11 класс

11.1 Докажите, что число $28^{2017}+18^{2017}$ делится на 23.

Решение:
Представим 28 = 23 + 5, 18 = 23 – 5, тогда получим $28^{2017}+18^{2017}=(23+5)^{2017}+(23-5)^{2017}$. Применяя формулу бинома Ньютона, данное число можно представить в виде
$(23+5)^{2017}+(23-5)^{2017}=23\cdot A+5^{2017}+23\cdot B-5^{2017}=23\cdot(A-B)$.

Доказано.

11.2 В каждую клетку таблицы 8×8 требуется вписать одно из чисел 1 или -1 так, чтобы произведение всех чисел в каждой строке и в каждом столбце было равно единице. Сколькими способами можно заполнить таблицу?

Решение:
Заполним всю таблицу 8×8 единицами. Это можно сделать единственным способом. Элементы последней строки (столбца) можно рассматривать как множители, дополняющие произведение семи элементов строки (столбца), до 1, а, значит, совпадающие с этим произведением. Теперь в верхнем левом квадрате размером 7×7 (исключим последнюю строку и последний столбец) заменим одну из единиц на -1. Это приведёт к изменению знаков в последней клетке строки, содержащей эту -1, а также последней клетке соответствующего столбца и последней клетке последней строки. Будем продолжать заменять 1 на -1 в выделенной таблице размером 7×7 и следить за изменениями в последней строке и последнем столбце исходной таблицы. Поскольку числа квадрата 7×7 однозначно задают числа последней строки и последнего столбца, то различных вариантов заполнения будет столько, сколько содержится различных способов заполнения квадрата 7×7. Так как заполнение каждой из 49 клеток квадрата 7×7 может быть сделано одним из двух способов (1 или -1), то в силу правила произведения получаем 2^{49} способов.

Ответ: 2^{49}.

11.3 Найдите все значения параметра b, при которых система неравенств

$$\begin{cases} b^3 - b\cos(2x+2y) > 3b^2 + 8b + (b^2 - b)\sin(x+y), \\ x^2 + (b^4+1)y^2 - b > 2xy \end{cases}$$

выполняется при любых x и y.

Решение:

Рассмотрим сначала второе уравнение системы.Перепишем его в виде:

$$x^2 + y^2 - 2xy + b^4y^2 > b$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + b^4y^2 > b.$$

Т.к. это неравенство должно выполняться при любых x и y , то должно быть $b < 0$. В противном случае при $x = 0$ и $y = 0$ оно не будет выполняться. При $b < 0$ второе неравенство выполняется при любых x и y.

Рассмотрим первое неравенство. Т.к. $b < 0$, то сократив обе части этого неравенства на b и поменяв знак, получим равносильное неравенство

$$b^2 - \cos(2x+2y) > 3b + 8 + (b-1)\sin(x+y) \qquad (1)$$

Разложим $\cos(2x+2y) = \cos2(x+y)$ как косинус двойного угла. Имеем $cos2(x+y) = cos^2(x+y) - sin^2(x+y) = 1 - 2sin^2(x+y)$.

Подставив последнее выражение в (1),получим

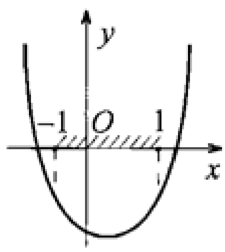
$2sin^2(x+y) - (b-1)\sin(x+y) + b^2 - 3b - 9 < 0$.

Обозначим $t = \sin(x+y)$, $-1 \le t \le 1$. Тогда последнее неравенство примет вид:

$$2t^2 - (b-1)\mathrm{t} + b^2 - 3b - 9 < 0. \qquad (2)$$

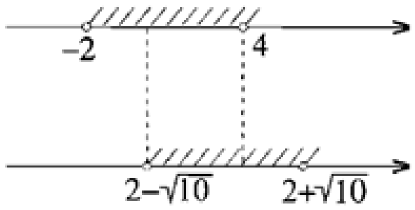
Теперь задача свелась к нахождению таких значений b, при которых квадратное неравенство (2) выполняется при всех $t\epsilon[-1;1]$.

