11 класс

11.1 Вычислите значение выражения $\dfrac{2a^{-2}-\dfrac{a^{-3}}{2}}{a^{-2,5}-\dfrac{1}{2}a^{-3}}+\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}-a^{-2}}{a^{-1}+a^{-1,5}+a^{-2}}$ при $a=2016$.

Решение:

Умножим числитель и знаменатель первой дроби на $2a^3$, а второй на a^2

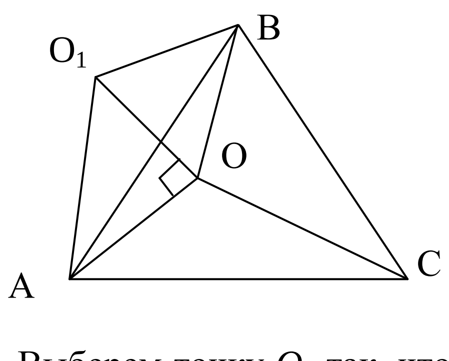
$$\frac{\left(2a^{-2}-\dfrac{a^{-3}}{2}\right)\cdot 2a^3}{\left(a^{-2,5}-\dfrac{1}{2}a^{-3}\right)\cdot 2a^3}+\frac{\left(a^{-\frac{1}{2}}-a^{-2}\right)\cdot a^2}{\left(a^{-1}+a^{-1,5}+a^{-2}\right)\cdot a^2}=\frac{(4a-1)}{(2\sqrt{a}-1)}+\frac{\left(\left(\sqrt{a}\right)^3-1\right)}{\left(a+\sqrt{a}+1\right)}=$$

$$=\frac{(2\sqrt{a}-1)(2\sqrt{a}+1)}{(2\sqrt{a}-1)}+\frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{(a+\sqrt{a}+1)}=2\sqrt{a}+1+\sqrt{a}-1=3\sqrt{a}=3\sqrt{2016}=36\sqrt{14}.$$

Ответ: $36\sqrt{14}$.

11.2 Внутри правильного треугольника ABC выбрана точка O так, что $AO^2+BO^2=CO^2$. Найдите угол AOB.

Решение:



Выберем точку O_1 так, чтобы BOO_1 был правильным треугольником и точки O_1 и C находились по разные стороны относительно прямой, проходящей через B и O. Треугольники BOC и ABO_1 равны, так как $AB=BC$ (по условию), $BO=BO_1$ (по построению), $\angle OBC=\angle O_1BA$ (дополняются одним и тем же углом до 60°). Следовательно $AO_1=OC$. Но по условию $AO^2+OO_1^2=$

$= AO^2 + BO^2 = CO^2 = AO_1^{\ 2}$. Поэтому *AOO₁* – прямоугольный треугольник и $\angle AOB = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.

Ответ: 150°.

11.3 БАОБАБ, где одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры, делится на 101. Найдите все такие числа.

Решение:

Нужно разложить число БАОБАБ по степеням 10 и в полученной сумме выделить слагаемые, делящиеся на 101, например, $10^2 = (10^2 + 1) - 1$ и т.д.

$$Б \cdot 10^5 + А \cdot 10^4 + О \cdot 10^3 + Б \cdot 10^2 + А \cdot 10 + Б =$$

$$= Б \cdot (10^5 + 1000) - 1000Б + А \cdot (10^4 + 100) - 100А + О \cdot (10^3 + 10) - 10О +$$

$$+ Б \cdot (10^2 + 1) - Б + 10А + Б =$$

$$= 101000Б - 1000Б + 10100А - 100А + 1010О - 10О + 101Б + 10А =$$

$$= 101 \cdot (1000Б + 100А + 10О + Б) - 1000Б - 100А - 10О + 10А =$$

$$= 101 \cdot (1000Б + 100А + 10О + Б) - 10(100Б + 9А + О)$$

Первое слагаемое делится на 101. Чтобы число делилось на 101, надо чтобы $10(100Б + 9А + О)$ делилось на 101.

Возможно:

Б = 9*,* *А* = 1, *О* =0 , то есть число 910919.

Ответ: 910919.

