10 класс

10.1 Докажите, что число $28^{2017}+18^{2017}$ делится на 23.

Решение:
Представим 28 = 23 + 5, 18 = 23 – 5, тогда получим $28^{2017}+18^{2017}=(23+5)^{2017}+(23-5)^{2017}$. Применяя формулу бинома Ньютона, данное число можно представить в виде
$(23+5)^{2017}+(23-5)^{2017}=23\cdot A+5^{2017}+23\cdot B-5^{2017}=23\cdot\left(A-B\right)$.

Доказано.

10.2 В каждую клетку таблицы 8×8 требуется вписать одно из чисел 1 или -1 так, чтобы произведение всех чисел в каждой строке и в каждом столбце было равно единице. Сколькими способами можно заполнить таблицу?

Решение:
Заполним всю таблицу 8×8 единицами. Это можно сделать единственным способом. Элементы последней строки (столбца) можно рассматривать как множители, дополняющие произведение семи элементов строки (столбца), до 1, а, значит, совпадающие с этим произведением. Теперь в верхнем левом квадрате размером 7×7 (исключим последнюю строку и последний столбец) заменим одну из единиц на -1. Это приведёт к изменению знаков в последней клетке строки, содержащей эту -1, а также последней клетке соответствующего столбца и последней клетке последней строки. Будем продолжать заменять 1 на -1 в выделенной таблице размером 7×7 и следить за изменениями в последней строке и последнем столбце исходной таблицы. Поскольку числа квадрата 7×7 однозначно задают числа последней строки и последнего столбца, то различных вариантов заполнения будет столько, сколько содержится различных способов заполнения квадрата 7×7. Так как заполнение каждой из 49 клеток квадрата 7×7 может быть сделано одним из двух способов (1 или -1), то в силу правила произведения получаем 2^{49} способов.

Ответ: 2^{49}.

10.3 При каких a неравенство

$$(4-a^2)x^2+(a+2)x-1\leq 0$$

выполняется для всех *x*, удовлетворяющих неравенству $|x|\geq 3$?

<u>Решение:</u>

Решая неравенство $|x|\geq 3$, получаем$x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. Итак, нам надо найти все значения а,при которых неравенство $(4-a^2)x^2+(a+2)x-1\leq 0$ будет выполняться для всех x из указанного множества. Т.к. в этой задаче коэффициент при x^2 зависит от параметра, то необходимо разобрать три случая: $4-a^2=0$;
$4-a^2>0$ и $4-a^2<0$.

<u>Случай 1.</u>

$4-a^2=0; \leftrightarrow a=\pm 2$.

При $a=-2$ неравенство (*) принимает вид: $0\cdot x^2+0\cdot x-1\leq 0,\quad -1\leq 0$. Его решениями будут $x\in(-\infty:+\infty)$. Следовательно $a=-2$ удовлетворяет условию задачи.

При $a=2$ неравенство (*) принимает вид: $0\cdot x^2+4x-1\leq 0,\quad x\leq\dfrac{1}{4}$.

То есть наше неравенство выполняется только для $x\leq\dfrac{1}{4}$, следовательно $a=2$ условию задачи не удовлетворяет.

<u>Случай 2.</u>

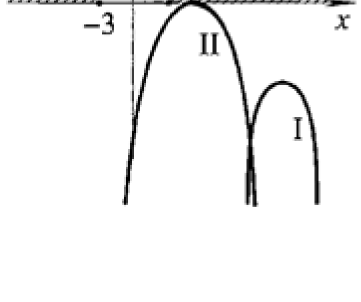
$4-a^2>0$;

Решением неравенства (*) будет либо пустое множество, либо точка, либо промежуток $[x_1;x_2]$. Ни в одном из этих случаев неравенство не будет выполняться для всех $x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$, следовательно, случай 2 нам не подходит.

<u>Случай 3.</u>

$4-a^2<0$.

