

## ОБРАЩЕНИЕ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА ЖУРНАЛА

Уважаемые коллеги!  
Дорогие друзья!



Этот номер журнала подготовлен по материалам докладов, представленных на международную научно-техническую конференцию «Динамика, надежность и долговечность механических и биомеханических систем - МБМС-2016» 5-9 сентября 2016 г. в Севастополе.

### Организаторы конференции:

Минобрнауки России, Севастопольский государственный университет, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Институт проблем транспорта им. Н.С. Соломенко РАН РФ (Санкт-Петербург), Государственный морской университет им. адмирала Ф.Ф. Ушакова (Новороссийск), Всероссийский НИИ механизации сельского хозяйства (Москва), Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева, Тульский государственный университет, Рыбинский государственный авиационный технический университет им. П.А. Соловьева, Волгоградский государственный технический университет, Медицинская академия им. С.И. Георгиевского КФУ им. В.И. Вернадского (Симферополь), Клиника травматологии, ортопедии и патологии суставов 1-го МГМУ им. И.М. Сеченова, ФСНТП «Международное содружество бауманцев» (Москва), Ассоциация ортопедов и травматологов Крыма, 9-я городская больница г. Севастополя, Запорожский национальный технический университет, Луцкий национальный технический университет, Институт патологии позвоночника и суставов им. проф. М.И. Ситенко АМН Украины» (Харьков), Белорусский государственный университет транспорта (Гомель), Азербайджанский архитектурно-строительный университет (Баку), ГП «ЭЛЕКТРОТЯЖМАШ» (Харьков), St. Cyril and St. Methodius University, Scopje ( Rep. Macedonia), School of Environment, Beijing Normal University (China).

Опубликованные научные работы соответствуют тематическим направлениям конференции:

- ✧ динамика и прочность, надежность и долговечность механических и биомеханических систем,
- ✧ математическое моделирование в теоретической и прикладной механике,
- ✧ механика процессов упруго-пластического деформирования,
- ✧ материалы конструкций и методы их исследования,
- ✧ диагностика технического состояния систем,
- ✧ энергетика механических систем.

Редакционная коллегия журнала желает всем участникам конференции успешной и эффективной работы, интересных дискуссий, продуктивных предложений и незабываемых впечатлений!

Главный редактор журнала «Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии»,  
заслуженный деятель науки Российской Федерации,  
доктор технических наук, профессор,  
лауреат премий Президента и Правительства Российской Федерации

Ю.С. Степанов

# Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии

Учредитель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Государственный университет – учебно-научно-производственный комплекс»  
(ФГБОУ ВПО «Госуниверситет – УНПК»)

## Редакционный совет:

Голенков В.А. д-р техн. наук, проф.,  
председатель  
Пилипенко О.В. д-р техн. наук, проф.,  
зам. председателя  
Радченко С.Ю. д-р техн. наук, проф.,  
зам. председателя  
Борзенков М.И. канд. техн. наук, доц.,  
секретарь  
Астафичев П.А. д-р юрид. наук, проф.  
Иванова Т.Н. д-р техн. наук, проф.  
Колчунов В.И. д-р техн. наук, проф.  
Константинов И.С. д-р техн. наук, проф.  
Новиков А.Н. д-р техн. наук, проф.  
Попова Л.В. д-р экон. наук, проф.  
Степанов Ю.С. д-р техн. наук, проф.

## Редакция

### Главный редактор

Степанов Ю.С. д-р техн. наук, проф.,  
заслуженный деятель науки Российской  
Федерации

### Заместители главного редактора:

Барсуков Г.В. д-р техн. наук, проф.  
Гордон В.А. д-р техн. наук, проф.  
Подмастерьев К.В. д-р техн. наук, проф.

### Члены редколлегии:

Бабичев А.П. д-р техн. наук, проф. (Россия)  
Бухач А. д-р техн. наук, проф. (Польша)  
Вдовин С.И. д-р техн. наук, проф. (Россия)  
Дьяконов А.А. д-р техн. наук, проф. (Россия)  
Емельянов С.Г. д-р техн. наук, проф. (Россия)  
Зубчанинов В.Г. д-р техн. наук, проф. (Россия)  
Иванов Б.Р. д-р техн. наук, проф. (Россия)  
Киричек А.В. д-р техн. наук, проф. (Россия)  
Клименко С.А. д-р техн. наук, проф. (Украина)  
Колесников К.С. д-р техн. наук, проф.,  
академик РАН (Россия)  
Копылов Ю.Р. д-р техн. наук, проф. (Россия)  
Малинин В.Г. д-р физ.-мат. наук, проф. (Россия)  
Мирсалимов В.М. д-р физ.-мат. наук, проф.  
(Азербайджан)  
Мулюкин О.П. д-р техн. наук, проф. (Россия)  
Осадчий В.Я. д-р техн. наук, проф. (Россия)  
Панин В.Е. д-р техн. наук, проф., академик  
РАН (Россия)  
Распопов В.Я. д-р техн. наук, проф. (Россия)  
Смоленцев В.П. д-р техн. наук, проф. (Россия)  
Старовойтов Э.И. д-р физ.-мат. наук, проф.  
(Беларусь)  
Хейфец М.Л. д-р техн. наук, проф. (Беларусь)

### Ответственный секретарь:

Тюхта А.В. канд. техн. наук

### Адрес редакции

302020, г. Орел, Наугорское шоссе, 29  
(4862) 54-15-19, 55-55-24, 41-98-48,  
41-98-03, +7(906)6639898  
www.gu-unpk.ru  
E-mail: tiostu@mail.ru

Зарег. в Федеральной службе по  
надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций.  
Свидетельство ПИ № ФС77-47351  
от 03 ноября 2011 года

Подписной индекс 29504  
по объединенному каталогу  
«Пресса России»

© Госуниверситет – УНПК, 2016

## Содержание

### Естественные науки

Хромов В.Г., Хромов И.В., Хромов Е.В. Методика определения интегрального коэффициента внутреннего трения для поперечных колебаний стержня.....	3
Сулимов В.Д., Шкапов П.М., Сулимов А.В. Коррекция матриц моделей систем по сингулярному спектру с использованием гибридных алгоритмов оптимизации.....	8
Конева С.А. Анализ динамических характеристик теплообменного аппарата одного класса как объекта управления.....	17
Неменко А.В., Никитин М.М. Оценка динамических характеристик грузоподъемной системы.....	25
Неменко А.В., Никитин М.М. Оценка вероятности разрушения детали с усталостной трещиной.....	34
Быркин В.М. «Одно уравнение – два неизвестных»: недоопределенные функциональные уравнения и метод факторизации-раздвоения.....	40

### Моделирование технологических процессов

Рахманов С.Р. Исследование динамики механизма удержания оправки стана холодной пильгерной прокатки труб.....	47
Порошин В.В., Богомолов Д.Ю. Математическое моделирование теплопереноса вязкой жидкости в узком двумерном канале с шероховатыми стенками.....	57
Бохонский А.И., Елькина Е.С. Модели оптимального управления деформированием нежестких заготовок при автоматической токарной обработке.....	64

### Конструирование, расчеты, материалы

Бохонский А.И., Варминская Н.И., Рыжков А.И. Конструирование оптимальных управлений движением объектов как абсолютно твердых и деформируемых тел.....	70
Аблаев А.Р., Аблаев Р.Р. Количество контуров и взаимная последовательность расположения теплообменных аппаратов в судовых системах охлаждения.....	77
Федоровский К.Ю., Федоровская Н.К., Тимофеев В.А. Исследование теплопередачи в экологически безопасных системах охлаждения энергоустановок морских объектов.....	82
Дологолюня А.В., Сухов А.К. Условия существования каскадных солнечных водонагревательных установок.....	89
Дологолюня А.В., Сухов А.К. Работа солнечного коллектора в «ночном режиме».....	95
Шатунский А.А., Лотонина М.Б. Повышение стабильности структуры и свойств монокристаллических отливок из никелевых жаропрочных сплавов.....	103
Федоровский К.Ю., Федоровская Н.К. Замкнутые системы охлаждения энергоустановок судов с использованием импактных струй.....	108

### Машиностроительные технологии и инструменты

Радченко С.Ю., Дорохов Д.О., Грядунов И.М. Исследование зависимости изменения микроструктуры и параметра микротвердости сплава БрОЦС 5-5-5 от степени деформации.....	115
Бессмертная Ю.В., Ларин С.Н., Мальшев А.Н. Исследование влияния скоростных параметров на силовые режимы изотермической вытяжки квадратных коробок из анизотропных материалов.....	126
Лавриненко В.Ю., Чузаев И.С. Экспериментальные исследования гибки листовых заготовок на молотах.....	133
Серезжин М.А. Выбор скорости деформирования в условиях напильника материала заготовки на инструмент при вытяжке с прижимом.....	137
Ларин С.Н., Соболев Я.А., Чарин А.В. Изотермическая пневмошлифовка элементов многослойных листовых конструкций квадратного поперечного сечения из анизотропного материала.....	142

### Приборостроение и биотехнические системы

Калинин М.И., Пашков Е.В., Поляков А.М., Гайнуллина Я.Н. Синтез закрытых наножидкостных имплантируемых металлоконструкций с применением современных САПР.....	152
Хорошевский М.Д., Иванков П.С., Кулагин Р.Н., Кристалль М.Г. Разработка экспериментальной установки для исследования динамики процесса вибросейсмического измерения диаметров отверстий малого номинала.....	159
Гайнуллина Я.Н., Пашков Е.В., Калинин М.И., Сопин П.К., Пахалюк В.И. Исследование и разработка устройства для измерения натяжения нервного корешка при выполнении нейрохирургических и вертебрологических операций.....	164
Поляков А.М., Бугаев П.А., Колесова М.А. Синтез прототипа биоподобного коленного сустава трансформерного протеза.....	171
Филиппенко В.А., Танькут В.А., Бондаренко С.Е., Аконджом М., Яреско А.В. Математическое обоснование методики костной аутопластики стенок вертлужной впадины у больных с остеопорозом при тотальном эндопротезировании тазобедренного сустава.....	178