Обозначим $f(t) = 2t^2 - (b-1)\mathrm{t} + b^2 - 3b - 9 < 0$. Ветви квадратного трехчлена $f(t)$ направлены вверх,поэтому неравенство (2) будет выполняться при всех $t\epsilon[-1;1]$, если (см.рисунок)



$$\begin{cases} f(-1) < 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) = 2\cdot(-1)^2 - (b-1)(-1) + b^2 - 3b - 9 < 0 \\ f(1) = 2\cdot 1^2 - (b-1)\cdot 1 + b^2 - 3b - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b^2-2b-8<0 \\ b^2-4b-6<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in (2-\sqrt{10}\,; 2+\sqrt{10}\,) \\ b \in (-2; 4) \end{cases}$$



Изобразив найденные множества на числовых осях, легко видеть, что решениями системы будут $b \in (2-\sqrt{10}; 4)$. Но учитывая,что $b<0$, получаем
$b \in (2-\sqrt{10}; 0)$.

Ответ: $b \in (2-\sqrt{10}; 0)$.

11.4 Внутри равнобедренного прямоугольного треугольника *ABC*с гипотенузой *AB* взята точка *M* такая, что угол *MAB* на 15° больше угла *MAC*, а угол *MCB* на 15° больше угла *MBC*. Найдите угол *BMC*.

<u>Решение:</u>

Пусть *X* – точка пересечения *AM* и высоты *CH* треугольника *ABC* (см. рис. 1). Рассмотрим случай, когда точка *X* лежит на отрезке *AM* (в конце решения мы покажем, что другой случай невозможен). Из условия следует, что $\angle BAX = 30^\circ$. Тогда $\angle CXM = \angle AXH = 90^\circ - \angle XAH = 60^\circ$. Поскольку *CH* также является медианой треугольника *ABC,* то треугольник *AXB* – равнобедренный, то есть, $\angle BXH = 60^\circ$. Следовательно, и $\angle BXM = 60^\circ$.

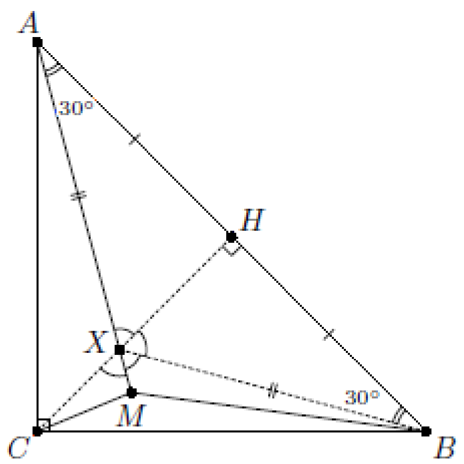


Рис. 1

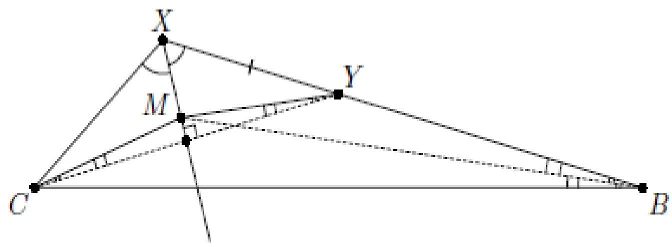


Рис. 2

Рассмотрим отдельно треугольник *CXB*. В нем $\angle XCB = 45^\circ$, $\angle XBC = 15^\circ$, $\angle CXB = 120^\circ$ и *XM* – биссектриса угла *CXB* (см. рис. 2). Докажем, что *BM* – биссектриса угла *CBX*. Обозначим $\angle MBC = \alpha$, тогда

$\angle MCB = 15^\circ + \alpha$. Выберем на отрезке *XB* такую точку *Y,* что $\angle YCB = 15^\circ$, тогда $\angle XCY = 30^\circ$. Кроме того, $\angle XYC = 30^\circ$ (как внешний угол в треугольнике *CYB)*, следовательно, треугольник *CXY* – равнобедренный.

