10 класс

10.1 Выражение $5^{5n+1}+4^{5n+2}+3^{5n}$ делится на 11 при любом натуральном n. Докажите это.

Решение:

Преобразуем выражение

$5^{5n+1}+4^{5n+2}+3^{5n}=5\cdot 3125^n+16\cdot 1024^n+243^n=5\cdot(11\cdot 284+1)^n+$
$+16\cdot(11\cdot 93+1)^n+(11\cdot 22+1)^n$.

Применим формулу

$$(11\cdot 93+1)^n=$$
$$=11\left(11^{n-1}93^n+n\cdot 11^{n-2}\cdot 93^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}11^{n-3}\cdot 93^{n-2}+\cdots+93n\right)+1=$$
$$=11\cdot A+1$$

Аналогично для $(11\cdot 284+1)^n=11\cdot B+1$, $(11\cdot 22+1)^n=11\cdot C+1$.

Тогда

$$5\cdot(11\cdot 284+1)^n+16\cdot(11\cdot 93+1)^n+(11\cdot 22+1)^n=$$
$$=5(11\cdot B+1)+16(11\cdot A+1)+(11\cdot C+1)=$$
$$=11(5B+16A+C)+5+16+1=$$
$$=11(5B+16A+C+2).$$

Так как в полученном выражении A, B, C – целые числа, тогда данное выражение делится на 11.

Доказано.

10.2 Найдите значение выражения

$$\frac{b^2}{b^4+4},$$

если известно, что $\frac{1}{b}+\frac{b+1}{2}=3{,}5$.

Решение:

$$\frac{1}{b}+\frac{b}{2}+\frac{1}{2}=3{,}5,$$
$$\frac{1}{b}+\frac{b}{2}=3,$$
$$\left(\frac{1}{b}+\frac{b}{2}\right)^2=9,$$
$$\frac{1}{b^2}+2\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{b}{2}+\frac{b^2}{4}=9,$$
$$\frac{1}{b^2}+1+\frac{b^2}{4}=9,$$

$$\frac{4+b^4}{4b^2}=8,$$
$$\frac{4+b^4}{b^2}=32,$$
$$\frac{b^2}{4+b^4}=\frac{1}{32}.$$

Ответ: $\frac{1}{32}$.

10.3 На стене висят двое часов. Первые часы отстают на одну минуту в час. Вторые часы идут вперед первых на одну минуту в час. В полдень на первых и вторых часах поставили точное время. Какое время будут показывать вторые часы через сутки?

Решение:
За 1 ч первые часы отстанут на 1 минуту. Значит, скорость первых часов составляет от скорости точных часов $\frac{59}{60}$. Скорость вторых часов составляет $\frac{61}{60}$ скорости первых часов, а тогда по сравнению с точными $\frac{59}{60}\cdot\frac{61}{60}=\frac{3599}{3600}$. То есть, за 1 час вторые часы отстают от точного времени на одну секунду. Таким образом, ровно через сутки по точным часам вторые часы будут показывать 11 ч 59 мин 36 с.

Ответ: 11 ч 59 мин 36 с.

10.4 Решите систему уравнений

$$\begin{cases}10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0,\\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0.\end{cases}$$

Решение:
Перепишем первое уравнение системы так
$$10x^2-(2y+38)x+5y^2-6y+41=0.$$
Решим его относительно x.
$$D=(2y+38)^2-40(5y^2-6y+41)=-4\cdot 49(y-1)^2.$$

Уравнение будет иметь решение только при $y = 1$. Подставив это значение в уравнение, получим $10x^2 - 40x + 40 = 0 \Longrightarrow x = 2$. Подставим найденные значения во второе уравнение системы.

$$3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 2 \cdot 1 - 17 \cdot 2 - 6 \cdot 1 + 20 = 0$$

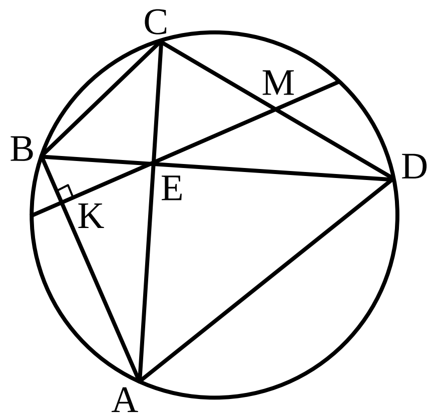
$$12 - 2 + 10 - 34 - 6 + 20 = 0$$

$0 = 0$ – верно.

Ответ: (2;1).

10.5 Около четырехугольника *ABCD* описана окружность. Диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке *E*. Прямая, проходящая через точку *E* и перпендикулярная к *AB*, пересекает сторону *CD* в точке *M*. Найдите *EM*, если *AD* = 8, *AB* = 4 и $\angle CDB = \alpha$.

<u>Решение:</u>



Обозначим через *K* точку пересечения прямых *AB* и *EM*. Поскольку углы *CDB* и *CAB* опираются на одну дугу, то $\angle CAB = \angle CDB = \alpha$. Из равенства $\angle DCE + \angle CDB = \frac{\pi}{2}, \angle KEA + \angle CAB = \frac{\pi}{2}$ следует, что $\angle DCE = \angle KEA = \angle CEM$. Но это означает, что треугольник CEM равнобедренный, то есть *CM* = *EM*. $\angle MED = \frac{\pi}{2} - \angle CEM = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \alpha = \angle CDB$. Треугольник *EMD* равнобедренный *DM* = *EM*. Следовательно, *CM* = *DM* или *EM* – медиана треугольника *CED*.

Из прямоугольного треугольника *ABE* находим $AE = AB cos\angle CAB = 4\, cos\alpha$. Из прямоугольного треугольника *AED* по теореме Пифагора получаем $ED = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{64 - 116cos^2\alpha} = 4\sqrt{4 - cos^2\alpha}$ и

$$EM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\frac{ED}{cos\alpha} = 2\sqrt{\frac{4}{cos^2\alpha} - 1} = 2\sqrt{4tg^2\alpha + 3}.$$

Ответ: $2\sqrt{4tg^2\alpha + 3}$.