10 класс

10.1 Докажите, что $2^{12}+5^9$ число составное.

Решение:

Представим сумму в виде суммы кубов.

$$2^{12}+5^9 = (2^4)^3+(5^3)^3=(16+125)(2^8-16\cdot125+5^6)=$$
$$=141(2^8-16\cdot125+5^6).$$

Поскольку $2^{12}+5^9\neq141$, то 141 – простой делитель данного числа, значит число $2^{12}+5^9$ составное.

Доказано.

10.2 Вычислите $(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{50}})\cdot9$.

Решение:

Обозначим $x=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}$, тогда

$$x^3=\left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)^3=\left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)^3+$$
$$+3\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)=$$
$$=7-5\sqrt{2}+7+5\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(7-5\sqrt{2})(7+5\sqrt{2})}\cdot x=14+3\sqrt[3]{49-50}\cdot x=$$
$$=14-3x.$$

Таким образом, $x^3=14-3x, x^3+3x-14=0$. Подбирая целые корни этого уравнения, находим $x=2$. Далее, деля «столбиком» многочлен $x^3+3x-14$ на $x-2$, получим в частном x^2+2x-7. Поскольку квадратное уравнение $x^2+2x-7=0$ не имеет действительных корней, то $x=2$ – единственный действительный корень уравнения $x^3+3x-14=0$. Отсюда, $x=2$ и, значит, исходное выражение равно $2\cdot9=18$.

Ответ: 18.

10.3 Магазин продал в первый рабочий день месяца 105 батареек. Каждый следующий рабочий день дневная продажа возрастала на 10 батареек, и месячный план – 4000 батареек – был выполнен досрочно, причем в целое число рабочих дней. После этого ежедневно продавалось на 13 батареек меньше, чем в день выполнения месячного плана. На сколько процентов был перевыполнен месячный план продажи батареек, если в месяце 26 рабочих дней?

Решение:

Обозначим через n номер рабочего дня, тогда был выполнен месячный план продажи батареек. По условию количества батареек, проданных в первый, во второй и так далее дни составляют арифметическую прогрессию с первым членом 105 и разностью 10. Пользуясь формулой для суммы n первых членов арифметической прогрессии, получаем уравнение

$$\frac{2 \cdot 105 + 10(n-1)}{2} \cdot n = 4000,$$

которое после упрощения приводится к виду $n^2 + 20n - 800 = 0$.

Полученное квадратное уравнение имеет единственный положительный корень n=20. Это означает, что сверхплановая продажа батареек производилась в течение 26 – 20 = 6 дней. В день выполнения месячного плана было продано 105 + 10(20 – 1) = 295 батареек, а в каждый из последующих дней по условию задачи продавалось 295 – 13 = 282 батарейки. Следовательно, всего сверх плана было продано 6·282 = 1692 батарейки, что составляет

$$\frac{1692}{4000} \cdot 100\% = 42{,}3\% \text{ от плана.}$$

Ответ: месячный план был перевыполнен на $42{,}3\%$.

10.4 В треугольнике, один из углов которого равен разности двух других, длина меньшей стороны равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, в два раза больше площади описанного около треугольника круга. Найдите длину большей стороны треугольника.

Решение:

Обозначим через α наименьший угол в треугольнике и через β наибольший угол. Тогда третий угол равен $180° - \alpha - \beta$. По условию задачи $\beta - \alpha = 180° - \alpha - \beta$. Отсюда следует, что $2\beta = 180°$ или $\beta = 90°$. Значит, треугольник прямоугольный. Катет, лежащий против угла α, равен по условию 1, значит, второй катет равен $ctg\alpha$, а гипотенуза равна $\frac{1}{\sin\alpha}$.

Поэтому сумма площадей квадратов, построенных на гипотенузе и большем катете, равна

$$ctg^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит в середине гипотенузы, и ее радиус равен $\frac{1}{2\sin\alpha}$, а площадь равна $\frac{\pi}{4\sin^2\alpha}$. Пользуясь условием задачи, имеем уравнение

$$ctg^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\pi}{2\sin^2\alpha},$$

откуда $\cos^2\alpha = \frac{\pi}{2} - 1$. длина большей стороны треугольника равна

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}}$.

10.5 Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$cosx - 2\sqrt{x^2+9} \le -\frac{x^2+9}{a+cosx} - a$$

имеет единственное решение.

Решение:

$cosx + a - 2\sqrt{x^2+9} + \frac{x^2+9}{a+cosx} \le 0$, $\frac{\left|(cosx+a)-\sqrt{x^2+9}\right|^2}{a+cosx} \le 0$.

Решением получившегося неравенства будут решения уравнения $(cosx + a) = \sqrt{x^2+9}$ и неравенства $cosx + a < 0$.

Неравенство не может иметь единственного решения ни при каком значении a. Следовательно, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо, чтобы неравенство $cosx + a < 0$ не имело решений, а это будет выполнено, если $a \ge 1$. Теперь необходимо, чтобы уравнение $(cosx + a) = \sqrt{x^2+9}$ имело ровно одно решение. заметим, что если x_0 – решение уравнения, то и $-x_0$ является решением. Поэтому, для того чтобы решение было единственно, необходимо, чтобы $x = 0$ было решением. А это выполнено при $a = 2$. Тогда уравнение выглядит так $cosx + 2 = \sqrt{x^2+9}$. Его левая часть не превосходит числа3, а правая – не меньше 3. Следовательно, решение $x = 0$ – единственное решение уравнения. Вспоминая, что при $a = 2$ неравенство $cosx + a < 0$ не имеет решений, получаем ответ $a = 2$.

Ответ: $a = 2$.