Поскольку *XM* – биссектриса равнобедренного треугольника *CXY,* то она также является медианой и высотой, следовательно, *CMY* – также равнобедренный, откуда $\angle MYC = \angle MCY = \alpha$. С другой стороны, $\angle MBC = \alpha$, то есть, четырехугольник *CMYB* – вписанный. Тогда $\angle MBY = \angle MCY = \alpha$, откуда $2\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 7{,}5^\circ$ и $\angle CMB = 150^\circ$.

Докажем, что точка *X* лежит на отрезке *AM.* Пусть это не так (см. рис. 3). Снова рассмотрим треугольник *AXB* отдельно и проведем отрезок *CY* так, что $\angle YCB = 15^\circ$. По условию, $\angle MCB = 15^\circ + \angle MBC$.

Так как $\angle XCB = 30^\circ + \angle XBC$, то чтобы выполнялось условие, угол *MBX* должен быть на 15° больше *MCX.* Треугольник *CMY* – равнобедренный, следовательно, $\angle MCX = \angle MYX > \angle MBY$, то есть, такое расположение точек невозможно.

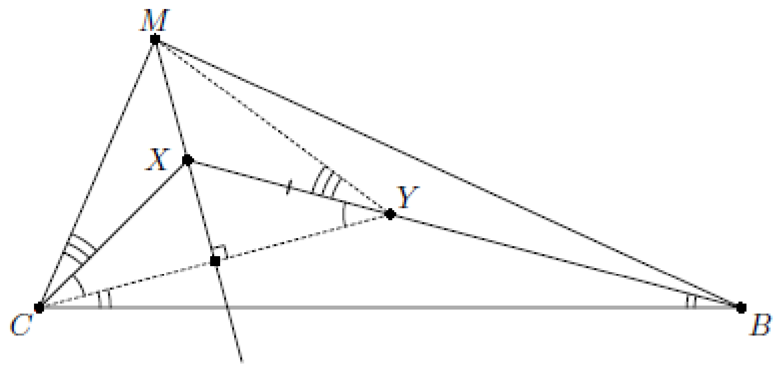


Рис.3

Ответ: $\angle CMB = 150^\circ$

11.5 После длительной разлуки встретились двое старых друзей. Один из них сообщил, что у него три сына, произведение возрастов которых равно 36, а сумма равна числу окон дома, около которого произошла встреча. Второй сказал, что он не может определить возраст детей. Тогда первый добавил, что его старший сын ходит в школу, после чего второй сразу же назвал возраст детей. Сколько лет было каждому сыну?

<u>Решение:</u>

Выпишем все возможные разложения 36 на три сомножителя:

$$36 = 1\cdot 1\cdot 36 = 1\cdot 2\cdot 18 = 1\cdot 3\cdot 12 = 1\cdot 4\cdot 9 =$$
$$= 1\cdot 6\cdot 6 = 2\cdot 2\cdot 9 = 2\cdot 3\cdot 6 = 3\cdot 3\cdot 4$$

Суммы сомножителей этих восьми разложений равны соответственно 38, 21, 16, 14, 13, 13, 11, 10. Второй, зная число окон дома, а значит и сумму возрастов ($2 \cdot 2 \cdot 9$ и $1 \cdot 6 \cdot 6$), не смог установить возраст сыновей, т.к. сумма возрастов при этом одинакова. Но вариант $1 \cdot 6 \cdot 6$ отпадает, т.к. в этом случае в семье не было бы одного старшего сына. Остается $2 \cdot 2 \cdot 9$.

Ответ: $2, 2, 9$ лет.