11 класс

11.1 Сумма нескольких натуральных чисел, в записи каждого из которых участвуют только цифры 3 и 0, равна 555…55 (2019 пятерок). Какое наименьшее число слагаемых может быть в той сумме?

Решение:

Если данное число $N = 55 \dots 5$ есть сумма чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, в записи которых участвуют только цифры 3 и 0, то число $M = \frac{N}{3} = 185185 \dots 185$ (2019 раз) является суммой чисел

$$b_1 = \frac{a_1}{3}, b_2 = \frac{a_2}{3}, \dots, b_n = \frac{a_n}{3},$$

в записи которых участвуют только цифры 1 и 0.

Число M содержит цифру 8, поэтому $n \geq 8$. Очевидно, число M можно представить в виде суммы восьми чисел, составленных из единиц и нулей, взяв одно число, составленное из 2019 единиц, четыре числа вида 11011 ... 011 (всего цифр в числе 2018) и три числа вида 10010 … 010 (всего цифр в числе 2018).

Таким образом, минимальное количество слагаемых равно 8 ($n=8$). При этом $a_1=3b_1$, $a_2=3b_2$,…, $a_n=3b_n$.

То есть, число N можно представить в виде суммы восьми чисел, составленных из троек и нулей, взяв одно число, составленное из 2019 троек, четыре числа вида 33033 ... 033 (всего цифр в числе 2018) и три числа вида 30030 … 030 (всего цифр в числе 2018).

Ответ: 8.

11.2 В конкурсе «Веселые старты» участвовали 3 пары. Возраст участников в одной паре был одинаковый и не делился на два. Если от суммы возрастов второй пары отнять четыре года, то получится сумма возрастов первой пары, а если прибавить четыре года, то получится сумма возрастов третьей пары. Если возраста в каждой паре перемножить и полученные числа сложить, то эта сумма будет равна четырехзначному числу, все цифры которого одинаковы. Сколько лет каждому участнику?

Решение:

Если сумма возрастов участников второй пары больше на 4 суммы возрастов первой пары, то возраст каждого участника первой пары на 2 года меньше возраста участника из второй пары. Аналогично из третьей пары каждый на 2 года старше участников из второй пары.

Обозначим возраст участников из второй пары за x. Тогда для первой пары возраст каждого из участников будет $x-2$, а для третьей пары $x+2$. Произведение возрастов в каждой паре есть квадрат чисел $x-2$, x, $x+2$. Можно записать $(x-2)^2+x^2+(x+2)^2=$****, где звездочкой обозначена некоторая цифра. Упростим это выражение $3x^2+8=$****.

Так как возраст ни одного из участников не кратен двум, то числа $x-2$, x, $x+2$ нечетные. Квадраты нечетных чисел являются тоже нечетными. Поэтому, неизвестным четырехзначным числом может быть либо 1111, или 3333, или 7777, или 9999.

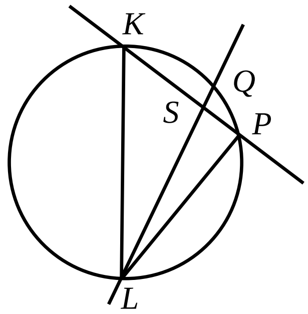
Число $3x^2+8$ не кратно 3, значит, из дальнейшего рассмотрения можно исключить числа 3333 и 9999. Если к числу $3x^2+8$ прибавить 1, то получится число, кратное 3. Из чисел 1112, 5556 и 7778 только 5556 кратно 3. В результате получаем $3x^2+8=5555$, $x^2=1849$ и $x=43$, то есть участникам из первой пары было по 41 году, из второй пары – по 43 года, из третьей – по 45 лет.

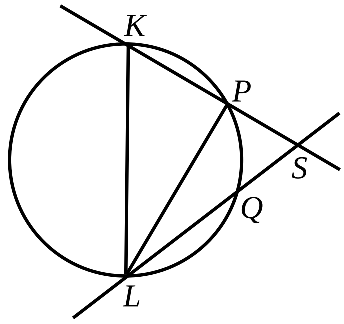
Ответ: 41, 43, 45.

11.3 Отрезок KL является диаметром некоторой окружности. Через концы K и L проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках P и Q, лежащих по одну сторону от прямой KL. Найдите радиус окружности, если $\angle PKL=60^\circ$ и точка пересечения прямых KP и QL находится от точек P и Q на расстоянии, равном 1.

Решение:

Из условия задачи следует, что точка S, в которой пересекаются прямые KP и QL, отлична от точек P и Q. Значит, и точки P и Q различны. Рассмотрим два случая расположения точек P и Q на окружности.





Докажем, что случай изображенный на первом рисунке невозможен. Действительно, в этом случае углы PQL и PKL опираются на одну дугу. Значит, $\angle PQL = \angle PKL = \frac{\pi}{3}$. по условию треугольник PSQ – равнобедренный, следовательно, $\angle SPQ = \angle PQL = \frac{\pi}{3}$ и $\angle KSL = \angle QSP = \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. Но угол KSL является внешним углом прямоугольного треугольника PSL ($\angle KPL$ опирается на диаметр). Получаем противоречие $\frac{\pi}{3} = \angle KSL > \angle SPL = \frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим случай, изображенный на втором рисунке. Так как четырехугольник $KPQL$ вписан в окружность, то $\angle PQL = \pi - \angle PKL$. Значит, $\angle PQL = \frac{2\pi}{3}$. Но тогда $\angle PQS = \pi - \angle PQL = \frac{\pi}{3}$. Треугольник PQS по условию равнобедренный. Следовательно, $\angle QPS = \angle PQS = \frac{\pi}{3}$ и $\angle PSQ = \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. Треугольники PSL и PKL прямоугольные, поскольку $\angle KPL$ опирается на диаметр. Таким образом,

$$PL = PS \cdot tg\angle PSQ = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$

$$KL = \frac{PL}{sin\angle PKL} = \sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,$$

и значит, радиус окружности равен $\frac{1}{2}KL = 1$.

