11 класс

11.1 Решите в целых числах уравнение

$$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots+\sqrt{x}}}}}}_{2020}=y.$$

<u>Решение:</u>

Пусть x и y – целые числа, удовлетворяющие условию. После ряда возведений в квадрат убеждаемся, что $\sqrt{x+\sqrt{x}}=m$ и $\sqrt{x}=k$ – целые числа, причем

$$m^2=k(k+1).$$

Если $k>0$, то должно быть $k^2<m^2<(k+1)^2$, тогда $k<m<k+1$ и поэтому m – не целое число. Значит, $k=0$, то есть $x=0$, значит и $y=0$.

Ответ: $x=y=0$.

11.2 Найдите все *x*, удовлетворяющие уравнению

$$\log_2\left(a^2x^3-5a^2x^2+\sqrt{6-x}\right)=\log_{a^2+2}\left(3-\sqrt{x-1}\right)$$

при любом значении параметра a.

<u>Решение:</u>

Так как нужно найти все значения *x*, которые будут удовлетворять данному уравнению при любом значении параметра *a*, то такие *x* должны удовлетворять этому уравнению при *a* = 0.

При *a* = 0 уравнение примет вид

$$\log_2\left(\sqrt{6-x}\right)=\log_2\left(3-\sqrt{x-1}\right);$$

$$\begin{cases}6-x=\left(3-\sqrt{x-1}\right)^2,\\ 3-\sqrt{x-1}>0;\end{cases}\quad \begin{cases}3\sqrt{x-1}=x+1,\\ 0\le x-1<9;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-7x+10=0,\\ 1\le x<10;\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=5.\end{array}\right.$$

Таким образом, при *a* = 0 исходное уравнение может иметь два решения: $x=2$ и $x=5$. Сделаем проверку: какие из этих значений x являются решениями исходного уравнения при любых значениях параметра a.

Пусть $x=2$. Тогда уравнение примет вид:

$$\log_2(2-12a^2)=\log_{a^2+2}2.$$

Оно выполняется не при любом значении a, например при $a = 1$ левая часть уравнения теряет смысл.

При $x = 5$. Тогда уравнение примет вид:

$$\log_2 1=\log_{a^2+2}1.$$

Последнее равество справедливо при любом значении параметра a.

Ответ: $x = 5$

11.3 Решите уравнение $\sin 3x\cdot\cos x=1$.

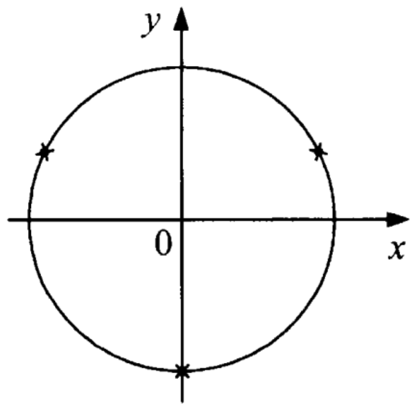
Решение:

Данное уравнение равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases}\sin 3x=1,\\ \cos x=1\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\sin 3x=-1,\\ \cos x=-1.\end{cases}$$

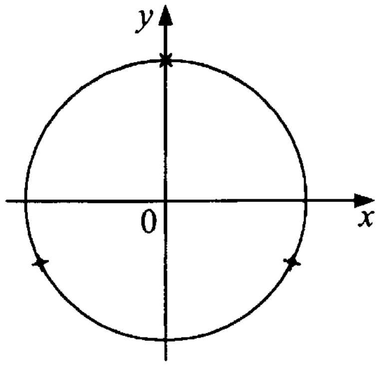
Решим первую систему $\begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}, n\epsilon Z\\ \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\right)=1.\end{cases}$

На рисунке отмечены точки, которые соответствуют углам вида $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}, n\epsilon Z$.



Ни для одного из них косинус не равен 1. Следовательно, первая система не имеет решения.