### Контроль, диагностика, испытания

Троицкий О.А., Ташенко В.И., Скворцов О.Б. Влияние материала образцов, длительности импульсов и амплитуды тока на величину собственного магнитного поля тока и вибрацию круглых образцов от пинч-действия тока.....	187
Богомолов Д.Ю., Порошин В.В., Порошин О.В. Морфологическая фильтрация для контроля топографии поверхности элементов механических систем.....	195
Гаршин А.Ю. Исследование процесса диагностирования и восстановления человеко-машинных систем путем анализа согласованных показателей безошибочности, времени, бездефектности и безаварийности.....	199

# Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology

The founder – The Federal State Higher Educational Professional Institution

«State University – Education–Scientific–Production Complex»

(State University ESPC)

## Editorial council

**Golenkov V.A.** Doc. Sc. Tech., Prof.,  
president

**Pilipenko O.V.** Doc. Sc. Tech., Prof.,  
vice-president

**Radchenko S.Y.** Doc. Sc. Tech., Prof.,  
vice-president

**Borzenkov M.I.** Candidate Sc. Tech.,  
Assistant Prof, secretary

**Astafichev P.A.** Doc. Sc. Law., Prof.

**Ivanova T.I.** Doc. Sc. Tech., Prof.

**Kolchunov V.I.** Doc. Sc. Tech., Prof.

**Konstantinov I.S.** Doc. Sc. Tech., Prof.

**Novikov A.N.** Doc. Sc. Tech., Prof.

**Popova L.V.** Doc. Sc. Ec., Prof.

**Stepanov Y.S.** Doc. Sc. Tech., Prof.

## Editorial Committee

### Editor-in-chief

**Stepanov Y.S.** Doc. Sc. Tech., Prof., honored  
worker of science of Russian Federation

### Editor-in-chief Assistants

**Barsukov G.V.** Doc. Sc. Tech., Prof.

**Gordon V.A.** Doc. Sc. Tech., Prof.

**Podmasteryev K.V.** Doc. Sc. Tech., Prof.

### Member of editorial board

**Babichev A.P.** Doc. Sc. Tech., Prof. (Russia)

**Buchach A.** Doc. Sc. Tech., Prof. (Poland)

**Vdovin S.I.** Doc. Sc. Tech., Prof. (Russia)

**Dyakonov A.A.** Doc. Sc. Tech., Prof. (Russia)

**Emelyanov S.G.** Doc. Sc. Tech., Prof. (Russia)

**Subchaninov V.G.** Doc. Sc. Tech., Prof. (Russia)

**Ivanov B.R.** Doc. Sc. Tech., Prof. (Russia)

**Kirichek A.V.** Doc. Sc. Tech., Prof. (Russia)

**Klimenko S.A.** Doc. Sc. Tech., Prof. (Ukraine)

**Kolesnikov K.S.** Doc. Sc. Tech., Prof.,  
Academician of RAS (Russia)

**Kopylov Y.R.** Doc. Sc. Tech., Prof. (Russia)

**Malinin V.G.** Doc. Sc. Ph. - Math., Prof. (Russia)

**Mirsalimov V.M.** Doc. Sc. Ph. - Math., Prof.  
(Azerbaijan)

**Mulyukin O.P.** Doc. Sc. Tech., Prof. (Russia)

**Osadchy V.Ya.** Doc. Sc. Tech., Prof. (Russia)

**Panin V.E.** Doc. Sc. Tech., Prof. Academician  
of RAS (Russia)

**Raspopov V.Ya.** Doc. Sc. Tech., Prof. (Russia)

**Smolenzhev V.P.** Doc. Sc. Tech., Prof. (Russia)

**Starovoitov A.L.** Doc. Sc. Ph. - Math., Prof.  
(Belarus)

**Heifets M.I.** Doc. Sc. Tech., Prof. (Belarus)

### Executive secretary:

**Tyukhta A.V.** Candidate Sc. Tech.

### Address

302020 Orel,  
Naugorskoe Chosse, 29  
(4862) 54-15-19, 55-55-24, 41-98-48,  
41-98-03, +7(906)6639898  
www.gu-unpk.ru  
E-mail: tiostu@mail.ru

Journal is registered in Federal Agency of  
supervision in sphere of communication,  
information technology and mass  
communications. The certificate of registration  
PI № FS77-47351 from 03.11.2011

Index on the catalogue of the «Pressa  
Rossii» 29504

© State University ESPC, 2016

## Contents

### Natural sciences

<i>Khromov V.G., Khromov E.V., Khromov I.V.</i> Method for determining integral coefficient of internal friction for transverse vibrations of a rod.....	3
<i>Sulimov V.D., Shkapov P.M., Sulimov A.V.</i> Correction matrix models systems singular spectrum using hybrid optimization algorithm.....	8
<i>Koneva S.A.</i> Analysis dynamic characteristics of device with the heat exchange of one class as management object.....	17
<i>Nemenko A.V., Nikitin M.M.</i> Evaluation of dynamic characteristics hoisting system.....	25
<i>Nemenko A.V., Nikitin M.M.</i> Assessing the failure probability details with fatigue cracks.....	34
<i>Byrdin V.M.</i> «One equation - two unknown»: underdetermined functional equations and the factorization-furcation method.....	40

### Modelling of technological processes

<i>Rakhmanov S.R.</i> Dynamics research retention–mandrel of cold pilger rolling tube.....	47
<i>Poroshin V.V., Bogomolov D.Yu.</i> Mathematical modelling of fluid heat flux in thin channel with rough walls.....	57
<i>Bokhonskiy A.I., Yelkina Ye.S.</i> Model of optimal control non–rigid deformation blanks with automatic turning.....	64

### Designing, calculations, materials

<i>Bokhonskiy A.I., Varminska N.I., Ryzkov A.I.</i> Designing of motions optimal controls of objects as an absolutely rigid and deformable bodies.....	70
<i>Ablaev A.R., Ablaev R.R.</i> Number of circuits and mutually sequentially arranged heat exchangers in the ships cooling system.....	77
<i>Fedorovskiy K.Yu., Fedorovskiy N.K., Timofeev V.A.</i> Investigation of heat transfer in an environmentally friendly cooling system power plants offshore facilities.....	82
<i>Dologlonyan A.V., Suhov A.K.</i> Living conditions of cascade solar water–heating installations.....	89
<i>Dologlonyan A.V., Suhov A.K.</i> Work of the solar collector in «the night mode».....	95
<i>Shatulsky A.A., Lotonina M.B.</i> Improving the stability of structure and properties of casting monocrystalline nickel superalloy.....	103
<i>Fedorovskiy K.Yu., Fedorovskaya N.K.</i> Closed cooling system power plants ships using impact jet.....	108

### Machine building technology and toolware

<i>Radchenko S.Yu., Dorokhov D.O., Gryadunov I.M.</i> Research dependence of changes in microstructure and parameters microhardness alloy 5–5 BrOCS the degree of deformation.....	115
<i>Bessmertnaya Yu.V., Larin S.N., Malyshev A.N.</i> Study of speed parameters modes for power isothermal extract square boxes from anisotropic materials.....	126
<i>Lavrinenko V.Yu., Chuvaev I.S.</i> Experimental research on bending blanks hammer.....	133
<i>Serezhkin M.A.</i> Select speed deformation in the blanks caking tool at drawing with holder.....	137
<i>Larin S.N., Sobolev Ja.A., Charin A.V.</i> Isothermal pneumatic forming elements cellular multilayer sheet construction square cross–section of anisotropic material.....	142

### Instrument making and biotechnological system

<i>Kalinin M.I., Pashkov E.V., Polyakov A.M., Gainullina Ya.N.</i> Synthesis of closed steel liquid implantable using advanced CAD.....	152
<i>Khoroshevskiy M.D., Ivankov P.S., Kulagin R.N., Kristal M.G.</i> Development of experimental setup to study the dynamics of vibrofrequency measurements hole diameter low value.....	159
<i>Gainullina Ya.N., Pashkov E.V., Kalinin M.I., Sopin P.K., Pakhalyuk V.I.</i> Research and development of device for measuring the tension nerve roots in the performance of neurosurgical and spine operations.....	164
<i>Poliakov A.M., Bugayev P.A., Kolesova M.A.</i> The synthesis of prototype of biosimilar knee joint for transfemoral prostheses.....	171
<i>Filippenko V.A., Tankut V.A., Bondarenko S.Ye., Akondzhom M., Yaresko A.V.</i> Mathematical justification techniques bone grafting of the acetabulum wall in patients with osteoporosis during total hip arthroplasty.....	178

### Control, diagnostics, tests

<i>Troitsky O.A., Stashenko V.I., Skvortsov O.B.</i> Effect of material samples of duration pulses and amplitude of the current on the value of the intrinsic magnetic field of the current and vibration circular pattern from pinch of current.....	187
<i>Bogomolov D.Yu., Poroshin V.V., Poroshin O.V.</i> Morphological filtering for control the surface texture of mechanical system elements.....	195
<i>Garshin A.Yu.</i> Study of the process of diagnosis and rehabilitation of man–machine systems through analysis of agreed indicators, the absence of flawlessness time defect and fault tolerance.....	199

## **ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

УДК 621.71.027

В.Г. ХРОМОВ, И.В. ХРОМОВ, Е.В. ХРОМОВ

### **МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ**

*Рассматриваются проблемные вопросы разработки и практического использования результатов математического моделирования для описания собственных демпфирующих свойств механической системы в прикладной теории колебаний.*

**Ключевые слова:** механическая система, изгибные колебания, внутреннее трение, рассеяние энергии.

Внутреннее трение, возникающее в результате относительного перемещения частиц элементарного объема материала, является одной из причин рассеяния энергии и гашения колебаний механических систем. Изучению и моделированию этих процессов посвящено большое количество исследований отечественных и зарубежных специалистов, обзор которых можно найти, например, в монографиях [1–4]. Уравнения для математического описания внутреннего трения записываются в терминах механики деформируемого твердого тела (локальная модель): напряжения  $\sigma$  и деформации  $\varepsilon$ , а также их производные по времени  $\dot{\sigma}, \dot{\varepsilon}$  (скорости). В эти уравнения входит относительный коэффициент рассеяния энергии материала  $\psi$ , значения которого для широкого круга материалов приводятся в справочниках. При моделировании колебаний механических систем обычно вводят так называемые интегральные или приведенные коэффициенты трения  $b$ , отображающие собственные демпфирующие свойства отдельных несущих элементов или системы в целом. Очевидно, что коэффициенты  $b$  зависят от коэффициента рассеяния материала  $\psi$ . Ввиду многообразия реальных технических систем вывод аналитических функций вида  $b(\psi)$  и проверка их эффективности до сих пор остаются актуальными вопросами прикладной теории колебаний.