11.4 Найдите все значения а, при которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

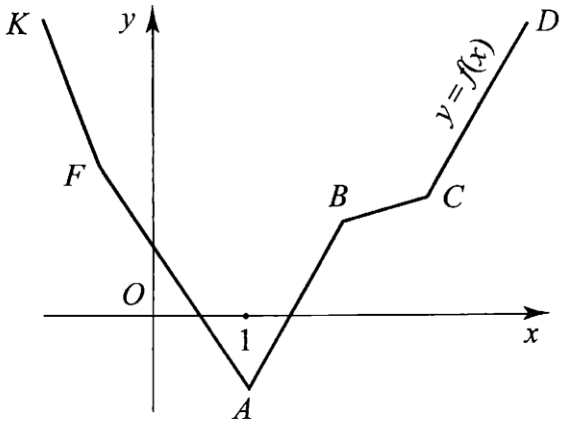
Решение:

Перенесем все члены уравнения в левую часть. Получим

$9|x-1| - 4x + |3x - |x+a|| = 0$. Обозначим $f(x) = 9|x-1| - 4x + |3x - |x+a||$.

1. График $f(x)$ представляет собой ломанную, звеньями которой будут отрезки прямой и два луча на левом и правом концах графика. Далее, если на некотором промежутке звено графика $f(x)$ представляет собой часть прямой с угловым коэффициентом $k>0$, то на этом промежутке $f(x)$ возрастает, если $k<0$, то $f(x)$ убывает.

2. Заметим, что при $x \geq 1$ выполняется равенство $|x-1| = x-1$ и, следовательно, в первом слагаемом будет коэффициент 9. Остальные коэффициенты при x суть 1, 3, 4. Они в сумме «не дотягивают» до 9. Поэтому как бы ни раскрылись остальные модули, мы на всех промежутках справа от $x=1$ будем иметь положительные угловые коэффициенты у всех звеньев функции $f(x)$. Следовательно, при $x \geq 1$ функция $f(x)$ будет возрастать. Схематически это показано на рисунке ломанной *ABCD*.



При $x \leq 1$ выполняется равенство $|x-1| = -(x-1)$. Следовательно, в первом слагаемом $f(x)$ коэффициент при x будет (–9). И также независимо от того, с каким знаком будут раскрыты остальные модули, мы будем иметь отрицательные угловые коэффициенты у всех звеньев слева от $x=1$. Поэтому, слева от $x=1$ функция $f(x)$ убывает. Схематически это показано на рисунке ломанной *AFK*.

Таким образом, в точке $x=1$ функция $f(x)$ достигает своего наименьшего значения.

Ясно, что уравнение $9|x-1| - 4x + \big|3x - |x+a|\big| = 0$ будет иметь решение в том и только в том случае (рисунок), когда

$$f(1) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(1) = \big|3 - |1+a|\big| - 4 \leq 0.$$

Осталось решить неравенство $\big|3 - |1+a|\big| - 4 \leq 0$. Имеем

$$\begin{cases} 3 - |a+1| \leq 4, \\ 3 - |a+1| \geq -4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a+1| \geq -1, \\ |a+1| \leq 7, \end{cases} \Leftrightarrow |a+1| \leq 7 \Leftrightarrow -7 \leq a+1 \leq 7 \Leftrightarrow -8 \leq a \leq 6.$$

Ответ: $a \in [-8;6]$.

11.5 Имеются 3 сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй – 10% меди, 90% марганца, третий – 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

Решение:
Пусть первого, второго и третьего сплавов взято соответственно x, y и z кг. Новый сплав весом $x+y+z$ содержит $(0{,}9y+0{,}6z)$ кг марганца. По условию задачи $0{,}9y+0{,}6z=0{,}4(x+y+z) \Leftrightarrow x=\dfrac{5y+2z}{4}$. Процентное содержание меди в новом сплаве составит величину $F=\dfrac{0{,}7x+0{,}1y+0{,}25z}{x+y+z}\cdot 100$. Подставив сюда значение $x=\dfrac{5y+2z}{4}$ и сделав алгебраические преобразования, получим $F=40+\dfrac{10y}{3y+2z}$. Требуется найти наибольшее и наименьшее значения этой функции при условии $y\ge 0, z\ge 0$, причем одновременно в 0 они не обращаются, так как в противном случае приготовленный сплав не мог бы содержать марганца. Очевидно наименьшее значение $F=40$ при $y=0$. Если $y\ne 0$, то $F=40+\dfrac{10}{3+\dfrac{z}{y}}$ и наибольшее значение функция F принимает, когда знаменатель дроби наименьший, то есть при $z=0$. При этом $F=43\dfrac{1}{3}$.

Ответ: 40% и $43\dfrac{1}{3}$ %.