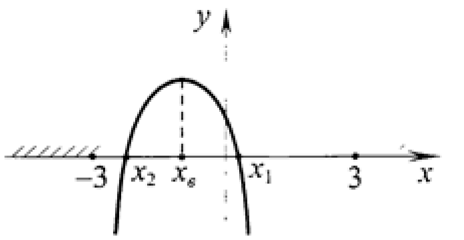
Тогда ветви параболы $y=(4-a^2)x^2+(a+2)x-1$ направлены вниз. а) если парабола находится под осью *Ox*(I) или касается ее (II) (рис.3). Такие параболы нам подходят. Следовательно, имеем



$$\begin{cases}4-a^2<0\\ D\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-4>0\\ D=(a+2)^2-4(4-a^2)(-1)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$a\in(-\infty;-2)\cup\left[\frac{10}{3};+\infty\right).$$

б) Если парабола $y=(4-a^2)x^2+(a+2)x-1$ пересекает ось Ox в двух точках, то нам подходит только случай, изображенный на рисунке 4, когда корни трехчлена находятся между числами 3 и -3 (возможно совпадая с ними).



Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}4-a^2<0\\ D>0\\ -3<x<3\\ y(-3)\le 0\\ y(3)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-4>0\\ D=(a+2)^2-4(4-a^2)(-1)>0\\ -3<-\dfrac{a+2}{2(4-a^2)}<3\\ y(-3)=(4-a^2)(-3)^2+(a+2)(-3)-1\le 0\\ y(3)=(4-a^2)3^2+(a+2)3-1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\in\left[\frac{1+\sqrt{165}}{6};\frac{10}{3}\right).$$

Собирая все найденные решения, получаем:

$$a\in(-\infty;-2]\cup\left[\frac{1+\sqrt{165}}{6};+\infty\right).$$

Ответ: $a\in(-\infty;-2]\cup\left[\frac{1+\sqrt{165}}{6};+\infty\right).$

10.4 Внутри равнобедренного прямоугольного треугольника *ABC*с гипотенузой *AB* взята точка *M* такая, что угол *MAB* на 15° больше угла *MAC*, а угол *MCB* на 15° больше угла *MBC*. Найдите угол *BMC*.

Решение:

Пусть X – точка пересечения AM и высоты CH треугольника ABC (см. рис. 1). Рассмотрим случай, когда точка X лежит на отрезке AM (в конце решения мы покажем, что другой случай невозможен). Из условия следует, что $\angle BAX = 30^\circ$. Тогда $\angle CXM = \angle AXH = 90^\circ - \angle XAH = 60^\circ$. Поскольку CH также является медианой треугольника ABC, то треугольник AXB – равнобедренный, то есть, $\angle BXH = 60^\circ$. Следовательно, и $\angle BXM = 60^\circ$.

