10 класс

10.1 Упростите выражение

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}.$$

<u>Решение:</u>

Преобразуем выражение по действиям.

$$\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}=\sqrt[4]{\left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(3+2\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\sqrt[4]{\left(2-2\sqrt{2}+1\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)}=\sqrt[4]{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)}=\sqrt[4]{9-8}=1\ .$$

Аналогично $\sqrt{\sqrt{2}+1}\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}=1.$

$$\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}=\sqrt[3]{x\sqrt{x}+12\sqrt{x}-6x-8}=$$

$$=\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}\right)^3-3\left(\sqrt{x}\right)^2\cdot 2+3\cdot 2^2\sqrt{x}-2^3}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-2\right)^3}=\sqrt{x}-2.$$

$$\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}.$$

Подставляя все в исходное выражение, получим

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}=\frac{1+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}=1.$$

Ответ: 1.

10.2 Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, второй член которой равен 6, а сумма ее в 8 раз меньше суммы квадратов ее членов.

<u>Решение:</u>

Пусть q – знаменатель данной бесконечно убывающей геометрической прогрессии, тогда $\frac{6}{q}$ – первый член этой прогрессии.

$S=\frac{\frac{6}{q}}{1-q}$ – сумма ее членов и $S_1=\frac{\left(\frac{6}{q}\right)^2}{1-q^2}$ – сумма квадратов членов данной прогрессии.

Согласно условию задачи имеем уравнение

$$8 \cdot \frac{\frac{6}{q}}{1-q} = \frac{\left(\frac{6}{q}\right)^2}{1-q^2}.$$

Решим это уравнение

$$\frac{\frac{6}{q}}{1-q}\left(8 - \frac{\frac{6}{q}}{1+q}\right) = 0, \frac{\frac{6}{q}}{1-q} \neq 0.$$

Отсюда $8 - \frac{\frac{6}{q}}{1+q} = 0$; $\quad 4 - \frac{3}{q(1+q)} = 0$; $\quad 4q^2 + 4q - 3 = 0$; $q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = -\frac{3}{2}$.
$q_2 = -\frac{3}{2}$ – посторонний корень, так как прогрессия с таким знаменателем не будет убывающей.
Теперь найдем сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

$$S = \frac{\frac{6}{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{1}{2}} = 24.$$

Ответ: 24.

10.3 Найдите значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a), \\ (x+y)^2 = 14 \end{cases}$$

имеет два решения.

Решение:
Если $(x_0; y_0)$ – решение данной системы, то $(-x_0; -y_0), (y_0; x_0), (-y_0; -x_0)$ также являются решениями этой системы. Два решения будут, если $y_0 = x_0$ или $-y_0 = x_0$.

При $y = x$ система примет вид $\begin{cases} 2x^2 = 2(1+a), \\ 4x^2 = 14; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2{,}5, \\ 2x^2 = 7. \end{cases}$

Допустимое значение параметра a равно 2,5.

При $x = -y$ система примет вид $\begin{cases} x^2 = 1 + a, \\ 0 = 14; \end{cases}$ и не имеет решения.

Проверка. При $a = 2{,}5$ исходная система примет вид

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7, \\ (x+y)^2 = 14; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7, \\ 2xy = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-y)^2 = 0, \\ (x+y)^2 = 14; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = \frac{7}{2}, \\ x = y; \end{cases}$

$\left(\sqrt{\frac{7}{2}}; \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$; $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}; -\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ – два решения.

Ответ: $a = 2{,}5$.

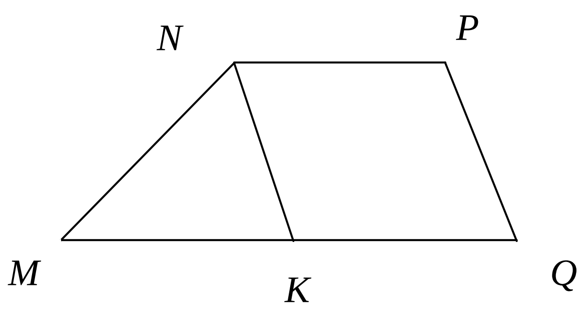
10.4 Доярка разливает молоко по бидонам. Она распределила молоко поровну по всем бидонам. Неожиданно принесли еще один пустой бидон, и она опять перераспределила молоко поровну, но теперь в каждом бидоне оказалось на 15 л меньше, чем в прошлый раз. Когда принесли еще один бидон, молоко снова перераспределили, опять везде поровну, но в этот раз еще на 9 л меньше. Сколько литров молока было у доярки и сколько, в конце концов, было у нее бидонов?

Решение:
Обозначим через N количество литров молока у доярки, через f – количество бидонов, которые принесли ей сначала, через p – количество литров молока, которое доярка налила в каждый бидон сначала. Мы можем написать три уравнения:
1) $N = fp$ – пока не принесли два последних бидона
2) $N = (f + 1)(p - 15)$ – до того как принесли последний бидон
3) $N = (f + 2)(p - 15 - 9)$ – после того как принесли все бидоны
Преобразуем все три уравнения, раскрыв скобки:
1) $N = fp$
2) $N = fp - 15f + p - 15$
3) $N = fp - 24f + 2p - 48$
Внимательный взгляд на полученные уравнения позволяет сделать вывод:
1) $-15f + p - 15 = 0$
2) $-24f + 2p - 48 = 0$
Из первого уравнения удается найти $p = 15f + 15$, подставляем это во второе уравнение, $-24f + 2(15f + 15) - 48 = 0 \Leftrightarrow 6f - 18 = 0 \Leftrightarrow f = 3$. Итак, вначале у доярки было 3 бидона, т.е. всего у нее в конце было 5 бидонов. Найдем количество литров молока N у доярки: $p = 15f + 15 = 60$, окончательно $N = fp = 60 \cdot 3 = 180$.

Ответ: 180 литров, 5 бидонов.

10.5 Основание MQ трапеции $MNPQ$ равно $6\sqrt{3}$, а длина основания NP равна $\sqrt{3}$. Угол $\angle M = 15°$, $\angle Q = 45°$. Найдите длину боковой стороны MN.

Решение:



Проведем NK параллельно PQ. Заметим $KQ||NP$, $KN||$ PQ, следовательно, $KNPQ$ параллелограмм и KQ = NP = $\sqrt{3}$. MQ – секущая параллельных прямых NK и PQ, следовательно, $\angle MKN = \angle MQP = 45°$.
Далее найдем длину отрезка MK = MQ – KQ = $6\sqrt{3}-\sqrt{3}=5\sqrt{3}$. Боковую сторону MN теперь можно найти по теореме синусов для треугольника MNK:
$\frac{MK}{\sin\angle MNK}=\frac{MN}{\sin\angle MKN}$. При этом $\angle MNK = 180° – 45° – 15° = 120°$.
И $sin120° = \sqrt{3}/2$. Теперь можно найти

$$MN = \frac{MK \cdot sin\angle MKN}{sin\angle MNK} = \frac{5\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 5\sqrt{2}.$$

Ответ: $5\sqrt{2}$.