11 класс

11.1 Докажите, что $2^{12}+5^9$ число составное.

Решение:

Представим сумму в виде суммы кубов.

$$2^{12}+5^9 = (2^4)^3+(5^3)^3 = (16+125)(2^8-16\cdot125+5^6) =$$
$$= 141(2^8-16\cdot125+5^6).$$

Поскольку $2^{12}+5^9 \neq 141$, то 141 – простой делитель данного числа, значит число $2^{12}+5^9$ составное.

Доказано.

11.2 Вычислите $(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{50}})\cdot 9$.

Решение:

Обозначим $x=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}$, тогда

$$x^3=\left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)^3=\left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)^3+$$
$$+3\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)=$$
$$=7-5\sqrt{2}+7+5\sqrt{2}+3\sqrt[3]{\left(7-5\sqrt{2}\right)\left(7+5\sqrt{2}\right)}\cdot x=14+3\sqrt[3]{49-50}\cdot x=$$
$$=14-3x.$$

Таким образом, $x^3=14-3x, x^3+3x-14=0$. Подбирая целые корни этого уравнения, находим $x=2$. Далее, деля «столбиком» многочлен $x^3+3x-14$ на $x-2$, получим в частном x^2+2x-7. Поскольку квадратное уравнение $x^2+2x-7=0$ не имеет действительных корней, то $x=2$ – единственный действительный корень уравнения $x^3+3x-14=0$. Отсюда, $x=2$ и, значит, исходное выражение равно $2\cdot9=18$.

Ответ: 18.

11.3 Три пункта *A*, *B* и *C* соединены прямолинейными дорогами. К отрезку дороги *AB* примыкает квадратное поле со стороной $\frac{1}{2}AB$; к отрезку дороги *BC* примыкает квадратное поле со стороной, равной *BC*; а к отрезку дороги *AC* примыкает прямоугольный участок леса длиной, равной *AC*, и шириной 4 км. Площадь леса на 20 км^2 больше суммы площадей квадратных полей. Найдите площадь леса.

Решение:

Пусть $AB = x$, $BC = y$, $AC = z$. Тогда площадь квадратного поля, примыкающего к отрезку дороги *AB*, выразится как $\frac{x^2}{4}$, площадь квадратного поля со стороной *BC* выразится как y^2, а площадь прямоугольного участка леса равна $4z$. По условию задачи

$$4z = \frac{x^2}{4} + y^2 + 20.$$

С другой стороны, для треугольника *ABC* выполняется неравенство

$$z \le x + y.$$

Заметим, что условие $z \le x + y$ охватывает и тот случай, когда точки *A*, *B* и *C* лежат на одной прямой.

Составим систему

$$\begin{cases} 4z = \frac{x^2}{4} + y^2 + 20, \\ z \le x + y, \end{cases}$$

относительно трех неизвестных.

Заменяя в уравнение неизвестное *z* на сумму $x + y$, получим неравенство

$$4(x + y) \ge \frac{x^2}{4} + y^2 + 20.$$

Преобразуем это неравенство к виду

$$0 \ge \left(\frac{x^2}{4} - 4x + 16\right) + (y^2 - 4y + 4),$$

$$0 \ge \left(\frac{x}{2} - 4\right)^2 + (y - 2)^2.$$

Из последнего неравенства следует

$$\frac{x}{2} - 4 = 0, x = 8, y - 2 = 0, y = 2.$$

Тогда $4z = \frac{x^2}{4} + y^2 + 20 = 40.$

Ответ: 40 км^2.

11.4 В остроугольном треугольнике *ABC* на высоте *AD* взята точка *M*, а на высоте *BP* – точка *N* так, что углы *BMC* и *ANC* – прямые. Расстояние между точками *M* и *N* равно $4+2\sqrt{3}$, угол *MCN* равен 30°. Найдите биссектрису *CL* треугольника *CMN*.

Решение:

Из прямоугольного треугольника *CMD*:

$MC^2 = MD^2 + CD^2 = BD\cdot CD + CD^2 = CD\cdot(BD + DC) = CD\cdot BC$.

Аналогично, $NC^2 = CP\cdot AC$.

Из прямоугольных треугольников *BPC* и *ADC* получаем

$$\frac{CP}{BC}=\frac{CD}{AC}=cosC, CP\cdot AC = BC\cdot CD,$$

т. е. $MC^2 = NC^2$, откуда $MC = NC$ и, таким образом, треугольник *MCN* равнобедренный. В равнобедренном треугольнике *MCN* биссектриса *CL* является одновременно высотой, поэтому

$$CL=\frac{1}{2}MNctg15^{\circ}=\left(2+\sqrt{3}\right)\frac{1+cos30^{\circ}}{sin30^{\circ}}=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}.$$

Ответ: $7+4\sqrt{3}$.

11.5 Найти все значения параметра а, при которых неравенство

$$cosx-2\sqrt{x^2+9}\le-\frac{x^2+9}{a+cosx}-a$$

имеет единственное решение.

Решение:

$cosx+a-2\sqrt{x^2+9}+\frac{x^2+9}{a+cosx}\le 0, \frac{\left|(cosx+a)-\sqrt{x^2+9}\right|^2}{a+cosx}\le 0.$

Решением получившегося неравенства будут решения уравнения $(cosx+a)=\sqrt{x^2+9}$ и неравенства $cosx+a<0$.

Неравенство не может иметь единственного решения ни при каком значении a. Следовательно, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо, чтобы неравенство $cosx+a<0$ не имело решений, а это будет выполнено, если $a\ge 1$. Теперь необходимо, чтобы уравнение $(cosx+a)=\sqrt{x^2+9}$ имело ровно одно решение. заметим, что если x_0 – решение уравнения, то и $-x_0$ является решением. Поэтому, для того чтобы решение было единственно, необходимо, чтобы $x=0$ было решением. А это выполнено при $a=2$. Тогда уравнение выглядит так $cosx+2=\sqrt{x^2+9}$. Его левая часть не превосходит числа3, а правая – не меньше 3. Следовательно, решение $x = 0$ – единственное решение уравнения. Вспоминая, что при $a = 2$ неравенство $cosx + a < 0$ не имеет решений, получаем ответ $a = 2$.

Ответ: $a = 2$.