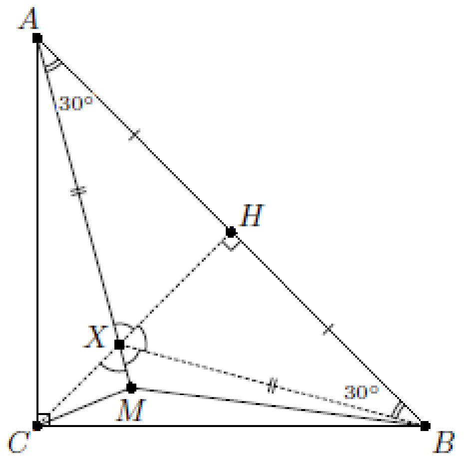


Рис. 1

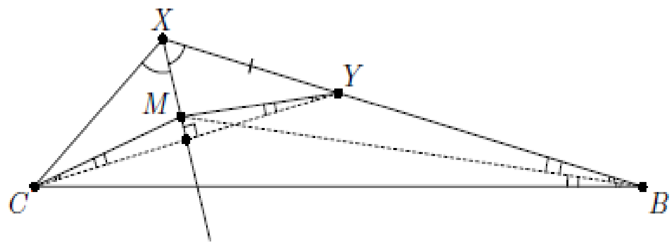


Рис. 2

Рассмотрим отдельно треугольник CXB. В нем $\angle XCB = 45^\circ$, $\angle XBC = 15^\circ$, $\angle CXB = 120^\circ$ и XM – биссектриса угла CXB (см. рис. 2). Докажем, что BM – биссектриса угла CBX. Обозначим $\angle MBC = \alpha$, тогда $\angle MCB = 15^\circ + \alpha$. Выберем на отрезке XB такую точку Y, что $\angle YCB = 15^\circ$, тогда $\angle XCY = 30^\circ$. Кроме того, $\angle XYC = 30^\circ$ (как внешний угол в треугольнике CYB), следовательно, треугольник CXY – равнобедренный.

Поскольку XM – биссектриса равнобедренного треугольника CXY, то она также является медианой и высотой, следовательно, CMY – также равнобедренный, откуда $\angle MYC = \angle MCY = \alpha$. С другой стороны, $\angle MBC = \alpha$, то есть, четырехугольник $CMYB$ – вписанный. Тогда $\angle MBY = \angle MCY = \alpha$, откуда $2\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 7{,}5^\circ$ и $\angle CMB = 150^\circ$.

Докажем, что точка X лежит на отрезке AM. Пусть это не так (см. рис. 3). Снова рассмотрим треугольник AXB отдельно и проведем отрезок CY так, что $\angle YCB = 15^\circ$. По условию, $\angle MCB = 15^\circ + \angle MBC$.

Так как $\angle XCB = 30^\circ + \angle XBC$, то чтобы выполнялось условие, угол MBX должен быть на 15° больше MCX. Треугольник CMY – равнобедренный, следовательно, $\angle MCX = \angle MYX > \angle MBY$, то есть, такое расположение точек невозможно.

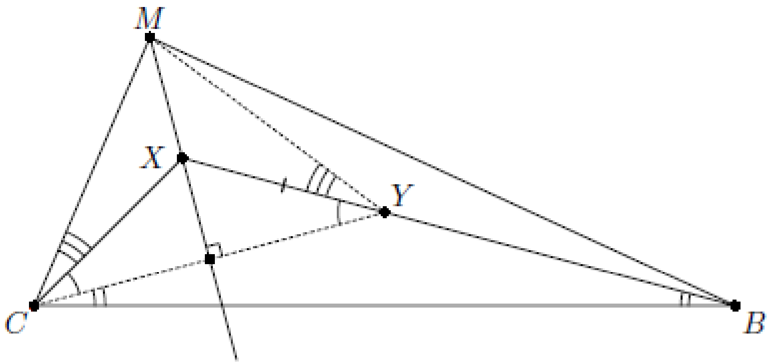


Рис.3

Ответ: $\angle CMB = 150^\circ$

10.5 После длительной разлуки встретились двое старых друзей. Один из них сообщил, что у него три сына, произведение возрастов которых равно 36, а сумма равна числу окон дома, около которого произошла встреча. Второй сказал, что он не может определить возраст детей. Тогда первый добавил, что его старший сын ходит в школу, после чего второй сразу же назвал возраст детей. Сколько лет было каждому сыну?

Решение:

Выпишем все возможные разложения 36 на три сомножителя:

$$36 = 1 \cdot 1 \cdot 36 = 1 \cdot 2 \cdot 18 = 1 \cdot 3 \cdot 12 = 1 \cdot 4 \cdot 9 =$$
$$= 1 \cdot 6 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 3 \cdot 3 \cdot 4$$

Суммы сомножителей этих восьми разложений равны соответственно 38, 21, 16, 14, 13, 13, 11, 10. Второй, зная число окон дома, а значит и сумму возрастов $(2 \cdot 2 \cdot 9$ и $1 \cdot 6 \cdot 6)$, не смог установить возраст сыновей, т.к. сумма возрастов при этом одинакова. Но вариант $1 \cdot 6 \cdot 6$ отпадает, т.к. в этом случае в семье не было бы одного старшего сына. Остается $2 \cdot 2 \cdot 9$.

Ответ: $2,\ 2,\ 9$ лет.