**Цель работы:** теоретический анализ и экспериментальная проверка эффективности формулы для приведенного коэффициента внутреннего трения при поперечных колебаниях стержня.

Методика теоретического построения зависимости для коэффициентов трения  $b(\psi)$  основывается на процедурах суммирования или интегрирования энергии, поглощаемой на некоторой площади или объеме тела, материал которого испытывает знакопеременную деформацию [2, 3]. Рассмотрим пример для расчетной схемы на рисунке 1: горизонтальный, консольно закрепленный стержень совершает свободные поперечные колебания.

Предположим, что поведение материала стержня при циклическом растяжении описывается моделью линейно-вязкого трения (модель Кельвина–Фойгта) [2, 4]:

$$\sigma = E \left( \varepsilon + \frac{\psi}{2\pi\omega} \cdot \dot{\varepsilon} \right) = E\varepsilon + \mu \cdot \dot{\varepsilon}, \quad (1)$$

где:  $E$  – модуль продольной упругости материала;

$\mu = \frac{E \cdot \psi}{2\pi\omega}$  – локальный коэффициент внутреннего трения или коэффициент вязкости материала;

$\omega$  – частота циклических деформаций материала.

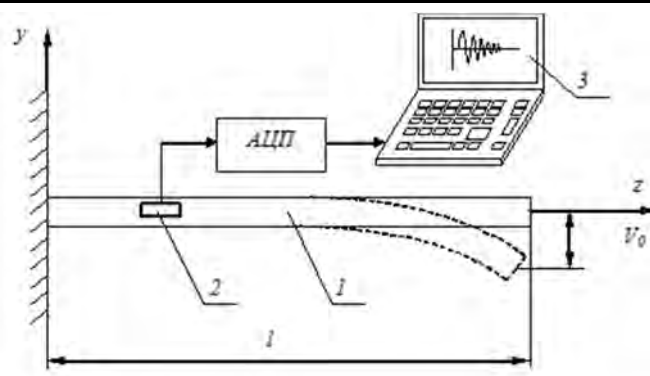


Рисунок 1 – Схема консольной балки, совершающей поперечные колебания

При изгибе стержня деформация материала в произвольной точке поперечного сечения, согласно гипотезе плоских сечений, рассчитывается по формуле:

$$\varepsilon = k \cdot y = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \cdot y, \quad (2)$$

где:  $k = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$  – кривизна продольной оси стержня;

$y$  – координата заданной точки поперечного сечения;

$V(z, t)$  – циклически изменяющийся прогиб стержня в произвольном сечении стержня с координатой  $z$ .

Подстановка (2) в (1) дает формулу:

$$\sigma = (E \cdot k + \mu \frac{dk}{dt}) y. \quad (3)$$

Внутренний изгибающий момент в произвольном сечении стержня определяется с помощью интеграла:

$$M = \int_F \sigma y dF = \int_F (E \cdot k + \mu \frac{dk}{dt}) y^2 dF = EJ \cdot k + \mu \cdot J \frac{dk}{dt} = EJ \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \mu \cdot J \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

где:  $J$  – осевой момент инерции поперечного сечения стержня.

Второе слагаемое в последней формуле представляет собой внутренний изгибающий момент трения  $M_T = \mu \cdot J \frac{dk}{dt}$ .

Дифференциальное уравнение для собственных изгибных колебаний стержня [2]:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} + m \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0,$$

после подстановки формулы (4) принимает вид:

$$\frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} + \frac{\mu \cdot J}{m} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

где:  $m = \rho \cdot F$  – масса единичной длины стержня;

$\rho$  – плотность материала;

$F$  – площадь поперечного сечения стержня.

Функцию прогиба  $V(z, t)$  представляют в виде произведения двух функций  $V(z, t) = V_1(z) \cdot V_2(t)$ , тогда уравнение (5) распадается на два независимых уравнения:

$$V_1^{IV} - \frac{m \cdot \omega^2}{EJ} V_1 = 0 \quad \text{или} \quad V_1^{IV} - p^4 \cdot V_1 = 0, \quad (6)$$

$$\ddot{V}_2 + \frac{\mu}{E} \omega^2 \cdot \dot{V}_2 + \omega^2 \cdot V_2 = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{V}_2 + b \cdot \dot{V}_2 + \omega^2 \cdot V_2 = 0 \quad (7)$$

Первое уравнение определяет форму изогнутой оси стержня, второе – описывает собственные изгибные колебания. Отсюда следуют формулы для частоты  $\omega$  и приведенного коэффициента трения  $b(\psi)$ :

$$\omega = p^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (8)$$

$$b(\psi) = \frac{\mu \cdot \omega^2}{E} = \frac{\psi \cdot \omega}{2\pi} \quad (9)$$

Оценку эффективности последних формул выполним на основе результатов экспериментальных данных, полученных ранее в лаборатории кафедры технической механики СевНТУ и приведенных в работе [8]. В эксперименте использовался стальной стержень 1 с прямоугольной формой поперечного сечения (рисунок 1). На стержне были установлены тензодатчики 2. Конец стержня отклоняют на заданную величину  $V_0$ , отпускают, и он совершает свободные затухающие колебания. Сигнал от тензодатчиков усиливается, обрабатывается с помощью АЦП, и передается в компьютерный осциллограф 3 для записи осциллограммы колебаний. Стержень имеет следующие характеристики:

–  $\rho = 7,58 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ ;  $a = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ;  $h = 0,9 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  – плотность материала и размеры поперечного сечения стержня;

–  $l = 0,295 \text{ м}$  – длина стержня;

–  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$  – модуль продольной упругости;

–  $J = \frac{a \cdot h^3}{12} = 9,1 \cdot 10^{-11} \text{ м}^4$  – осевой момент инерции;

–  $F = b \cdot h = 1,35 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$  – площадь поперечного сечения;

–  $\psi = 0,01 \div 0,015$  – относительный коэффициент рассеяния энергии для стали [1, 3].

Пример экспериментальной осциллограммы колебаний при начальных условиях:  $V_0 = 0,003 \text{ м}$ ,  $\dot{V}_0 = 0$  показан на рисунке 2, а. Видно, что стержень совершает затухающие колебания с периодом  $T_э \approx 0,012 \text{ с}$ , а полное затухание происходит за время  $\Delta T \approx 6 \text{ с}$ .

Теоретическое значение собственной частоты  $\omega$  определяем по формуле (8). Для первой формы изгибных колебаний при заданных граничных и начальных условиях последняя формула согласно справочнику [6] принимает вид  $\omega = 1,875 \cdot \frac{1}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} = 537 \frac{1}{\text{с}}$ .

Расчетный период колебаний стержня равен  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,0117 \text{ с}$ , что достаточно хорошо согласуется с экспериментальным значением  $T_э$ .

Расчетное значение интегрального коэффициента внутреннего трения для исследуемого несущего элемента согласно формуле (9) находится в диапазоне  $b = 0,86 \div 1,28 \frac{1}{\text{с}}$ .

Экспериментальное значение коэффициента  $b_э$  определяли методом итераций на основе численного решения уравнения (7). Вариант расчетной осциллограммы колебаний при  $b_э \approx 13 \frac{1}{\text{с}}$  показан на рисунке 2, б. В работе [8] было показано, что для модели линейно-вязкого внутреннего трения необходимое время затухания  $\Delta T \approx 6 \text{ с}$  достигается при

значении интегрального коэффициента трения  $b_3 \approx (12 \div 14) \frac{1}{c}$ , что на порядок отличается от расчетного значения  $b$ .

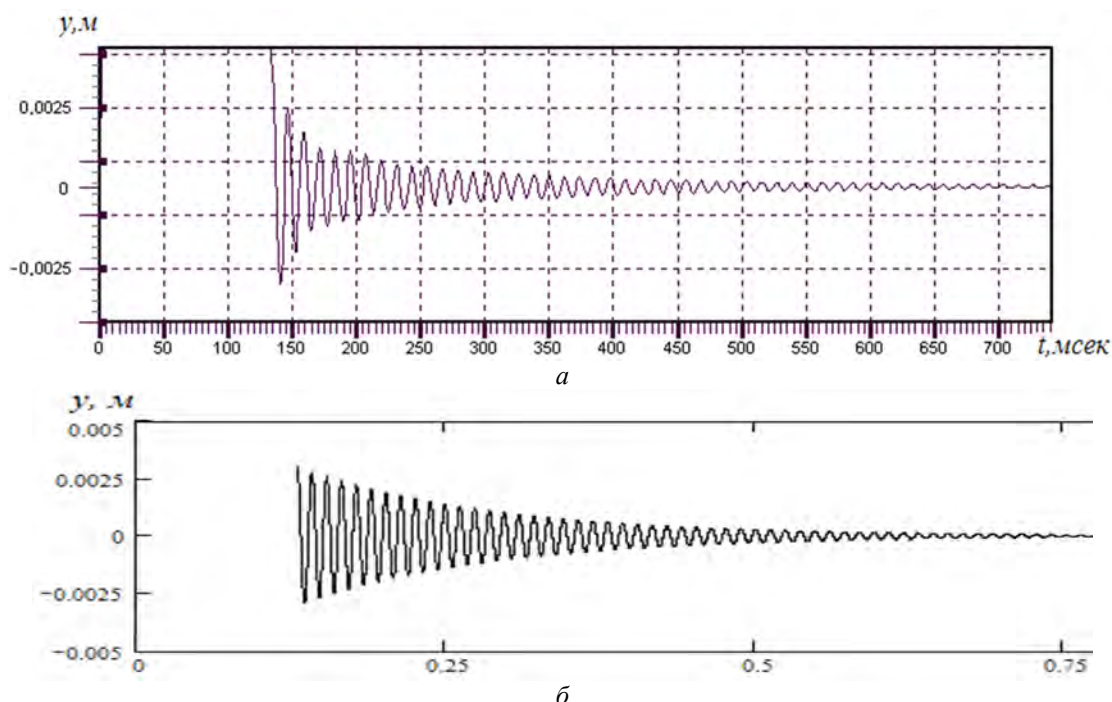


Рисунок 2 – Осциллограммы колебаний: а – экспериментальная б – расчетная

Причиной значительного расхождения принятой модели и реальных колебаний стержня, вероятно, являются дополнительные процессы рассеяния энергии в зоне соединения стержня с опорой и на поверхности контакта исследуемой системы с окружающей средой. Однако построение математических моделей для описания указанных процессов в настоящее время представляется весьма проблематичной задачей.

