10 класс

10.1 Решите в целых числах уравнение

$$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots+\sqrt{x}}}}}}_{2020}=y.$$

Решение:

Пусть x и y – целые числа, удовлетворяющие условию. После ряда возведений в квадрат убеждаемся, что $\sqrt{x+\sqrt{x}}=m$ и $\sqrt{x}=k$ – целые числа, причем

$$m^2=k(k+1).$$

Если $k>0$, то должно быть $k^2<m^2<(k+1)^2$, тогда $k<m<k+1$ и поэтому m – не целое число. Значит, $k=0$, то есть $x=0$, значит и $y=0$.

Ответ: $x=y=0$.

10.2 Запишем рациональные положительные числа в виде последовательности

$$\frac{1}{1};\ \frac{2}{1},\frac{1}{2};\ \frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3};\ \frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4};\ \dots\ .$$

Найдите номер места, на котором стоит $\frac{2020}{2019}$.

Решение:

Заметим, что у первого члена сумма числителя и знаменателя равна 2, у двух следующих – 3, у трех следующих – 4, у четырех следующих – 5 и т. д. Наше число стоит на 2019 месте в группе чисел с суммой числителя и знаменателя, равной 4039. Количество чисел до этой группы равно

1 + 2 + 3 + … + 4037= $\frac{1+4037}{2}\cdot 4037=2019\cdot 4037=8150703$ (с суммой 4038 в группе 4037 слагаемых). Отсюда n = $2019\cdot 4037+2019=8152722$.

Ответ: 8152722 или $2019\cdot 4037+2019$.

10.3 При каких a неравенство

$$\sin^4 x + \cos^4 x > a \sin x \cos x$$

выполнено при всех x ?

Решение:

Преобразуем левую часть неравенства

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

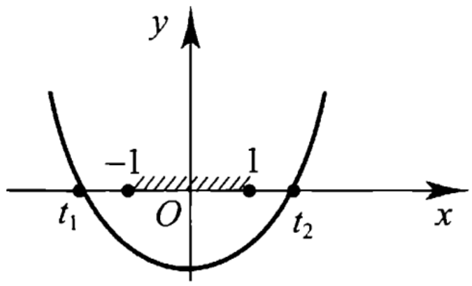
Правая часть неравенства $a \sin x \cos x = \frac{a}{2}\sin 2x$.

Обозначая $t = \sin 2x$ имеем $1 - \frac{1}{2}t^2 > \frac{a}{2}t$; $2 - t^2 > at$;

$$t^2 + at - 2 < 0,$$

где $t \in [-1; 1]$. Наша задача свелась к следующей: найти все a, при которых последнее неравество выполняется при всех $t \in [-1; 1]$.

Это будет иметь место только в случае, когда отрезок $[-1; 1]$ находится между корнями квадратного трехчлена $f(t) = t^2 + at - 2$.



Последнее же будет иметь место при выполнении условий:

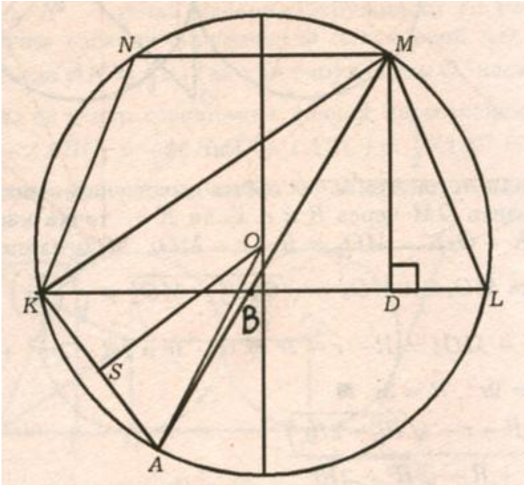
$$\begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) < 0; \end{cases} \begin{cases} 1 + a - 2 < 0, \\ 1 - a - 2 < 0; \end{cases} \begin{cases} a < 1, \\ a > -1, \end{cases} \Rightarrow a \epsilon (-1; 1).$$

Ответ: $a\epsilon(-1; 1)$.

10.4 В окружность с центром O вписана трапеция $KLMN$, в которой $KL \| MN$, $KL = 8$, $MN = 2$, $\angle NKL = 45^\circ$. Хорда MA окружности пересекает отрезок KL в точке B такой, что $KB = 3$. Найдите расстояние от точки O до прямой AK.

Решение:

Проведем высоту MD трапеции.



$$DL = \frac{1}{2}(KL - MN) = \frac{1}{2}(8 - 2) = 3 = MD,$$

так как $\angle MLK = \angle NKL = 45°$ и из прямоугольного треугольника MDL имеем $ML = \sqrt{DL^2 + MD^2} = 3\sqrt{2}$. Аналогично, $KM = \sqrt{KD^2 + MD^2} = \sqrt{34}$, но по теореме синусов из треугольника KNM полуим $KM = 2R\sin 135° = \sqrt{34}$, откуда $R = \frac{\sqrt{34}}{2\sin 135°} = \frac{\sqrt{34}}{2\sin 45°} = \sqrt{17}$. Из подобия треугольников BKA и BML выводим $\frac{KA}{ML} = \frac{KB}{BM}$, то есть $KA = \frac{KB \cdot ML}{BM}$, но $BM = \sqrt{BD^2 + MD^2} = \sqrt{13}$, поэтому $KA = \frac{3 \cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{13}} = 9\sqrt{\frac{2}{13}}$. Если теперь S – середина хорды AK, то прямоугольного треугольника ASO получаем

$$OS = \sqrt{OA^2 - SA^2} = \sqrt{R^2 - \frac{KA^2}{4}} = \sqrt{17 - \frac{81 \cdot 2}{13 \cdot 4}} = \sqrt{\frac{361}{26}} = \frac{19\sqrt{26}}{26}.$$

Ответ: $\frac{19\sqrt{26}}{26}$.

10.5 В конкурсе «Мисс мира» участвуют 100 девушек. Известно, что среди любых 12 из них найдутся двое, которые знакомы между собой. Докажите, что как бы ни раздали участницам номера (не обязательно от 1 до 100), найдутся две знакомые девушки, номера которых начинаются с одинаковой цифры.

Решение:

Обозначим через N_i, где $i = 1,2,3, \dots ,9$, количество участниц, номера которых начинаются с цифры i. Достаточно доказать, что при некотором значении $i = i_0$ выполняется неравенство $N_{i_0} \geq 12$; действительно, тогда по условию найдутся две знакомые участницы, номера которых начинаются с цифры i.

Предположим противное, то есть, что $N_i \leq 11$ при всех $i = 1,2,3, \dots ,9$. Тогда $N_1 + N_2 + \cdots + N_9 \leq 99$. Сумма в левой части неравенства равна общему числу участниц, участвующих в конкурсе; это противоречит тому, что в конкурсе участвуют 100 девушек.

Доказано.