Ответ: 1.

11.4* Решите неравенство

$$\frac{6}{2x+1} > \frac{1+log_2(x+2)}{x}.$$

Решение:

Область допустимых значений данного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x > -2, x \neq -0{,}5, x \neq 0$. Таким образом, эта область состоит из трех промежутков:

$$-2 < x < -0{,}5;\ -0{,}5 < x < 0; 0 < x < +\infty.$$

1. Пусть $-2 < x < -0{,}5$, тогда, учитывая, что x отрицательно на этом интервале, получаем, что исходное неравенство равносильно неравенству

$$log_2(x+2) > \frac{4x-1}{2x+1}. \qquad (1)$$

Легко видеть, что на этом интервале справедливы неравенства

$$log_2(x+2) < log_2\frac{3}{2} < 1, \qquad \frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} > 2.$$

Значит, неравенство (1), а вместе с ним и исходное неравенство, не имеет решений на интервале $-2 < x < -0{,}5$.

2. Пусть $-0{,}5 < x < 0$. Очевидно, что на этом интервале

$1 + log_2(x+2) > 1 + log_2\frac{3}{2} > 0$, и, следовательно, правая часть исходного неравенства отрицательна. В то же время для любой точки x из рассматриваемого интервала $\frac{6}{2x+1} > 0$. Значит, для всех x из интервала $-0{,}5 < x < 0$ исходное неравенство справедливо.

3. Пусть $x > 0$. На этом множестве исходное неравенство равносильно неравенству

---

* При тиражировании заданий была допущена опечатка. В задании было указано «Решите неравенство $\frac{6}{2x+1} > \frac{1+log_2 x}{x}$. В такой формулировке решение задачи является крайне трудоемким. В связи с этим оргкомитетом олимпиады принято решение снять задачу 11.4 с проверки и оценивать решения участников-одиннадцатиклассников из максимума в 28 баллов – 4 задачи по 7 баллов каждая (а не 35 баллов – 5 задач по 7 баллов каждая). Оргкомитет олимпиады приносит участникам свои извинения.

$$log_2(x+2) < \frac{4x-1}{2x+1}. \qquad (2)$$

Очевидно, что на этом множестве справедливы неравенства

$$log_2(x+2) > log_2 2 = 1, \qquad \frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} < 2.$$

Отсюда следует: 1) неравенство (2) не имеет решений на том множестве, где $log_2(x+2) \geq 2$, то есть неравенство (2) не имеет решений на множестве $x \geq 2$; 2) неравенство (2) не имеет решений на том множестве, где

$$\frac{4x-1}{2x+1} \leq 1 \Rightarrow \frac{2(x-1)}{2x+1} \leq 0 \Rightarrow -0{,}5 < x \leq 1.$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае $x > 0$, получаем, что неравенство (2) не имеет решений на множестве $0 < x \leq 1$. Остается найти решения неравенства (2), принадлежащие интервалу $1 < x < 2$. На этом интервале

$$log_2(x+2) > log_2 3, \qquad \frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} < 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}.$$

Покажем теперь, что справедливо числовое неравенство $log_2 3 > \frac{7}{5}$.

Действительно, так как $3^5 > 2^7$, то $3 > 2^{\frac{7}{5}}$, откуда и очевидна справедливость неравенства $log_2 3 > \frac{7}{5}$. Итак, на интервале $1 < x < 2$

$$log_2(x+2) > log_2 3 > \frac{7}{5} > \frac{4x-1}{2x+1}.$$

Значит, неравенство (2) не имеет решений на интервале $1 < x < 2$. Подводя итог, получаем, что множество решений исходного неравенства есть интервал $-0{,}5 < x < 0$.

Ответ: $-0{,}5 < x < 0$.

11.5 При каких значениях параметра a уравнение

$$x + (2a-1)\sqrt{x} + a - 1 = 0$$

не имеет решений?

Решение:

Решив уравнение относительно параметра, найдем $a = \frac{1+\sqrt{x}-x}{2\sqrt{x}+1}$. Обозначим $\sqrt{x} = t$, получим $a = \frac{1+t-t^2}{2t+1}$. Так как $\sqrt{x}$ принимает все неотрицательные значения, и только их, то задача равносильна следующей: при каких a уравнение $\frac{1+t-t^2}{2t+1} = a$ не имеет корней на луче $[0; +\infty)$.

Найдем множество значений функции на луче $[0; +\infty)$. При $t \geq 0$ эта функция непрерывна. Ее производная

$$f'(t) = \frac{(1-2t)(1+2t) - 2(1+t-t^2)}{(1+2t)^2} = -\frac{2t^2+2t+1}{(1+2t)^2}$$

при $t \geq 0$ отрицательна, так как при этом числитель и знаменатель дроби положительны. Следовательно, на луче $[0; +\infty)$ функция монотонно убывает. При $t = 0$ значение функции $f(0) = 1$, а при $t \to +\infty$ ее значения стремятся к $-\infty$, поэтому множество значений функции $f(t)$ на луче $[0; +\infty)$, в силу ее непрерывности и монотонности, есть промежуток $(-\infty; 1]$.

Уравнение $f(t) = a$ не имеет неотрицательных корней тогда и только тогда, когда $a \notin (-\infty; 1] \Leftrightarrow a \in (1; +\infty)$.

Ответ: при $a \in (1; +\infty)$.