 7 штук и тогда лишних подарков не осталось. Сколько было подарков, если известно, что их было меньше 400?

<u>Решение:</u>
Задача сводится к отысканию натурального числа, кратного семи, не превосходящего 400, которое при делении на 4, 5 и 6 дает остаток 1. Это число имеет вид $60n + 1$, где 60 – наименьшее общее кратное чисел 4. 5, 6, $n \in N$, $n < 7$. Подбором находим $n = 5$. Следовательно, подарков было 301.

Ответ: 301 подарок.

8.5 В трапеции *PQRT* на основаниях *PT* и *QR* взяты точки *A* и *B* соответственно. Отрезки *AQ* и *BP* пересекаются в точке *C*, а отрезки *BT* и *AR* – в точке *D*. Площади треугольников *PQC* и *DRT* равны 6 см^2 и 8 см^2 соответственно. Найдите площадь четырехугольника *ACBD*.

<u>Решение:</u>



Имеем, $S_{\Delta PQA} = S_{\Delta PBA}$, так как они имеют общее основание *PA* и равные высоты, совпадающие с расстоянием между параллельными прямыми *PT* и *QR*. $S_{\Delta PQC} = S_{\Delta PQA} - S_{\Delta PCA} = S_{\Delta PBA} - S_{\Delta PCA} = S_{\Delta BCA}$. Аналогично, $S_{\Delta BDA} = S_{\Delta DRT}$. Таким образом, сумма площадей треугольников ΔBCA и ΔBDA равна площади четырёхугольника *ACBD* и равна 6 + 8 = 14.

Ответ: 14.