Решим вторую систему. $\begin{cases} x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}, k\epsilon Z\\ \cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right)=-1.\end{cases}$ На рисунке отмечены точки, которые соответствуют углам вида $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}, k\epsilon Z$.

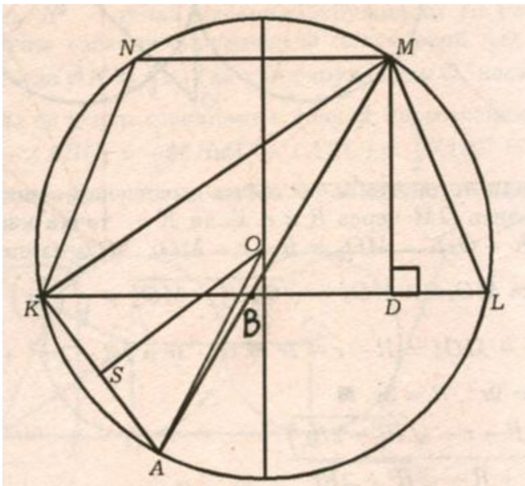


Ни для одного из них косинус не равен -1. Следовательно, вторая система не имеет решения.

Ответ: не имеет решений.

11.4 В окружность с центром O вписана трапеция $KLMN$, в которой $KL||MN$, $KL = 8,\ MN = 2,\ \angle NKL = 45^{\circ}$. Хорда MA окружности пересекает отрезок KL в точке B такой, что $KB = 3$. Найти расстояние от точки O до прямой AK.

<u>Решение:</u>
Проведем высоту MD трапеции.



$$DL = \frac{1}{2}(KL - MN) = \frac{1}{2}(8 - 2) = 3 = MD,$$

так как $\angle MLK = \angle NKL = 45°$ и из прямоугольного треугольника MDL имеем $ML = \sqrt{DL^2 + MD^2} = 3\sqrt{2}$. Аналогично, $KM = \sqrt{KD^2 + MD^2} = \sqrt{34}$, но по теореме синусов из треугольника KNM полуим $KM = 2R\sin 135° = \sqrt{34}$, откуда $R = \frac{\sqrt{34}}{2\sin 135°} = \frac{\sqrt{34}}{2\sin 45°} = \sqrt{17}$. Из подобия треугольников BKA и BML

выводим $\frac{KA}{ML} = \frac{KB}{BM}$, то есть $KA = \frac{KB \cdot ML}{BM}$, но $BM = \sqrt{BD^2 + MD^2} = \sqrt{13}$, поэтому $KA = \frac{3 \cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{13}} = 9\sqrt{\frac{2}{13}}$. Если теперь S – середина хорды AK, то прямоугольного треугольника ASO получаем

$$OS = \sqrt{OA^2 - SA^2} = \sqrt{R^2 - \frac{KA^2}{4}} = \sqrt{17 - \frac{81 \cdot 2}{13 \cdot 4}} = \sqrt{\frac{361}{26}} = \frac{19\sqrt{26}}{26}.$$

Ответ: $\frac{19\sqrt{26}}{26}$.

11.5 В конкурсе «Мисс мира» участвуют 100 девушек. Известно, что среди любых 12 из них найдутся двое, которые знакомы между собой. Докажите, что как бы ни раздали участницам номера (не обязательно от 1 до 100), найдутся две знакомые девушки, номера которых начинаются с одинаковой цифры.

Решение:

Обозначим через N_i, где $i = 1,2,3,\ldots,9$, количество участниц, номера которых начинаются с цифры i. Достаточно доказать, что при некотором значении $i = i_0$ выполняется неравенство $N_{i_0} \geq 12$; действительно, тогда по условию найдутся две знакомые участницы, номера которых начинаются с цифры i.

Предположим противное, то есть, что $N_i \leq 11$ при всех $i = 1,2,3,\ldots,9$. Тогда $N_1 + N_2 + \cdots + N_9 \leq 99$. Сумма в левой части неравенства равна общему числу участниц, участвующих в конкурсе; это противоречит тому, что в конкурсе участвуют 100 девушек.

Доказано.