#### Вывод:

Методика математического моделирования собственных демпфирующих свойств несущих элементов механической системы с учетом только внутреннего трения является малоэффективной. Полученные на основе такой методики функции и их числовые параметры могут существенно отличаться от действительных значений. В современных условиях надежные значения интегральных коэффициентов трения можно получить лишь на основе натурных экспериментов. Подобные эксперименты и являются одним из важных предметов дальнейших исследований в области прикладной теории колебаний.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сорокин, Е.С. Внутренние и внешние сопротивления при колебаниях твердых тел / Е.С. Сорокин. – М.: Научное сообщение ЦНИИСК, 1957. – Вып. 3. – 64 с.
2. Пановко, Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем / Я.Г. Пановко. – М.: Физматгиз, 1960. – 193 с.
3. Писаренко, Г.С. Обобщенная нелинейная модель учета рассеяния энергии при колебаниях / Г.С. Писаренко. – Киев.: Наукова думка, 1985. – 236 с.
4. Нашиф, А. Демпфирования колебаний / А. Нашиф, Д. Джоунс, Дж. Хендерсон. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
5. Тимошенко, С.П. Теория колебаний в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М.: Государственное научно – техническое изд-во, 1931. – 344 с.
6. Моисеев, А.А. Конструирование и расчет прочности судовых ТЗА / А.А. Моисеев, А.Н. Розенберг. – Л.: Судостроение, 1964. – 510 с.

7. Хромов, В.Г. Нелинейные процессы рассеяния энергии в теории колебаний дискретных механических систем. Моделирование и анализ / В.Г. Хромов, Е.В. Хромов, О.В. Хромов. – Севастополь: СевНТУ, 2013. – 200 с.

8. Хромов, Е.В. Исследования вида функции внутреннего трения для собственных изгибных колебаний стальной балки / Е.В. Хромов, О.В. Хромов. // Новые материалы и технологии в металлургии и машиностроении. – Запорожье: ЗНТУ. – 2008. – № 1. – С. 111 – 114.

**Хромов Владимир Гаврилович**  
ФГАОУ ВО «Севастопольский  
государственный университет»,  
г. Севастополь  
Доктор технических наук,  
профессор кафедры технической  
механики и машиноведения  
299053, г. Севастополь, ул.  
Университетская, 33  
Тел.: +7869243561  
E-mail: v.g.khromov@mail.ru

**Хромов Илья Владимирович**  
ФГАОУ ВО «Севастопольский  
государственный университет»,  
г. Севастополь  
кандидат технических наук, доцент  
кафедры технической механики и  
машиноведения  
299053, г. Севастополь, ул.  
Университетская, 33  
Тел.: +7869243561  
E-mail: i.v.khromov@mail.ru

**Хромов Егор Владимирович**  
ФГАОУ ВО «Севастопольский  
государственный университет»,  
г. Севастополь  
кандидат технических наук, доцент  
кафедры энергоустановок морских  
судов и сооружений  
299053, г. Севастополь, ул.  
Университетская, 33  
Тел.: +7869243561  
E-mail: ev.khromov@mail.ru

V.G. KHROMOV, E.V. KHROMOV, I.V. KHROMOV

## METHOD FOR DETERMINING INTEGRAL COEFFICIENT OF INTERNAL FRICTION FOR TRANSVERSE VIBRATIONS OF A ROD

*The paper deals with problematic issues of development and practical application of mathematical modeling to describe damping properties of a mechanical system in applied theory of vibrations.*

**Keywords:** mechanical system, transverse vibrations, internal friction, energy dissipation.

### BIBLIOGRAPHY

1. Sorokin, E.C. Vnutrenniye i vneshniye soprotivleniya pri kolebaniyakh tverdykh tel / E.C. Sorokin. – M.: Nauchnoye soobshcheniye TSNIISK, 1957. – Vyp. 3. – 64 s.
2. Panovko, YA.G. Vnutrenneye treniye pri kolebaniyakh uprugikh sistem / YA.G. Panovko. – M.: Fizmatgiz, 1960. – 193 s.
3. Pisarenko, G.S. Obobshchennaya nelineynaya model ucheta rasseyaniya energii pri kolebaniyakh / G.S. Pisarenko. – Kiyev.: Naukova dumka, 1985. – 236 s.
4. Nashif, A. Dempfirovaniya kolebaniy / A. Nashif, D. Dzouns, Dzh. Khenderson. – M.: Mir, 1988. – 448 s.
5. Timoshenko, S.P. Teoriya kolebaniy v inzhenernom dele / S.P. Timoshenko. – M.: Gosudarstvennoye nauchno – tekhnicheskoye izd-vo, 1931. – 344 s.
6. Moiseyev, A.A. Konstruirovaniye i raschet prochnosti sudovykh TZA / A.A. Moiseyev, A.N. Rozenberg. – L.: Sudostroyeniye, 1964. – 510 s.
7. Khromov, V.G. Nelineynyye protsessy rasseyaniya energii v teorii kolebaniy diskretnykh mekhanicheskikh sistem. Modelirovaniye i analiz / V.G. Khromov, Ye.V. Khromov, O.V. Khromov. – Sevastopol: SevNTU, 2013. – 200 s.
8. Khromov, Ye.V. Issledovaniya vida funktsii vnutrennego treniya dlya sobstvennykh izgibnykh kolebaniy stalnoy balki / Ye.V. Khromov, O.V. Khromov. // Novyye materialy i tekhnologii v metallurgii i mashinostroyenii. – Zaporozhye: ZNTU. – 2008. – № 1. – S. 111 – 114.

**Khromov Vladimir Gavrilovich**  
Sevastopol State University,  
Doctor of Techn. Sciences,  
Professor of the Department  
«Technical Mechanics and Science  
of Machines»,  
Sevastopol, Universitetskaya, 33  
Tel. +7869243561  
E-mail: v.g.khromov@mail.ru

**Khromov Ilya Vladimirovich**  
Sevastopol State University,  
PhD, Associate Professor of the  
Department «Technical  
Mechanics and Science of  
Machines»,  
Sevastopol, Universitetskaya, 33  
Tel. +7869243561  
E-mail: i.v.khromov@mail.ru

**Khromov Egor Vladimirovich**  
Sevastopol State University,  
PhD, Associate Professor of the Department  
«Ship power plants and structures»,  
Sevastopol, Universitetskaya, 33  
Tel. +7869243561  
E-mail: ev.khromov@mail.ru



В.Д. СУЛИМОВ, П.М. ШКАПОВ, А.В. СУЛИМОВ

## КОРРЕКЦИЯ МАТРИЦ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ ПО СИНГУЛЯРНОМУ СПЕКТРУ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГИБРИДНЫХ АЛГОРИТМОВ ОПТИМИЗАЦИИ

*Рассмотрены численные процедуры коррекции матриц моделей систем, связанные с решением экстремальных задач на сингулярные числа. Критериальные функции предполагаются непрерывными, липшицевыми, многоэкстремальными и не всюду дифференцируемыми. Поиск глобальных решений реализуется с использованием гибридных алгоритмов. Приведены численные примеры.*

**Ключевые слова:** динамическая система, сингулярное число, критериальная функция, кривая Пеано, глобальная оптимизация, алгоритм Метрополиса, гибридный алгоритм.

