11 класс

11.1 Вычислите $\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{89}-\underbrace{11\ldots1}_{30}\underbrace{00\ldots0}_{30}}$.

<u>Решение:</u>

$$\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{89}-\underbrace{11\ldots1}_{30}\underbrace{00\ldots0}_{30}}=$$
$$=\sqrt[3]{37\cdot(10^{87}+10^{84}+\ldots+10^{0})-\underbrace{11\ldots1}_{30}\cdot10^{30}}=$$
$$=\sqrt[3]{37\cdot\frac{10^{90}-1}{10^{3}-1}-\frac{1}{9}\cdot(10^{30}-1)\cdot10^{30}}=$$
$$=\sqrt[3]{\frac{10^{90}-1}{27}-\frac{10^{60}-10^{30}}{9}}=$$
$$=\sqrt[3]{\frac{10^{90}-3\cdot10^{60}+3\cdot10^{30}-1}{27}}=$$
$$=\frac{10^{30}-1}{3}=\underbrace{33\ldots3}_{30}.$$

Ответ: $\underbrace{33\ldots3}_{30}$.

11.2 Представьте многочлен x^8+x^4+1 в виде произведения четырех многочленов ненулевой степени.

<u>Решение:</u>

$$x^8+x^4+1=x^8+2x^4+1-x^4=(x^4+1)^2-(x^2)^2=$$
$$=(x^4+1+x^2)(x^4+1-x^2)=(x^4+2x^2+1-x^2)(x^4+2x^2+1-3x^2)=$$
$$=(x^2+1+x)(x^2+1-x)\left(x^2+1+x\sqrt{3}\right)\left(x^2+1-x\sqrt{3}\right).$$

Ответ: $(x^2+1+x)(x^2+1-x)\left(x^2+1+x\sqrt{3}\right)\left(x^2+1-x\sqrt{3}\right)$.

11.3 На стене висят двое часов. Первые часы отстают на одну минуту в час. Вторые часы идут вперед первых на одну минуту в час. В полдень на первых и вторых часах поставили точное время. Какое время будут показывать вторые часы через сутки?

Решение:
За 1 ч первые часы отстанут на 1 минуту. Значит, скорость первых часов составляет от скорости точных часов $\frac{59}{60}$. Скорость вторых часов составляет $\frac{61}{60}$ скорости первых часов, а тогда по сравнению с точными $\frac{59}{60} \cdot \frac{61}{60} = \frac{3599}{3600}$. То есть, за 1 час вторые часы отстают от точного времени на одну секунду. Таким образом, ровно через сутки по точным часам вторые часы будут показывать 11 ч 59 мин 36 с.

Ответ: 11 ч 59 мин 36 с.

11.4 Найдите все целые корни уравнения

$$cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right)\right) = 1.$$

Решение:
Пусть x – целый корень уравнения. Тогда существует некоторое число n такое, что справедливо равенство

$$\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right) = 2\pi n,$$

$$\sqrt{9x^2 + 160x + 800} = 3x - 16n.$$

Возведя это равенство в квадрат, получим

$$x(3n + 5) = 8n^2 - 25. \qquad (1)$$

Преобразуем правую часть равенства

$$8n^2 - 25 = 8\left(n^2 - \frac{25}{9}\right) - \frac{25}{9} = \frac{8}{9}(3n + 5)(3n - 5) - \frac{25}{9}.$$

Из равенства (1) можно получить

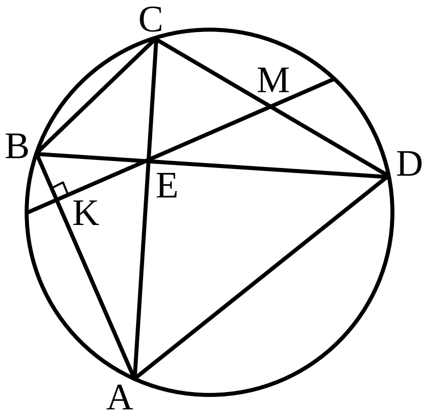
$$8(3n + 5)(3n - 5) - 9x(3n + 5) = 25.$$

Поскольку x и n есть целые числа, то последнее равенство означает, что $(3n + 5)$ является делителем числа 25, то есть $(3n + 5)$ есть одно из чисел $\pm 1, \pm 5, \pm 25$. непосредственной проверкой убеждаемся, что это возможно только если n равняется одному из чисел $n_1 = -10, n_2 = -2, n_3 = 0$. Соответствующие значения x находятся из равенства (1): $x_1 = -31, x_2 = -7, x_3 = -5$. Итак, все целые корни исходного уравнения содержатся среди чисел -31, -7, -5. Подставляя эти числа в исходное уравнение, убеждаемся, что ему удовлетворяют только x_1 и x_2. Значит, исходное уравнение имеет два целых корня.

Ответ: –31, –7.

11.5 Около четырехугольника *ABCD* описана окружность. Диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке *E*. Прямая, проходящая через точку *E* и перпендикулярная к *AB*, пересекает сторону *CD* в точке *M*. Найдите *EM*, если *AD* = 8, *AB* = 4 и $\angle CDB = \alpha$.

Решение:



Обозначим через *K* точку пересечения прямых *AB* и *EM*. Поскольку углы *CDB* и *CAB* опираются на одну дугу, то $\angle CAB = \angle CDB = \alpha$. Из равенства $\angle DCE + \angle CDB = \frac{\pi}{2}, \angle KEA + \angle CAB = \frac{\pi}{2}$ следует, что $\angle DCE = \angle KEA = \angle CEM$. Но это означает, что треугольник CEM равнобедренный, то есть *CM* = *EM*. $\angle MED = \frac{\pi}{2} - \angle CEM = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \alpha = \angle CDB$. Треугольник *EMD* равнобедренный *DM* = *EM*. Следовательно, *CM* = *DM* или *EM* – медиана треугольника *CED*.

Из прямоугольного треугольника *ABE* находим $AE = AB cos\angle CAB = 4\,cos\alpha$. Из прямоугольного треугольника *AED* по теореме Пифагора получаем $ED = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{64 - 116cos^2\alpha} = 4\sqrt{4 - cos^2\alpha}$ и

$$EM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\frac{ED}{cos\alpha} = 2\sqrt{\frac{4}{cos^2\alpha} - 1} = 2\sqrt{4tg^2\alpha + 3}.$$

Ответ: $2\sqrt{4tg^2\alpha + 3}$.