10 класс

10.1 Если некоторое двузначное число умножить на сумму его цифр, то получится 405. Если число, написанное теми же цифрами в обратном порядке, умножить на сумму его цифр, то получится 486. Найдите это число.

Решение:

Запишем искомое число в виде $10x + y$, где x– цифра в разряде десятков, y – цифра в разряде единиц десятичной записи числа. Условие задачи запишем в виде системы уравнений

$$\begin{cases}(10x + y)(x + y) = 405,\\(10y + x)(x + y) = 486,\end{cases}$$

откуда

$$\frac{(10x + y)}{(10y + x)} = \frac{5}{6},$$

$$x = \frac{4y}{5}.$$

Подставив в первое уравнение системы, получим $y^2 = 25, y = 5$ (y = –5 не удовлетворяет условию задачи). Далее находим x = 4.

Ответ: 45.

10.2 Разность

$$\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$$

является целым числом. Если да, то найдите это число.

Решение:

Так как $\sqrt{3200} < \sqrt{3249}$, $\sqrt{2 \cdot 40^2} < \sqrt{57^2}, 40\sqrt{2} < 57$, то

$$|40\sqrt{2} - 57| = 57 - 40\sqrt{2}.$$

Если $a \in \mathbb{Z}$, то $a^2 \in \mathbb{Z}$. Возведем это число в квадрат, получим

$$\left(\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}\right)^2 =$$

$$= |40\sqrt{2} - 57| - 2\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|(40\sqrt{2} + 57)} + (40\sqrt{2} + 57) =$$

$$= 57 - 40\sqrt{2} - 2\sqrt{57^2 - (40\sqrt{2})^2} + 40\sqrt{2} + 57 =$$

$$= 114 - 2\sqrt{49} = 114 - 14 = 100.$$

То есть квадрат числа равен целому числу 100, а значит само число тоже целое, и может быть равно –10 или 10. Так как $40\sqrt{2} + 57 > \left|40\sqrt{2} - 57\right|$, то

$$\sqrt{\left|40\sqrt{2} - 57\right|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57} < 0.$$

Это означает, что искомое число –10.

Ответ: –10.

10.3 В клетки таблицы, размером 20×20, поставлены точки желтого и зеленого цвета. Если две точки, окрашенные в один цвет, оказываются в соседних клетках в некоторой строке или столбце, они соединяются отрезком того же цвета. Соседние точки разного цвета соединяются отрезками черного цвета. Среди точек 219 желтых, 39 из которых находятся в клетках на границе квадрата, но ни одна не находится в углу. Проведено также 237 черных отрезков. Сколько зеленых отрезков?

Решение:

В каждой строке находится 19 отрезков, таким образом, получаем $19 \cdot 20 = 380$ горизонтальных отрезков. Столько же и вертикальных, в результате их общее число равно 760. Так как 237 из них – черные, то остальные 523 – зеленые или желтые.

Обозначим через k количество желтых отрезков и посчитаем, столько раз желтые точки являются концами отрезков. Каждый черный отрезок имеет один красный конец, а у каждого желтого отрезка оба конца желтые, поэтому всего

$$237 + 2k \text{ желтых концов.}$$

Но 39 желтых точек находятся на границе и являются концами трех отрезков, а каждая из остальных 180 желтых точек находится внутри, и являются концами четырех отрезков. Таким образом, количество случаев, в которых желтая точка является концом отрезка, равно

$$39 \cdot 3 + 180 \cdot 4 = 837.$$

Поэтому

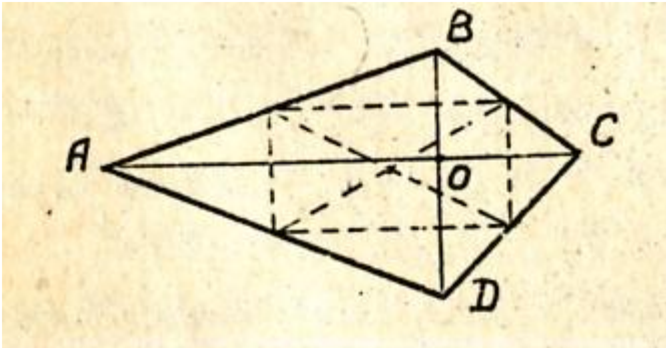
$$237 + 2k = 837 \text{ и } k = 300.$$

Количество зеленых отрезков тогда равно 523 – 300 = 223.

Ответ: 223 зеленых отрезка.

10.4 Найдите площадь выпуклого четырехугольника *ABCD*, у которого *AC* = 2, *BD* = 1, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны.

Решение:



Отрезки, соединяющие середины сторон четырехугольника, параллельны его диагоналям и образуют параллелограмм (см. рис.). Так как этот параллелограмм имеет равные диагонали, то он является прямоугольником. Следовательно, диагонали четырехугольника ABCD перпендикулярны. Если O – их точка пересечения, то его площадь равна

$$\frac{1}{2}AC\cdot OB+\frac{1}{2}AC\cdot OD=\frac{1}{2}AC(OB+OD)=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1.$$

Ответ: 1.

10.5 Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{ax-a(1-a)}{a^2-ax-2}>0$$

выполнено для любых значений переменной *x* из отрезка $[-1;1]$.

Решение:

Поскольку частное двух чисел положительно в том и только том случае, если положительно их произведение, данное неравенство можно переписать в виде

$$\big(ax-a(1-a)\big)(a^2-ax-2)>0.$$

Пусть $f(x)=\big(ax-a(1-a)\big)(a^2-ax-2), x_1$ и x_2 $(x_1\le x_2)$ – корни квадратного трехчлена $f(x)$.

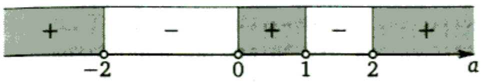
Заметим, что коэффициент при x^2 в выражении $f(x)$ равен $-a^2$ и, следовательно, неположителен. Если он равен 0 ($a = 0$), то неравенство принимает вид 0 > 0 и не имеет решений. Если $a\neq 0$, ветви параболы, являющейся графиком функции $y=f(x)$, направлены вниз, и задачу можно переформулировать так: найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $f(x) > 0$ выполняется для любого значения x из отрезка $[-1; 1]$. Последнее имеет место если

$$\begin{cases} f(-1) > 0, \\ f(1) > 0, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} (a^2 - 2a)(a^2 + a - 2) > 0, \\ a^2(a^2 - a - 2) > 0. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы, приведя его к виду

$$a(a-2)(a-1)(a+2) > 0$$

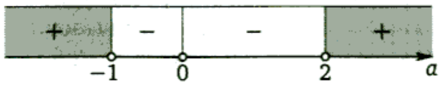
и применив метод интервалов



Решение первого неравенства системы $a \in (-\infty;\ -2) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$.
Решим второе неравенство системы, приведя его к виду

$$a^2(a-2)(a+1) > 0$$

И применив метод интервалов



Решением второго неравенства $a \in (-\infty;\ -1) \cup (2; +\infty)$.
Решение системы $a \in (-\infty;\ -2) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty;\ -2) \cup (2; +\infty)$.