**Введение.** Современные подходы к исследованию динамических систем основаны на применении методов математического моделирования, включая сингулярное разложение [1]. Следует отметить важную роль основанных на сингулярном разложении численных процедур параметризации ошибок моделирования систем [2]. Нелинейное обобщение сингулярного разложения и некоторые примеры его приложений к задачам моделирования систем представлены в работе [3]. К числу актуальных приложений сингулярного разложения относятся, например, аппроксимация спектров динамических систем, малоранговая аппроксимация больших матриц, исследование динамических систем с кратными ганкелевыми сингулярными числами, редукция размерности моделей систем [4–6]. Некоторые практические задачи связаны с получением надежных оценок экстремальных сингулярных чисел. В работе [7] предложены новые алгоритмы сингулярного разложения больших матриц, основанные на малоранговой тензорной аппроксимации, называемой ТТ–форматом (tensor train format). Указанные алгоритмы позволяют вычислить несколько экстремальных сингулярных чисел и соответствующих сингулярных векторов для больших структурированных матриц, заданных в ТТ–формате. К этому направлению следует также отнести задачи построения неотрицательных матриц с заданными экстремальными сингулярными числами, которые рассматриваются в работе [8]. В работе [9] исследуется функция расстояния от заданной линейной стационарной динамической системы до ближайшей системы с достижимым подпространством, размерность которого меньше порядка заданной системы. Сформулированы задачи оптимизации сингулярных чисел системы и приведена численная методика их решения. Необходимо учитывать, что сингулярные числа, подобно собственным значениям, не являются всюду дифференцируемыми функциями элементов матриц. Следовательно, решение задач, связанных с поиском экстремальных сингулярных чисел матриц, предполагает, в частности, применение методов негладкого анализа и специальных методов анализа чувствительности сингулярных чисел [10]. Широкое распространение в последнее время получили алгоритмы анализа сингулярных спектров [11]. Это обусловлено простотой структуры и низкой вычислительной стоимостью их реализации. В цитируемой работе на основе сравнения результатов, полученных с использованием указанного подхода и методов глобальной оптимизации, установлена достаточная эффективность анализа сингулярных спектров, в частности, применительно к построению различных моделей исследований. Вместе с тем, наблюдаемый рост вычислительной стоимости решаемых задач, связанный с ростом размера матриц исследуемых систем, стимулирует создание более эффективных алгоритмов. Целью настоящей работы является разработка новых гибридных алгоритмов глобальной недифференцируемой оптимизации, ориентированных на решение задач определения экстремальных сингулярных чисел матриц, зависящих от параметров. Во втором разделе формулируются экстремальные задачи для сингулярных чисел матриц, зависящих от конечного числа параметров. Дано описание подходов к решению прямой задачи. В третьем разделе представлены методы недифференцируемой оптимизации, предназначенные для процедур локального поиска в гибридных алгоритмах. Первый метод реализует численную

процедуру Хука–Дживса; в качестве второго выбран модифицированный метод кривой, заполняющей пространство. Четвертый раздел содержит описание двух новых гибридных алгоритмов глобальной недифференцируемой оптимизации. В пятом разделе приведены численные примеры решения экстремальных задач для сингулярных чисел матриц, зависящих от параметров.

**Постановка экстремальных задач.** Пусть дана матрица  $A \in R^{n_r \times n_c}$  с полным столбцовым рангом,  $n_r \geq n_c$ ;  $R$  – множество действительных чисел. Сингулярное разложение рассматриваемой матрицы определяется в виде [12]:

$$A = U \Sigma V^T, \quad (1)$$

где  $U = [u_1, \dots, u_{n_c}] \in R^{n_r \times n_c}$  – ортонормированное множество левых сингулярных векторов;

$V = [v_1, \dots, v_{n_c}] \in R^{n_c \times n_c}$  – ортогональная матрица правых сингулярных векторов;

$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{n_c}) \in R^{n_c \times n_c}$  содержит сингулярные числа матрицы  $A$ , упорядоченные (для определенности) по убыванию  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{n_c} \geq 0$ ;

$n_r, n_c$  – соответственно число строк и столбцов матрицы  $A$ ;

$T$  – символ транспонирования.

Сингулярные тройки матрицы  $A$ , представленной согласно (1), могут быть определены в виде  $\{\sigma_i, u_i, v_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n_c$ .

При оптимизации сингулярных чисел матриц, зависящих от параметров, возможны следующие постановки экстремальных задач. Пусть задан  $x$  – вектор переменных управления (параметров оптимизации) и определена матрица  $A(x) \in R^{n_r \times n_c}$ . Решение прямой задачи, связанной с поиском сингулярных чисел матрицы  $A(x)$ , может быть получено как решение задачи на собственные значения  $\lambda_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n_c$ , матрицы  $A(x)^T A(x)$ : имеет место  $\sigma_i(x) = \sqrt{\lambda_i(x)}$ ,  $i = 1, \dots, n_c$ . Некоторые современные методы определения сингулярных троек (решение прямой задачи), в частности, для больших матриц, представлены в работе [12].

Задача максимизации минимального сингулярного числа  $\sigma_{\min}$  матрицы  $A(x)$ : требуется найти:

$$\max_{x \in X} \sigma_{\min}(A(x)), \quad (2)$$

где  $X \subset R^n$  – область допустимых значений переменных управления;

$n$  – число переменных управления.

Существенно, что в процессе численного решения задачи (2) сингулярные числа  $\sigma_i(A(x))$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_c$ , могут изменяться, при этом выполняется их автоматическая перенумерация с упорядочением по убыванию. Следовательно, при наличии кратных сингулярных чисел критериальная функция сформулированной задачи оптимизации не является всюду дифференцируемой [10].

Задача минимизации максимального сингулярного числа  $\sigma_{\max}$  матрицы  $A(x)$ : требуется найти:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x); \quad (3)$$

где  $f(x) = \sigma_{\max}(A(x))$ ;

$x^*$  – глобальное решение.

Следует отметить, что в сформулированных задачах оптимизации сингулярных чисел в общем случае частные критерии являются липшицевыми, многоэкстремальными и не всюду дифференцируемыми функциями [11]. Кроме того, при рассмотрении обратных задач (на сингулярные числа) необходимо обеспечить корректность их постановки [13]. Указанные особенности рассматриваемых экстремальных задач требуют выбора специальных методов их решения, в частности, методов глобальной недифференцируемой оптимизации. К настоящему времени разработано и находит применение большое число алгоритмов глобальной оптимизации. Накопленный опыт приложений демонстрирует, с одной стороны,

недостаточную эффективность детерминированных методов (существенно ограничена размерностью задачи), с другой – потребность в значительных вычислительных ресурсах при использовании стохастических методов. Этим обусловлена актуальность разработки гибридных алгоритмов глобальной оптимизации [14–16]. Подобные алгоритмы объединяют стохастические алгоритмы сканирования пространства переменных и детерминированные процедуры локального поиска. Ниже рассматриваются экстремальные задачи в скалярной постановке, для решения которых предложена численная методика с использованием гибридных алгоритмов глобальной недифференцируемой оптимизации.

Рассматривается обратная задача восстановления характеристик системы, которая в рамках выбранной математической модели описывается операторным уравнением

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y;$$

где  $X, Y$  – гильбертовы пространства;

$A$  – компактный линейный оператор, действующий из  $X$  в  $Y$ .

Правая часть возмущенного операторного уравнения представляет приближенные входные данные  $y^\delta$ , определенные по результатам измерений. Предполагается, что погрешность задания входной информации  $\delta$  известна и имеет место  $\|y^\delta - y\| \leq \delta$ . Требуется

определить устойчивые приближенные решения  $x^\delta$  по заданной приближенной информации  $y^\delta$ . Существенно, что во многих приложениях обратные задачи являются некорректно поставленными. Далее реализуется подход, основанный на методе регуляризации [13].

Приближенное решение рассматриваемой обратной задачи связано с поиском минимума функционала Тихонова:

$$x_\alpha^\delta = \arg \min_{x \in X} J_\alpha(x), \quad \alpha > 0;$$

где  $x_\alpha^\delta$  – регуляризованное решение уравнения  $Ax = y^\delta$  с параметром регуляризации  $\alpha$ ; при этом минимизируемый функционал определен в виде:

$$J_\alpha(x) = \|Ax - y^\delta\|_Y^2 + \alpha \|x\|_X^2,$$

где  $\|Ax - y^\delta\|_Y^2$  – функционал невязки (квадрат нормы в пространстве  $Y$ ;  $\alpha \|x\|_X^2$  – стабилизирующий функционал.

В обобщение постановок скалярных экстремальных задач (2), (3) для сингулярных чисел матриц, зависящих от параметров, далее рассматривается задача глобальной оптимизации, формулируемая в следующем виде: найти

$$f(x^*) = \min_{x \in X \subset \mathbb{R}^n} f(x), \quad (4)$$

где

$$X = \{x \in D : g_i(x) \leq 0, i \in I\}, \quad (5)$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j, j \in J\} \quad (6)$$

и использованы обозначения:  $f(x)$  – целевая функция;  $x^*$  – глобальное решение;  $g_i(x)$  – функции ограничений задачи,  $i \in I$ ;  $I = \{1, \dots, m_g\}$  – конечное множество индексов;  $m_g$  – число функций ограничений;  $D$  – область поиска;  $a_j, b_j$  – соответственно нижнее и верхнее ограничения на переменную  $x_j$ ;  $J = \{1, \dots, n\}$ . Функции  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i \in I$ , задачи (4) – (6) предполагаются непрерывными липшицевыми. Предполагается также, что действительная функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является многоэкстремальной, не всюду дифференцируемой и для нее задана вычислительная процедура, позволяющая определять значения функции в точках допустимой области. Кроме того, необходимо учесть возможную высокую трудоемкость вычисления критериальных функций, что может потребовать значительных вычислительных ресурсов.

**Гибридные алгоритмы.** Методы решения задач глобальной минимизации многоэкстремальных функций к настоящему времени достаточно хорошо разработаны и находят широкое применение. Следует отметить, что эффективность детерминированных алгоритмов существенно ограничена их зависимостью от размерности задачи. Более мощные стохастические алгоритмы глобальной оптимизации также имеют ряд недостатков. Чувствительность алгоритмов этого типа к выбору параметров, устанавливаемых пользователем или определяемых содержанием задачи, во многом определяет скорость сходимости итерационного процесса. Структуры алгоритмов глобальной минимизации, представленных ниже, построены на основе стохастического алгоритма М-РСА [14], объединенного с процедурами поиска локальных минимумов не всюду дифференцируемых функций. Существенным шагом алгоритма является сравнительная оценка качества решения, определяемого текущей и предшествующей конфигурациями системы. Пробное приближение принимается с определенной вероятностью, что исключает сходимость к локальному минимуму при поиске глобального решения. Работа алгоритма М-РСА основана на использовании аналогии с физическими процессами абсорбции и рассеяния частиц при ядерных реакциях. В его простейшей версии для исследования пространства переменных используется одна частица: указанная версия алгоритма М-РСА совпадает с алгоритмом РСА, интегрированным в гибридный алгоритм HJPCA [15]. На начальном шаге выбирается пробное решение (*Old\_Config*), которое затем модифицируется посредством стохастического возмущения (функция *Perturbation()*), что позволяет найти новое решение (*New\_Config*). С помощью функции *Fitness()* дается сравнительная оценка нового и предыдущего решений, на основании которой новое решение может быть принято или отвергнуто. Если новое решение отвергнуто, то происходит переход к функции *Scattering()*, реализующей схему Метрополиса. Для сканирования области, перспективной на минимум, применяются функции *Perturbation()* и *Small\_Perturbation()*. Новое решение принимается, если оно лучше предыдущего (абсорбция); если найденное решение хуже предыдущего, то происходит переход в отдаленную область пространства переменных (рассеяние), что позволяет преодолевать локальные минимумы. Эффективность описанного поиска глобального решения алгоритмом значительно повышается за счет одновременного использования большого числа частиц. Такой подход реализует алгоритм М-РСА, который непосредственно ориентирован на применение в среде параллельных вычислений. Наилучшее решение определяется с учетом данных о всех частицах, участвующих в процессе. При выбранном числе частиц единственным задаваемым параметром для алгоритма М-РСА является число итераций.

