8 класс

8.1 Найдите все решения уравнения $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=1$ во множестве натуральных чисел.

Решение:
Ясно, что ни одно из натуральных чисел *a, b, c, d* не может быть 1. Если хотя бы одно из них будет больше 2, то
$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\le\frac{1}{9}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}<1.$
Остается единственная возможность $a=b=c=d=2$.

Ответ: $a=b=c=d=2$.

8.2 На семи карточках написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Затем карточки перевернули, перемешали и на обратных сторонах написали те же числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Числа, написанные на обеих сторонах каждой карточки, сложили и полученные суммы перемножили. Четно или нечетно полученное произведение? Объясните почему.

Решение:
Допустим, что произведение нечетно. Для этого вес 7 множителей должны быть нечетными. Но тогда у четырех карточек, у которых на одной стороне написаны нечетные числа 1, 3, 5 и 7, на другой стороне должны быть числа четные. Однако четных чисел только три. Следовательно, этот случай невозможен.

Ответ: Четно.

8.3 При каких *a* неравенство $ax+2-\frac{a}{3}>0$ выполняется при всех $x\in(1;2)$?

Решение:
Приведем неравенство к виду $3ax>a-6$.

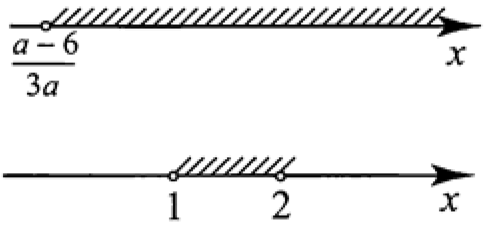


Рис. 1

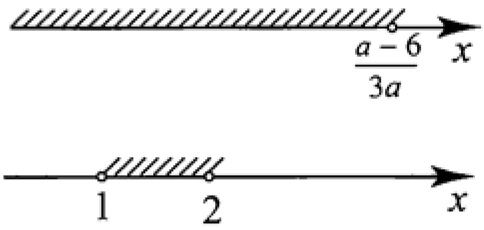


Рис. 2

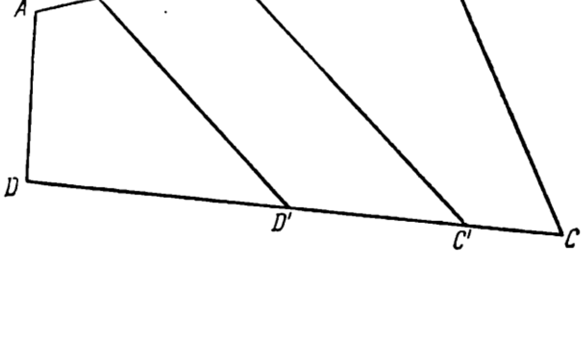
При $a = 0$ неравенство имеет вид $0 \cdot x > -6$. Оно выполняется при все $x \in R$ и, в частности при $x \in (1; 2)$. Следовательно, $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

При $a > 0$ решениями исходного неравенства будут все $x > \frac{a-6}{3a}$. Чтобы оно выполнялось для $x \in (1; 2)$,должно быть $\frac{a-6}{3a} \le 1$ (рис.1). Решая последнее неравенство с учетом $a > 0$,получаем $a \in (0; +\infty)$.

При $a < 0$ решениями будут $x < \frac{a-6}{3a}$. Чтобы исходное неравенство выполнялось при $x \in (1; 2)$ должно быть $\frac{a-6}{3a} \ge 2$ (рис.2). Решая это неравенство, с учетом $a < 0$, получаем, что $a \in [-1{,}2; 0)$. Объединение результатов, полученных в этих трёх случаях, дает ответ.

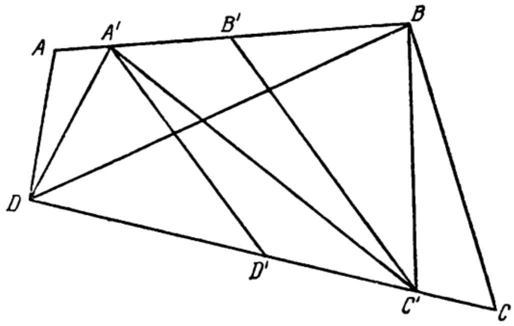
Ответ: $a \in [-1{,}2; 0)$.

8.4 Дан выпуклый четырехугольник *ABCD* площадью 1. На сторонах *AB* и *CD* отмечены точки A', B', C', D' так, что $\frac{AA'}{AB} = \frac{CC'}{CD} = a,\ \frac{BB'}{AB} = \frac{DD'}{CD} = b,$ где $a + b < 1$ (см. рис.). Определите площадь четырехугольника $A'B'C'D'$.



