10 класс

10.1 Вычислите значение выражения $\dfrac{2a^{-2}-\dfrac{a^{-3}}{2}}{a^{-2,5}-\dfrac{1}{2}a^{-3}}+\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}-a^{-2}}{a^{-1}+a^{-1,5}+a^{-2}}$ при $a=2016$.

Решение:

Умножим числитель и знаменатель первой дроби на $2a^3$, а второй на a^2

$$\frac{\left(2a^{-2}-\dfrac{a^{-3}}{2}\right)\cdot 2a^3}{\left(a^{-2,5}-\dfrac{1}{2}a^{-3}\right)\cdot 2a^3}+\frac{\left(a^{-\frac{1}{2}}-a^{-2}\right)\cdot a^2}{\left(a^{-1}+a^{-1,5}+a^{-2}\right)\cdot a^2}=\frac{(4a-1)}{(2\sqrt{a}-1)}+\frac{\left(\left(\sqrt{a}\right)^3-1\right)}{\left(a+\sqrt{a}+1\right)}=$$

$$=\frac{(2\sqrt{a}-1)(2\sqrt{a}+1)}{(2\sqrt{a}-1)}+\frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{(a+\sqrt{a}+1)}=2\sqrt{a}+1+\sqrt{a}-1=3\sqrt{a}=3\sqrt{2016}=36\sqrt{14}.$$

Ответ: $36\sqrt{14}$.

10.2 Решите уравнение:

$$\left|cos\left(x+\frac{15\pi}{2}\right)\right|=2sin\left(x+\frac{9\pi}{2}\right)-sin(x+17\pi).$$

Найдите корни, принадлежащие области определения функции

$y=\sqrt{cos\frac{x}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Решение:

Применяя формулы приведения, получим уравнение $|sinx|=sinx+2cosx$.

Рассмотрим два случая:

1) Пусть $sinx\geq 0,$ тогда $|sinx|=sinx$ и $sinx=sinx+2cosx$, т.е. $cosx=0$. Отсюда $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, а с учетом условия $sinx\geq 0$: $x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

2) Пусть $sinx<0,$ тогда $|sinx|=-sinx$ и $-sinx=sinx+2cosx$, т.е.

$sinx = -cosx=0$. Отсюда $tgx = -1$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, а с учетом условия $sinx<0$: $x_2=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$. Далее область определения функции $y=\sqrt{cos\frac{x}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

определяется равенством $cos\frac{x}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ge 0, cos\frac{x}{4}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда $-\frac{\pi}{4}+2\pi m\le\frac{x}{4}\le\frac{\pi}{4}+2\pi m$, или $-\pi+8\pi m\le x\le\pi+8\pi m$.

Подставим теперь в полученное неравенство найденные решения:

$$-\pi+8\pi m\le\frac{\pi}{2}+2\pi n\le\pi+8\pi m$$

$$-\frac{3}{4}+4m\le n\le\frac{1}{4}+4m$$

$$n=4m$$
$$x=\frac{\pi}{2}+8\pi n$$

Для второго:

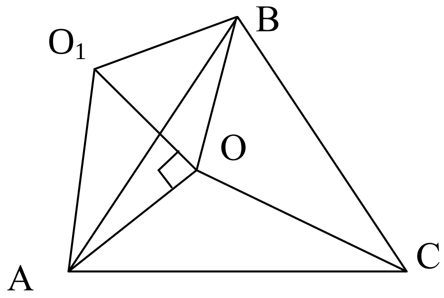
$$-\pi+8\pi m\le-\frac{\pi}{4}+2\pi n\le\pi+8\pi m$$
$$-\frac{3}{8}+4m\le n\le\frac{5}{8}+4m$$
$$n=4m$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+8\pi n$$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}+8\pi n, x_2=-\frac{\pi}{4}+8\pi n, n\in Z$.

10.3 Внутри правильного треугольника ABC выбрана точка O так, что $AO^2+BO^2=CO^2$. Найдите угол AOB.