В целом, применение стохастических алгоритмов глобальной оптимизации требует значительных вычислительных ресурсов. Одним из путей повышения эффективности алгоритмов глобальной оптимизации является совершенствование процедуры локального поиска. Некоторые подходы к построению гибридных алгоритмов глобальной оптимизации представлены в работе [16]. Рассматривается гибридный алгоритм М-РСАНJ, интегрирующий эффективный стохастический алгоритм М-РСА (сканирование пространства переменных) и детерминированный метод локального поиска. Как и в алгоритме HJPCA [15], локальная минимизация проводится детерминированным методом Хука-Дживса. Результирующий гибридный алгоритм М-РСАНJ реализован в виде прикладного программного обеспечения. В представленном ниже фрагменте псевдокода гибридного алгоритма его первая (генерация начального решения) и третья (рассеяние) функции полностью соответствуют аналогичным функциям стохастического алгоритма М-РСА [14].

```

1. Generate an initial solution Old_Config
Best_Fitness = Fitness (Old_Config)
Update Blackboard
For n = 0 to # of particles
For n = 0 to # of iterations
Update Blackboard
Perturbation ()
    If Fitness (New_Config) > Fitness (Old_Config)
        If Fitness (New_Config) > Best_Fitness
```

```

                                Best_Fitness := Fitness (New_Config)
                                End If
Old_Config := New_Config
                                Exploration ( )
                                Else
                                    Scattering ( )
                                End If
End For
End For
2. Exploration ( )
    For n = 0 to # of iterations
        Small_Perturbation ( )
    Local search
        using Hooke–Jeeves Method
        Check stopping criterion:
        Find global solution Best_Fitness
        Else continue
        If Fitness (New_Config) > Best_Fitness
            Best_Fitness := Fitness (New_Config)
        End If
        Old_Config := New_Config
    End For
Return
3. Scattering ( )
    p_scatt = 1 - ( Fitness (New_Config)) / (Best_Fitness)
    If p_scatt > random(0, 1)
        Old_Config := random solution
    Else
        Exploration ( )
    End If
Return

```

В состав алгоритма М-РСАНJ входят также стандартные процедуры Perturbation( ) и Small\_Perturbation( ) [14]. Во втором гибридном алгоритме М-PCASFC при локальном поиске используется метод кривой, заполняющей пространство [17]. Выбранный метод локального поиска обеспечивает сжатие пространства переменных, сканируемого с использованием стохастического алгоритма, что повышает результирующую вычислительную эффективность алгоритма М-PCASFC. Описание эффективного подхода к поиску локальных решений на основе построения сглаживающих аппроксимаций критериальных функций дано в работе [18]. Разработано прикладное программное обеспечение, реализующее представленные гибридные алгоритмы М-РСАНJ и М-PCASFC.

**Численные примеры. Пример 1.** Дана симметрическая матрица  $A(x)$  размера  $7 \times 7$  с элементами  $a_{11}(x) = a_{22}(x) = 27 + x_1$ ;  $a_{12} = a_{21} = 24$ ;  $a_{33}(x) = a_{44}(x) = 20$ ;  $a_{34} = a_{43} = 16$ ;  $a_{55}(x) = a_{66}(x) = 15 + x_2$ ;  $a_{56} = a_{65} = 8$ ;  $a_{77} = 16$ ; остальные элементы заданной матрицы – нули; здесь  $n = 2$ ,  $-2,5 \leq x_i \leq 8,5$ ,  $i = 1, 2$ . Требуется определить  $x^*$ , такой, что  $\Sigma(x^*) = \text{diag}(7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$ . Для решения задачи настройки сингулярных чисел матрицы  $A(x)$  на заданный сингулярный спектр  $\Sigma(x^*)$  требуется найти  $\min_{x \in X} f(x)$ , где  $f(x) = \sum_{j=1}^3 \gamma_j f_j^2(x) + \alpha \|x\|_2^2$ , где  $\gamma_j$ ,  $f_j(x)$  – весовой коэффициент и частный критерий, соответствующие  $j$ -му сингулярному числу,  $f_j(x) = (\sigma_j^* - \sigma_j(x))$ ,  $j = \overline{1, 7}$ ;  $\alpha$  – параметр регуляризации;  $x \in \mathbb{R}^2$ ;  $\sigma_j^*$  – сингулярное число из  $\Sigma(x^*)$ ;  $\sigma_j(x)$  – сингулярное число матрицы  $A(x)$ . Точное решение задачи имеет вид [12]:  $x_1^* = -2$ ;  $x_2^* = 2$ ;  $f(x^*) = 0$ .

Приближенное решение задачи минимизации получено с использованием гибридного алгоритма М-PCASFC. При  $m = 9$  определены следующие значения элементов вектора

переменных управления:  $x_1^9 \approx -1,9951$ ;  $x_2^9 \approx 2,0010$ ;  $f(x^9) \approx 0,1770 \cdot 10^{-5}$ . Для иллюстрации сходимости решения удобно ввести функцию  $F(x) = (f_{\max} - f(x)) / (f_{\max} - f_{\min})$ , где  $f_{\min}, f_{\max}$  – вычисленные минимальное и максимальное значения критериальной функции соответственно. На рисунке 4 представлена зависимость переменных управления  $x_1, x_2$ , а также функции  $F(x)$  от плотности  $m$  развертки кривой Пеано в заключительной фазе локального поиска, определяющей глобальное решение. Относительная погрешность вычисления сингулярных чисел определяется в виде:

$$\delta_{\Sigma}(x) = \frac{\|\Sigma(x) - \Sigma(x^*)\|_F}{\|\Sigma(x^*)\|_F},$$

где  $\|\cdot\|_F$  – матричная норма Фробениуса.

При  $m = 9$  получено  $\delta_{\Sigma}(x^9) \approx 0,000164$ . Это подтверждает достаточно высокую точность настройки сингулярных чисел матрицы  $A(x)$  на заданный сингулярный спектр  $\Sigma(x^*)$ .

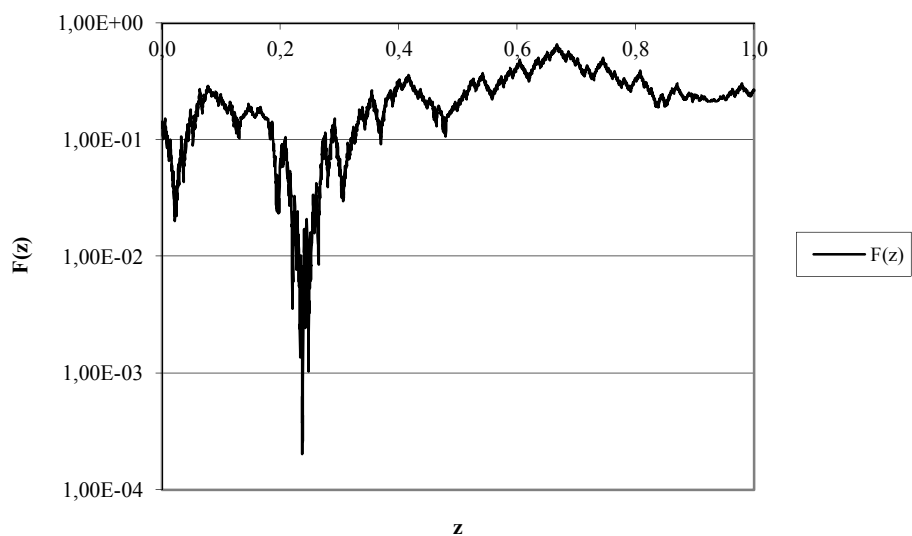


Рисунок 1 – Изменение одномерной критериальной функции  $F(z)$  на единичном интервале