<u>Решение:</u>

$$S_{DA'BC'} = S_{\Delta DA'B} + S_{\Delta BC'D} = \frac{1}{2}A'B \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2}DC' \cdot h_{DC'}$$



$$S_{ABCD} = S_{\Delta DAB} + S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}AB \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2}DC \cdot h_{DC'}.$$

Из условия $\dfrac{AA'}{AB} = \dfrac{CC'}{CD} = a,$ получаем, что

$$AB = \frac{AA'}{a} = \frac{AB - A'B}{a},\ a \cdot AB = AB - A'B,\ A'B = AB(1-a),$$

$$CD = \frac{CC'}{a} = \frac{CD - C'D}{a},\ a \cdot CD = CD - C'D,\ C'D = CD(1-a).$$

$$\frac{S_{DA'BC'}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}A'B \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2}DC' \cdot h_{DC'}}{\frac{1}{2}AB \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2}DC \cdot h_{DC'}} = \frac{\frac{1}{2}AB(1-a) \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2}CD(1-a) \cdot h_{DC'}}{\frac{1}{2}AB \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2}DC \cdot h_{DC'}} =$$

$$= \frac{(1-a)\left(\frac{1}{2}AB \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2}CD \cdot h_{DC'}\right)}{\frac{1}{2}AB \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2}DC \cdot h_{DC'}} = 1-a.$$

$$S_{A'B'C'D'} = S_{\Delta D'A'C'} + S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2}A'B' \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2}D'C' \cdot h_{DC'},$$

$$S_{DA'BC'} = S_{\Delta A'BC'} + S_{\Delta DA'C'} = \frac{1}{2}A'B \cdot h_{A'B} + \frac{1}{2}DC' \cdot h_{DC'}.$$

Из условия $\dfrac{AA'}{AB} = \dfrac{CC'}{CD} = a,\ \dfrac{BB'}{AB} = \dfrac{DD'}{CD} = b$ получаем, что

$A'B' = AB - AA' - BB' = AB - aAB - bAB = AB(1-a-b),$

$D'C' = CD - DD' - CC' = CD - aCD - bCD = CD(1-a-b).$

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{DA'BC'}}=\frac{\frac{1}{2}A'B'\cdot h_{A'B}+\frac{1}{2}D'C'\cdot h_{DC'}}{\frac{1}{2}A'B\cdot h_{A'B}+\frac{1}{2}DC'\cdot h_{DC'}}=\frac{\frac{1}{2}AB(1-a-b)\cdot h_{A'B}+\frac{1}{2}CD(1-a-b)\cdot h_{DC'}}{\frac{1}{2}AB(1-a)\cdot h_{A'B}+\frac{1}{2}DC(1-a)\cdot h_{DC'}}=$$

$$=\frac{(1-a-b)\left(\frac{1}{2}AB\cdot h_{A'B}+\frac{1}{2}CD\cdot h_{DC'}\right)}{(1-a)\left(\frac{1}{2}AB\cdot h_{A'B}+\frac{1}{2}DC\cdot h_{DC'}\right)}=\frac{1-a-b}{1-a}.$$

Тогда $S_{A'B'C'D'}=\frac{1-a-b}{1-a}S_{DA'BC'}=\frac{1-a-b}{1-a}(1-a)S_{ABCD}=1-(a+b).$

Ответ. $S_{A'B'C'D'}=1-(a+b).$

8.5 В шахматном турнире участвовало два ученика 8 класса и несколько учеников 9 класса. Каждый играл с каждым другим ровно один раз. Два восьмиклассника набрали вместе 8 очков, а все девятиклассники набрали поровну очков. Сколько девятиклассников участвовало в турнире? (При игре за победу дается 1 очко, за ничью $\frac{1}{2}$, за проигрыш 0 очков)

<u>Решение:</u>

Пусть n – число девятиклассников, m – число очков, набранных каждым из них. Всего очков в турнире набрано $mn+8$. С другой стороны, $n+2$ участника сыграют $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ партий и наберут столько же очков. Откуда

$$mn+8=\frac{(n+2)(n+1)}{2},$$

$$2mn+16=n^2+3n+2,\ \ n^2+3n-2mn=14,$$

$$n(n+3-2m)=14.$$

Т.к. n и $2m$ целые числа, то n – или 1,или 2, или 7, или 14. Если n = 1 или n = 2, то два восьмиклассника не смогут набрать 8 очков. Итак, n = 7 или n = 14.

Ответ: n = 7 или n = 14.