11 класс

11.1 Упростите выражение

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}.$$

<u>Решение:</u>

Преобразуем выражение по действиям.

$$\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}=\sqrt[4]{\left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(3+2\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\sqrt[4]{\left(2-2\sqrt{2}+1\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)}=\sqrt[4]{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)}=\sqrt[4]{9-8}=1\ .$$

Аналогично $\sqrt{\sqrt{2}+1}\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}=1$.

$$\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}=\sqrt[3]{x\sqrt{x}+12\sqrt{x}-6x-8}=$$

$$=\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}\right)^3-3\left(\sqrt{x}\right)^2\cdot 2+3\cdot 2^2\sqrt{x}-2^3}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-2\right)^3}=\sqrt{x}-2.$$

$$\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}.$$

Подставляя все в исходное выражение, получим

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}=\frac{1+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}=1.$$

Ответ: 1.

11.2 Найдите три последовательных простых числа (необязательно отличающихся на 1 или на 2 друг от друга), сумма квадратов которых также простое число. Укажите все решения.

<u>Решение:</u>

Обозначим эти простые числа в порядке возрастания через p, q и r. Рассмотрим три случая.

1) Пусть $p=2$. Тогда числа q и r нечетны, а значит, сумма $4+q^2+r^2$ четна. Поэтому случай $p=2$ невозможен.

2) Пусть $p=3$. Следующие за 3 простые числа – это 5 и 7. Сделаем проверку $3^2+5^2+7^2=83$. Получилось простое число, что и требовалось.

3) Пусть $p > 3$. Тогда числа q и r больше 3. Следовательно, ни одно из чисел p, q и r не делится на 3. Но квадрат натурального числа, не делящегося на 3, при делении на 3 может давать в остатке только 1. Докажем это. Разность $a^3 - a$ при любом целом a делится на 3, тогда $a(a^2 - 1)$ тоже делится на 3. Так как a не делится на 3, то $a^2 - 1$ делится на 3, следовательно,

$$a^2 - 1 = 3k, (k \in Z) \Longrightarrow a^2 = 3k + 1,$$

то есть a^2 при делении на 3 дает в остатке 1.

Возвращаясь к случаю $p > 3$, имеем $p^2 + q^2 + r^2 = (3k + 1) + (3l + 1) + (3m + 1) = 3k + 3l + 3m + 3$. Эта сумма делится на 3, значит случай $p > 3$ невозможен.

Ответ: 3, 5, 7.

11.3 При каких значениях параметра a уравнение

$$x^4 - 2x^2 + a(7cosx - 2x^2) + 7a^2 = 0$$

имеет единственное решение.

Решение:

Если x_0 – решение данного уравнения, то и $-x_0$ также является его решением в силу четности функции в левой части уравнения. Следовательно, $x_0 = 0$.

При $x = 0$ уравнение примет вид $7a + 7a^2 = 0; a = 0$ или $a = -1$. Таким образом, 0 и -1 – допустимые значения параметра.

Проверка. При $a = 0$ уравнение примет вид

$x^4 - 2x^2 = 0$, $x^2(x^2 - 2) = 0$, $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$. Три решения, значит, $a = 0$ не удовлетворяет условию.

При $a = -1$ уравнение примет вид

$x^4 - 2x^2 - 7cosx + 2x^2 + 7 = 0 \Longrightarrow x^4 + 7 = 7cosx.$

Левая часть уравнения $x^4 + 7 \geq 7$, правая $7cosx \leq 7$. Следовательно, решением уравнения является решение системы $\begin{cases} 7cosx = 7, \\ x^4 + 7 = 7, \end{cases}$ $x = 0$ – единственное решение.

Ответ: $a = -1$.

11.4 Доярка разливает молоко по бидонам. Она распределила молоко поровну по всем бидонам. Неожиданно принесли еще один пустой бидон, и она опять перераспределила молоко поровну, но теперь в каждом бидоне оказалось на 15 л меньше, чем в прошлый раз. Когда принесли еще один бидон, молоко снова перераспределили, опять везде поровну, но в этот раз еще на 9 л меньше. Сколько литров молока было у доярки и сколько, в конце концов, было у нее бидонов?

Решение:

Обозначим через N количество литров молока у доярки, через f – количество бидонов, которые принесли ей сначала, через p – количество литров молока, которое доярка налила в каждый бидон сначала. Мы можем написать три уравнения:

1) $N = fp$ – пока не принесли два последних бидона
2) $N = (f + 1)(p - 15)$ – до того как принесли последний бидон
3) $N = (f + 2)(p - 15 - 9)$ – после того как принесли все бидоны

Преобразуем все три уравнения, раскрыв скобки:

1) $N = fp$
2) $N = fp - 15f + p - 15$
3) $N = fp - 24f + 2p - 48$

Внимательный взгляд на полученные уравнения позволяет сделать вывод:

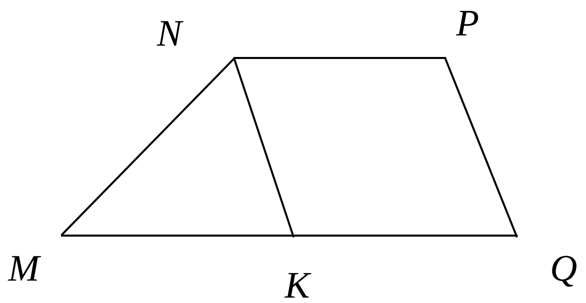
1) $-15f + p - 15 = 0$
2) $-24f + 2p - 48 = 0$

Из первого уравнения удается найти $p = 15f + 15$, подставляем это во второе уравнение, $-24f + 2(15f + 15) - 48 = 0 \Leftrightarrow 6f - 18 = 0 \Leftrightarrow f = 3$. Итак, вначале у доярки было 3 бидона, т.е. всего у нее в конце было 5 бидонов. Найдем количество литров молока N у доярки: $p = 15f + 15 = 60$, окончательно $N = fp = 60 \cdot 3 = 180$.

Ответ: 180 литров, 5 бидонов.

11.5 Основание MQ трапеции $MNPQ$ равно $6\sqrt{3}$, а длина основания NP равна $\sqrt{3}$. Угол $\angle M = 15°$, $\angle Q = 45°$. Найдите длину боковой стороны MN.

Решение:



Проведем NK параллельно PQ. Заметим $KQ||NP$, $KN||\ PQ$, следовательно, $KNPQ$ параллелограмм и $KQ = NP = \sqrt{3}$. MQ – секущая параллельных прямых NK и PQ, следовательно, $\angle MKN = \angle MQP = 45°$.

Далее найдем длину отрезка $MK = MQ - KQ = 6\sqrt{3} - \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. Боковую сторону MN теперь можно найти по теореме синусов для треугольника MNK: $\dfrac{MK}{\sin\angle MNK} = \dfrac{MN}{\sin\angle MKN}$. При этом $\angle MNK = 180° - 45° - 15° = 120°$.

И $sin120° = \sqrt{3}/2$. Теперь можно найти

$$MN = \frac{MK \cdot sin\angle MKN}{sin\angle MNK} = \frac{5\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 5\sqrt{2}.$$

Ответ: $5\sqrt{2}$.