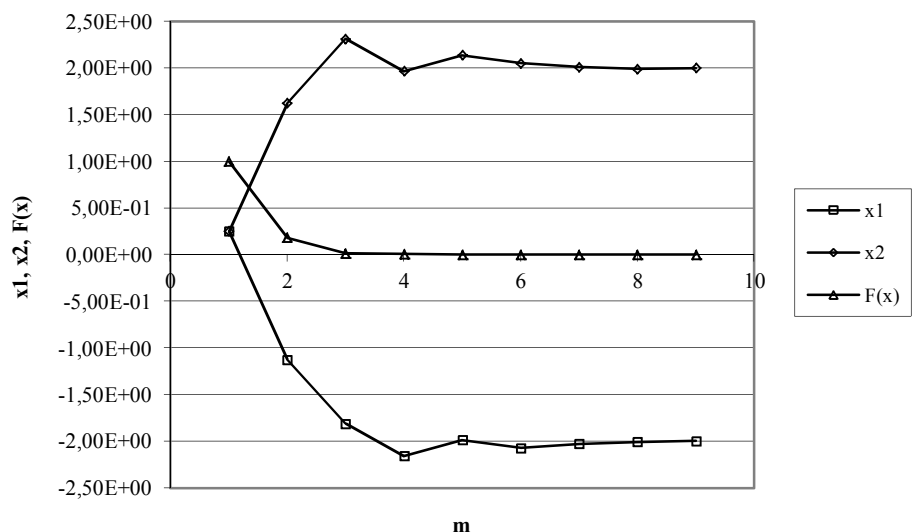
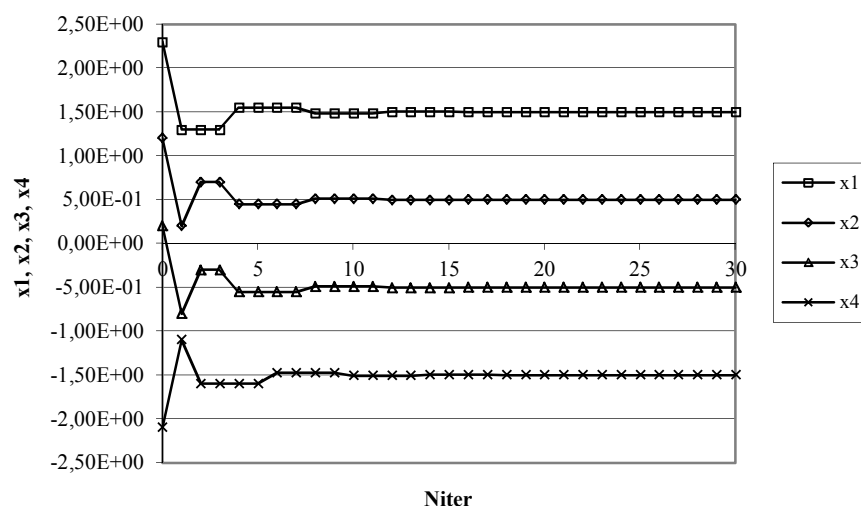


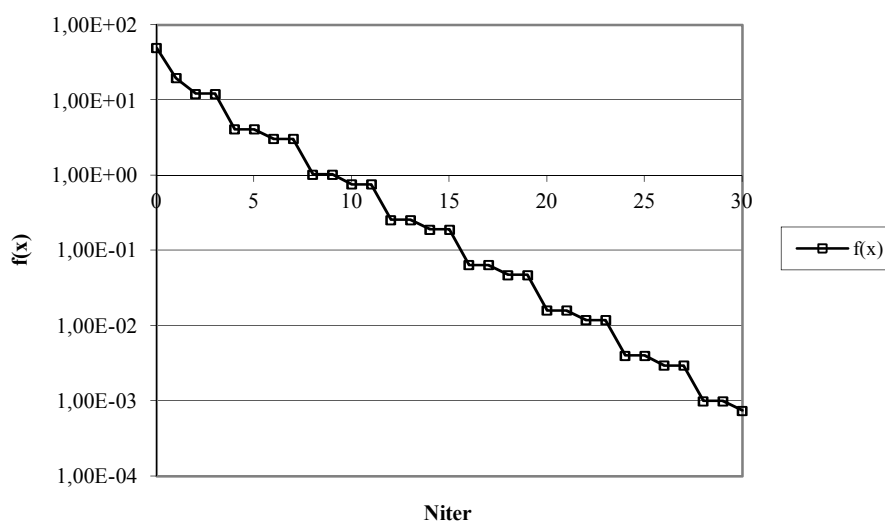
Рисунок 2 – Зависимость переменных управления  $x_1, x_2$  и функции  $F(x)$  от плотности  $m$  развертки кривой Пеано в заключительной фазе локального поиска алгоритма M-PCASFC

**Пример 2.** Дана матрица размера  $10 \times 11$ , элементы которой (теоретически) определены в виде

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } i > j, \\ 11-i, & \text{если } i = j, \quad 1 \leq i \leq 10, \quad 1 \leq j \leq 11. \\ -1, & \text{если } i < j, \end{cases}$$



**Рисунок 3 – Изменение значений переменных управления  $x_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , на завершающих итерациях (фаза локального поиска) алгоритма М-РСАНЖ**



**Рисунок 4 – Уточнение значений критериальной функции  $f(x)$  на завершающих итерациях (фаза локального поиска) алгоритма М-РСАНЖ**

Далее предполагается, что элементы матрицы  $a_{i,i}(x)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , являются изменяемыми, а именно  $a_{i,i} = 8.5 + x_i$ , где  $x_i - i$ -я переменная управления,  $1 \leq i \leq 4$ . Требуется определить значения переменных управления, при которых спектр сингулярных чисел рассматриваемой матрицы имеет вид:  $\sigma_{11-k} = \sqrt{k(k+1)}$ ,  $k = 0, \dots, 10$ .

Решение получено с использованием гибридного алгоритма М-РСАНЖ. По завершении фазы сканирования пространства переменных (выделение области, перспективной на глобальный минимум) была определена стартовая точка для фазы локального поиска методом Хука-Дживса. Сходимость решения иллюстрируют рисунки 3, 4 ( $N_{iter}$  – число итераций). Найдено приближенное решение задачи глобальной минимизации:  $f(x^{30}) \approx 0,7446 \cdot 10^{-3}$  при  $x_1^{30} \approx 1,50001$ ;  $x_2^{30} \approx 0,49999$ ;  $x_3^{30} \approx -0,50001$ ;  $x_4^{30} \approx -1,49994$ . Здесь вектор

переменных управления определяет значения элементов матрицы  $a_{i,i}(x^{30})$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , весьма близкие к заданным теоретически; при этом  $\delta_{\sigma}(x^{30}) < 10^{-4}$ .

**Выводы.** Рассмотрены экстремальные задачи для сингулярных чисел матриц, зависящих от параметров. Предложен подход к решению экстремальных задач с использованием новых гибридных алгоритмов глобальной недифференцируемой оптимизации. Исследование пространства переменных управления проводится стохастическим методом, реализуемым кратным алгоритмом столкновения частиц. В первом гибридном алгоритме М-РСАНJ при локальном поиске используется детерминированный метод Хука–Дживса. Во втором гибридном алгоритме М-PCASFCE локальный поиск реализуется методом кривой, заполняющей пространство. Решение модельных задач оптимизации сингулярных чисел матриц, зависящих от конечного числа параметров, получено с достаточной для приложений точностью.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (грант Президента РФ по поддержке научных исследований ведущих научных школ РФ, код НШ-4058.2014.8).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pulecchi, T. Object-oriented modelling for spacecraft dynamics: Tools and applications / T. Pulecchi, F. Casella, M. Lovera // *Simulation Modelling and Theory*. – 2010. – V. 18. – № 1. – P. 63–86.
2. Danforth, C.M. Using singular value decomposition to parametrize state-dependent model errors / C.M. Danforth, E. Kalnay // *Journal of the Atmospheric Sciences*. – 2008. – V. 65. – № 4. – P. 1467–1478.
3. Vaidya, P.G. A nonlinear generalization of singular value decomposition and its applications to mathematical modelling and chaotic cryptanalysis / P.G. Vaidya, S.P.S. Anand, N. Nagaraj // *Acta Applicandae Mathematicae*. – 2010. – V. 112. – № 2. – P. 205–221.
4. Dieci, L. The singular value decomposition to approximate spectra of dynamical systems. Theoretical aspects / L. Dieci, C. Elia // *Journal of Differential Equations*. – 2006. – V. 230, № 2. – P. 502–531.
5. Gu, M. Subspace iteration randomization and singular value problems / M. Gu // *SIAM Journal on Scientific Computing*. – 2015. – V. 37. – № 3. – P. A1139–A1173.
6. Мироновский, Л.А. Анализ кратности ганкелевых сингулярных чисел управляемых систем / Л.А. Мироновский, Т.Н. Соловьева // *Автоматика и телемеханика*. – 2015. – Т. 76. – № 2. – С. 18–31.
7. Lee, N. Estimating a few extreme singular values and vectors for large-scale matrices in tensor train format / N. Lee, A. Cichocki // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. – 2015. – V. 36. – № 3. – P. 994–1014.
8. Montaña, E. Nonnegative matrices with prescribed extremal singular values / E. Montaña, M. Salas, R.L. Soto // *Computers and Mathematics with Applications*. – 2008. – V. 56. – № 1. – P. 30–42.
9. Mengi, E. Nearest linear systems with highly deficient reachable subspaces / E. Mengi // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. – 2012. – V. 33, № 3. – P. 1000–1017.
10. Chen, X. Sensitivity analysis for the generalized singular value decomposition / X. Chen, W. Li // *Numerical Linear Algebra with Applications*. – 2013. – V. 20. – № 1. – P. 138–149.
11. Chu, M.T. A study of singular spectrum analysis with global optimization techniques / M.T. Chu, M.M. Lin, L. Wang // *Journal of Global Optimization*. – 2014. – V. 60. – № 2. – P. 551–574.
12. Wu, L. A preconditioned hybrid SVD method for computing accurately singular triplets of large matrices / L. Wu, A. Stathopoulos // *SIAM Journal on Scientific Computing*. – 2015. – V. 37. – № 5. – P. S365–S388.
13. Kirsch, A. An introduction to the mathematical theory of inverse problems / A. Kirsch. – New York et al.: Springer, 2011. – XIV+308 p.
14. Luz, E.F.P. A new multi-particle collision algorithm for optimization in a high performance environment / E.F.P. Luz, J.C. Becceneri, H.F. de Campos Velho // *Journal of Computational Interdisciplinary Sciences*, 2008. – V. 1. – P. 3–10.
15. Rios-Coelho, A.C. A Metropolis algorithm combined with Hooke–Jeeves local search method applied to global optimization / A.C. Rios-Coelho, W.F. Sacco, N. Henderson // *Applied Mathematics and Computation*. – 2010. – V. 217. – № 2. – P. 843–85.
16. Voglis, C. MEMPSODE: A global optimization software based on hybridization of population-based algorithms and local searches / C. Voglis, K.E. Parsopoulos, D.G. Papageorgiou, I.E. Lagaris, M.N. Vrahatis // *Computer Physics Communications*. – 2012. – V. 183. – № 2. – P. 1139–1154.
17. Sulimov, V.D. Application of hybrid algorithms to computational diagnostic problems for hydromechanical systems / V.D. Sulimov, P.M. Shkapov // *Journal of Mechanics Engineering and Automation*. – 2012. – V. 2. – № 12. – P. 734–741.
18. Сулимов, В.Д. Гибридные методы вычислительной диагностики двухфазного потока в циркуляционном контуре / В.Д. Сулимов, П.М. Шкапов // *Математическое моделирование и численные методы*. – 2015. – № 3. – С. 68–88.