<u>Решение:</u>



Выберем точку O_1 так, чтобы BOO_1 был правильным треугольником и точки O_1 и C находились по разные стороны относительно прямой, проходящей через B и O. Треугольники BOC и ABO_1 равны, так как $AB=BC$ (по условию), $BO=BO_1$ (по построению), $\angle OBC = \angle O_1BA$ (дополняются одним и тем же углом до 60°). Следовательно $AO_1=OC$. Но по условию $AO^2 + OO_1^2 = AO^2 + BO^2 = CO^2 = AO_1^2$. Поэтому AOO_1 – прямоугольный треугольник и $\angle AOB = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.

Ответ: 150°.

10.4 Число БАОБАБ, где одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры, делится на 101. Найдите все такие числа.

Решение:

Нужно разложить число БАОБАБ по степеням 10 и в полученной сумме выделить слагаемые, делящиеся на 101, например, $10^2 = (10^2 + 1) - 1$ и т.д.

$$Б \cdot 10^5 + А \cdot 10^4 + О \cdot 10^3 + Б \cdot 10^2 + А \cdot 10 + Б =$$

$$= Б \cdot (10^5 + 1000) - 1000Б + А \cdot (10^4 + 100) - 100А + О \cdot (10^3 + 10) - 10О +$$

$$+ Б \cdot (10^2 + 1) - Б + 10А + Б =$$

$$= 101000Б - 1000Б + 10100А - 100А + 1010О - 10О + 101Б + 10А =$$

$$= 101 \cdot (1000Б + 100А + 10О + Б) - 1000Б - 100А - 10О + 10А =$$

$$= 101 \cdot (1000Б + 100А + 10О + Б) - 10(100Б + 9А + О)$$

Первое слагаемое делится на 101. Чтобы число делилось на 101, надо чтобы $10(100Б + 9А + О)$ делилось на 101.

Возможно:

$Б = 9$, $А = 1$, $О = 0$, то есть число 910919.

Ответ: 910919.

10.5 Два брата продали стадо овец, выручив за каждую овцу столько рублей, сколько было в стаде овец. Желая разделить выручку поровну, они поступили следующим образом: каждый брат, начиная со старшего, брал из общей суммы по 10 рублей. После того, как в очередной раз старший брат взял 10 рублей, остаток от выручки оказался меньше 10 рублей. Желая его компенсировать, старший брат отдал младшему свой нож. Во сколько рублей был оценен нож? (Все суммы денег – целое количество рублей).

Решение:

Пусть n – число овец, стоимость ножа – *a,* остаток при дележке денег – *t,* *k*- число взятий десятирублевок при дележе денег. Тогда получим систему:

$$\begin{cases} n^2 = 10k + t \\ 10 - a = a + t \\ 0 < t < 10 \end{cases}$$

$$(k, a, n, t \in N, k - \text{нечетное})$$

Из второго уравнения получаем $a = \frac{10-t}{2}$. Следовательно, *t*- четное число. Тогда из первого уравнения получаем, что и n- четное число. Обозначив число десятков числа n за m,рассмотрим 5 вариантов:

1) $n = 10m$. Тогда $n^2 = 100m^2$. В этом случае сумма была бы разделена поровну.

2) $n = 10m + 2$. Тогда $n^2 = 100m^2 + 40m + 4 = 10(10m^2 + 4m) + 4$. В этом случае число $k = 10m^2 + 4m$ оказалось бы четным.

3) $n = 10m + 4$. Тогда $n^2 = 100m^2 + 80m + 16 = 10(10m^2 + 8m + 1) + 6$. В этом случае противоречия не возникает и остаток *t*= 6.

4) $n = 10m + 6$. Тогда $n^2 = 100m^2 + 120m + 36 = 10(10m^2 + 12m + 3) + 6$. В этом случае противоречия не возникает и остаток *t*= 6.

5) $n = 10m + 8$. Тогда $n^2 = 100m^2 + 160m + 64 = 10(10m^2 + 16m + 6) + 4$. Этот случай невозможен по тем же причинам, что и случай 2).Т.о., остаток всегда будет равен 6 рублей. Тогда из второго уравнения системы получим *a*=2.

Ответ: 2 рубля.