10 класс

10.1 Сумма нескольких натуральных чисел, в записи каждого из которых участвуют только цифры 3 и 0, равна 555…55 (2019 пятерок). Какое наименьшее число слагаемых может быть в той сумме?

Решение:

Если данное число $N = 55\dots5$ есть сумма чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, в записи которых участвуют только цифры 3 и 0, то число $M = \frac{N}{3} = 185185\dots185$ (2019 раз) является суммой чисел

$$b_1 = \frac{a_1}{3}, b_2 = \frac{a_2}{3}, \dots, b_n = \frac{a_n}{3},$$

в записи которых участвуют только цифры 1 и 0.

Число M содержит цифру 8, поэтому $n \geq 8$. Очевидно, число M можно представить в виде суммы восьми чисел, составленных из единиц и нулей, взяв одно число, составленное из 2019 единиц, четыре числа вида 11011 ... 011 (всего цифр в числе 2018) и три числа вида 10010 … 010 (всего цифр в числе 2018).

Таким образом, минимальное количество слагаемых равно 8 ($n=8$). При этом $a_1=3b_1$, $a_2=3b_2$,…, $a_n=3b_n$.

То есть, число N можно представить в виде суммы восьми чисел, составленных из троек и нулей, взяв одно число, составленное из 2019 троек, четыре числа вида 33033 ... 033 (всего цифр в числе 2018) и три числа вида 30030 … 030 (всего цифр в числе 2018).

Ответ: 8.

10.2 В конкурсе «Веселые старты» участвовали 3 пары. Возраст участников в одной паре был одинаковый и не делился на два. Если от суммы возрастов второй пары отнять четыре года, то получится сумма возрастов первой пары, а если прибавить четыре года, то получится сумма возрастов третьей пары. Если возраста в каждой паре перемножить и полученные числа сложить, то эта сумма будет равна четырехзначному числу, все цифры которого одинаковы. Сколько лет каждому участнику?

Решение:
Если сумма возрастов участников второй пары больше на 4 суммы возрастов первой пары, то возраст каждого участника первой пары на 2 года меньше возраста участника из второй пары. Аналогично из третьей пары каждый на 2 года старше участников из второй пары.

Обозначим возраст участников из второй пары за x. Тогда для первой пары возраст каждого из участников будет $x-2$, а для третьей пары $x+2$. Произведение возрастов в каждой паре есть квадрат чисел $x-2$, x, $x+2$. Можно записать $(x-2)^2+x^2+(x+2)^2=****$, где звездочкой обозначена некоторая цифра. Упростим это выражение $3x^2+8=****$.

Так как возраст ни одного из участников не кратен двум, то числа $x-2$, x, $x+2$ нечетные. Квадраты нечетных чисел являются тоже нечетными. Поэтому, неизвестным четырехзначным числом может быть либо 1111, или 3333, или 7777, или 9999.

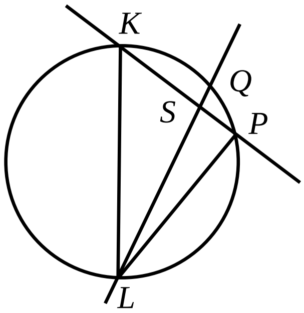
Число $3x^2+8$ не кратно 3, значит, из дальнейшего рассмотрения можно исключить числа 3333 и 9999. Если к числу $3x^2+8$ прибавить 1, то получится число, кратное 3. Из чисел 1112, 5556 и 7778 только 5556 кратно 3. В результате получаем $3x^2+8=5555$, $x^2=1849$ и $x=43$, то есть участникам из первой пары было по 41 году, из второй пары – по 43 года, из третьей – по 45 лет.

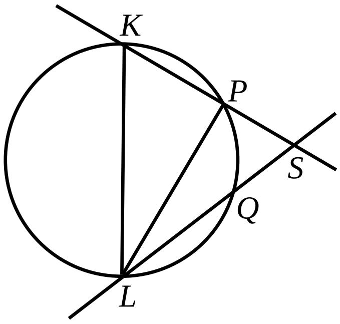
Ответ: 41, 43, 45.

10.3 Отрезок KL является диаметром некоторой окружности. Через концы K и L проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках P и Q, лежащих по одну сторону от прямой KL. Найдите радиус окружности, если $\angle PKL=60^\circ$ и точка пересечения прямых KP и QL находится от точек P и Q на расстоянии, равном 1.

Решение:

Из условия задачи следует, что точка S, в которой пересекаются прямые KP и QL, отлична от точек P и Q. Значит, и точки P и Q различны. Рассмотрим два случая расположения точек P и Q на окружности.





Докажем, что случай изображенный на первом рисунке невозможен. Действительно, в этом случае углы PQL и PKL опираются на одну дугу. Значит, $\angle PQL = \angle PKL = \frac{\pi}{3}$. по условию треугольник PSQ – равнобедренный, следовательно, $\angle SPQ = \angle PQL = \frac{\pi}{3}$ и $\angle KSL = \angle QSP = \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. Но угол KSL является внешним углом прямоугольного треугольника PSL ($\angle KPL$ опирается на диаметр). Получаем противоречие $\frac{\pi}{3} = \angle KSL > \angle SPL = \frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим случай, изображенный на втором рисунке. Так как четырехугольник $KPQL$ вписан в окружность, то $\angle PQL = \pi - \angle PKL$. Значит, $\angle PQL = \frac{2\pi}{3}$. Но тогда $\angle PQS = \pi - \angle PQL = \frac{\pi}{3}$. Треугольник PQS по условию равнобедренный. Следовательно, $\angle QPS = \angle PQS = \frac{\pi}{3}$ и $\angle PSQ = \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. Треугольники PSL и PKL прямоугольные, поскольку $\angle KPL$ опирается на диаметр. Таким образом,

$$PL = PS \cdot tg\angle PSQ = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$

$$KL = \frac{PL}{sin\angle PKL} = \sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,$$

и значит, радиус окружности равен $\frac{1}{2}KL = 1$.

Ответ: 1.

10.4 Найдите число членов арифметической прогрессии, у которой отношение суммы первых тринадцати членов к сумме последних тринадцати членов равно $\frac{1}{2}$, а отношение суммы всех членов без первых трех к сумме всех членов, без последних трех равно $\frac{4}{3}$.

Решение:

Пусть a – первый член арифметической прогрессии, d – её разность, n – число её членов.

Тогда $\frac{a+(a+12d)}{2} \cdot 13 = 13(a+6d)$ – сумма первых тринадцати членов.

$\frac{(a+(n-13)d)+(a+(n-1)d)}{2} \cdot 13 = 13(a+(n-7)d)$ – сумма последних тринадцати членов,

$\frac{(a+3d)+(a+3d+(n-4)d)}{2} \cdot (n-3) = \frac{2a+(n+2)d}{2}(n-3)$ – сумма всех членов без первых трёх,

$\frac{a+a+(n-4)}{2} \cdot (n-3) = \frac{2a+(n-4)d}{2}(n-3)$ – сумма всех членов без последних трёх.

Согласно условиям задачи составляем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a+6d}{a+(n-7)d} = \frac{1}{2}, \\ \frac{2a+(n+2)d}{2a+(n-4)d} = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений относительно n:

$$\begin{cases} 2a+12d = a+(n-7)d, \\ 6a+3(n+2)d = 8a+4(n-4)d. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = (n-19)d, \\ -2a = (n-22)d \end{cases} (a \neq 0, d \neq 0)$$

$$\frac{n-19}{n-22} = \frac{-1}{2},\ 2n-38 = -(n-22),\ n = 20.$$

Ответ: 20.

10.5 При каких положительных значениях a уравнение

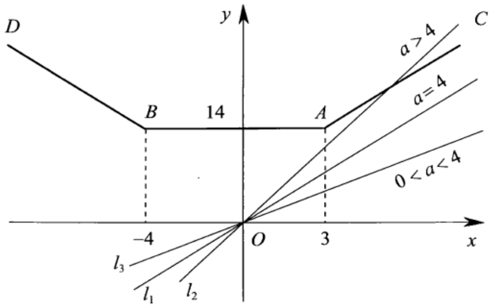
$$|2x + 8| + |2x - 6| = ax$$

имеет одно решение?

Решение:

Нарисуем графики функций $y_1 = |2x + 8| + |2x - 6|$, $y_2 = ax$. График $y_2 = ax$ при каждом a представляет собой прямую, проходящую через начало координат. Для построения $y_1 = |2x + 8| + |2x - 6|$ разобъем его на промежутки $(-\infty;\ -4), (-4; 3), (3; +\infty)$ и получим функцию

$$y_1 = \begin{cases} -4x - 2, x \in (-\infty;\ -4], \\ 14, x \in (-4; 3], \\ 4x + 2, x \in (3; +\infty). \end{cases}$$



Итак, нам надо найти положительные значения a, при которых графики y_1и y_2 не пересекаются. До того, как прямая $y_2 = ax$ пройдет через точку A, она уже может пересечься с ветвью AC графика y_1. Именно этот случай и имеет место в нашей задаче.

Действительно, ветвь AC имеет уравнение $y_1 = 4x + 2$. Поэтому прямая $y_2 = ax$ будет параллельна этой ветви при $a = 4$. Следовательно, при любом $a > 4$ прямая $y_2 = ax$ будет пересекаться с правой ветвью $y_1 = 4x + 2$. Из сказанного ясно, что при $a > 4$ уравнение имеет одно решение, а не имеет оно решений при $0 < a \leq 4$.

Ответ: при $a > 4$.