**Сулимов Валерий Дмитриевич**  
МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва  
старший преподаватель кафедры  
«Теоретическая механика»  
E-mail: spm@bmstu.ru

**Шкапов Павел Михайлович**  
МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва  
Доктор технических наук, зав.  
кафедрой «Теоретическая механика»  
E-mail: spm@bmstu.ru

**Сулимов Андрей Валерьевич**  
Филиал МГУ им. М.В.  
Ломоносова в г. Севастополе  
Старший специалист по  
учебно-методической работе  
практикума по физике  
E-mail: spm@bmstu.ru



# CORRECTION MATRIX MODELS SYSTEMS SINGULAR SPECTRUM USING HYBRID OPTIMIZATION ALGORITHM

*Consideration is being given to numerical procedures of updating matrices of system model in connection with solving extremal problems on singular values. Criterion functions are supposed being continuous, Lipschitzian, multiextremal and not everywhere differentiable. Global solutions are searched by use of hybrid algorithms. Numerical examples are presented.*

**Keywords:** dynamic system, singular value, criterion function, Peano curve, global optimization, Metropolis algorithm, hybrid algorithm.

## BIBLIOGRAPHY

1. Pulecchi, T. Object-oriented modelling for spacecraft dynamics: Tools and applications / T. Pulecchi, F. Casella, M. Lovera // *Simulation Modelling and Theory*. – 2010. – V. 18. – № 1. – P. 63–86.
2. Danforth, C.M. Using singular value decomposition to parametrize state-dependent model errors / C.M. Danforth, E. Kalnay // *Journal of the Atmospheric Sciences*. – 2008. – V. 65. – № 4. – P. 1467–1478.
3. Vaidya, P.G. A nonlinear generalization of singular value decomposition and its applications to mathematical modelling and chaotic cryptanalysis / P.G. Vaidya, S.P.S. Anand, N. Nagaraj // *Acta Applicandae Mathematicae*. – 2010. – V. 112. – № 2. – P. 205–221.
4. Dieci, L. The singular value decomposition to approximate spectra of dynamical systems. Theoretical aspects / L. Dieci, C. Elia // *Journal of Differential Equations*. – 2006. – V. 230. № 2. – P. 502–531.
5. Gu, M. Subspace iteration randomization and singular value problems / M. Gu // *SIAM Journal on Scientific Computing*. – 2015. – V. 37. – № 3. – P. A1139–A1173.
6. Mironovskiy, L.A. Analiz kratnosti gankel'evykh singularnykh chisel upravlyayemykh sistem / L.A. Mironovskiy, T.N. Solov'eva // *Avtomatika i telemekhanika*. – 2015. – T. 76. – № 2. – S. 18–31.
7. Lee, N. Estimating a few extreme singular values and vectors for large-scale matrices in tensor train format / N. Lee, A. Cichocki // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. – 2015. – V. 36. – № 3. – P. 994–1014.
8. Montaña, E. Nonnegative matrices with prescribed extremal singular values / E. Montaña, M. Salas, R.L. Soto // *Computers and Mathematics with Applications*. – 2008. – V. 56. – № 1. – P. 30–42.
9. Mengi, E. Nearest linear systems with highly deficient reachable subspaces / E. Mengi // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. – 2012. – V. 33. № 3. – P. 1000–1017.
10. Chen, X. Sensitivity analysis for the generalized singular value decomposition / X. Chen, W. Li // *Numerical Linear Algebra with Applications*. – 2013. – V. 20. – № 1. – P. 138–149.
11. Chu, M.T. A study of singular spectrum analysis with global optimization techniques / M.T. Chu, M.M. Lin, L. Wang // *Journal of Global Optimization*. – 2014. – V. 60. – № 2. – P. 551–574.
12. Wu, L. A preconditioned hybrid SVD method for computing accurately singular triplets of large matrices / L. Wu, A. Stathopoulos // *SIAM Journal on Scientific Computing*. – 2015. – V. 37. – № 5. – P. S365–S388.
13. Kirsch, A. An introduction to the mathematical theory of inverse problems / A. Kirsch. – New York et al.: Springer, 2011. – XIV+308 p.
14. Luz, E.F.P. A new multi-particle collision algorithm for optimization in a high performance environment / E.F.P. Luz, J.C. Becceneri, H.F. de Campos Velho // *Journal of Computational Interdisciplinary Sciences*, 2008. – V. 1. – P. 3–10.
15. Rios-Coelho, A.C. A Metropolis algorithm combined with Hooke-Jeeves local search method applied to global optimization / A.C. Rios-Coelho, W.F. Sacco, N. Henderson // *Applied Mathematics and Computation*. – 2010. – V. 217. – № 2. – P. 843–85.
16. Voglis, C. MEMPSODE: A global optimization software based on hybridization of population-based algorithms and local searches / C. Voglis, K.E. Parsopoulos, D.G. Papageorgiou, I.E. Lagaris, M.N. Vrahatis // *Computer Physics Communications*. – 2012. – V. 183. – № 2. – P. 1139–1154.
17. Sulimov, V.D. Application of hybrid algorithms to computational diagnostic problems for hydromechanical systems / V.D. Sulimov, P.M. Shkapov // *Journal of Mechanics Engineering and Automation*. – 2012. – V. 2. – № 12. – P. 734–741.
18. Sulimov, V.D. Gibridnyye metody vychislitel'nykh diagnostiki dvukhfaznogo potoka v tsirkulyatsionnom konture / V.D. Sulimov, P.M. Shkapov // *Matematicheskoye modelirovaniye i chislennyye metody*. – 2015. – № 3. – S. 68–88.

**Sulimov Valeriy Dmitriyevich**  
MSTU them N.E. Bauman Moscow  
Senior Lecturer of the Department  
«Theoretical Mechanics»  
E-mail: spm@bmstu.ru

**Shkapov Pavel Mikhaylovich**  
MSTU them N.E. Bauman Moscow  
Doctor of Technical Sciences, Head.  
Chair of «Theoretical Mechanics»  
E-mail: spm@bmstu.ru

**Sulimov Andrey Valeryevich**  
Branch of Moscow State University  
them M.V. Lomonosov Moscow State  
University in Sevastopol  
Senior Specialist for Education and  
Methodology Workshop on Physics  
E-mail: spm@bmstu.ru

## АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕПЛООБМЕННОГО АППАРАТА ОДНОГО КЛАССА КАК ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

*Рассматривается модель управляемого теплообменного аппарата конвективного типа в классе систем с распределенными параметрами. Преобразование Лапласа уравнений конвективного теплообмена позволяет построить модель теплообменного аппарата как объекта управления в области изображений. На этой основе предлагаются методы анализа динамических характеристик (весовой и единичной переходной функций) аппарата на строгой основе, полностью учитывающей аналитический характер изображений динамических характеристик.*

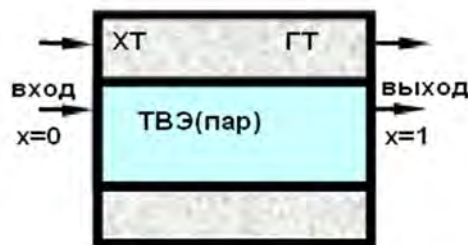
**Ключевые слова:** теплообмен, динамические характеристики, переходная функция, преобразование Лапласа, объект управления.

**Введение.** Исследования теплообмена представляют собою обширную область современной теории теплопередачи [1, 2]. Математический анализ тепловых процессов является весьма сложной, а часто и трудноразрешимой задачей. В особенности это касается проблемы анализа управляемых теплообменных процессов в теплообменных аппаратах (ТОА) энергетических установок и систем.

В относительно простых случаях теплообмен в ТОА представляет собою пространственно – одномерный процесс (одна пространственная координата) и для линейных моделей теплообмена большой интерес представляет собою преобразование Лапласа как общее средство построения и анализа моделей управляемых ТОА. Вместе с тем построение таких моделей на основе преобразования Лапласа уравнений теплообмена в частных производных (речь идет о пространственно – одномерных моделях) приводит к «неординарным» изображениям переменных вне класса рациональных или мероморфных функций. В силу этого в исследованиях динамики ТОА как объекта управления на основе преобразования Лапласа сложился упрощенный подход. Весьма часто ТОА (объект управления) грубо представляют различными комбинациями звена с запаздыванием и инерционного звена первого порядка. Это позволяет применить затем традиционные методы анализа САУ теплообменными процессами [3]. Строго говоря, такой подход оказывается необоснованным и даже непригодным в достаточно важных случаях моделей ТОА. Поэтому актуальна задача построения и анализа моделей ТОА на основе преобразования Лапласа дифференциальных уравнений процесса в частных производных адекватных аналитической природе изображений переменных системы.

**1. Постановка задачи.** Будем рассматривать процессы в цилиндрическом ТОА. По внутренней трубе аппарата подается тепловыделяющий пар, а в межтрубном пространстве – топливо, подводимое из расходной емкости (рисунок 1) с целью подогрева топлива на выходе аппарата в заданных пределах. Управление этим процессом происходит за счет изменения расхода  $G_T(t)$  тепловыделяющего пара.

Пусть  $T(x, t)$  – температура теплоносителя (топлива);  $x$  – относительная координата ( $0 \leq x \leq 1$ );  $t$  – время;  $T(0, t)$  – температура топлива на входе ТОА;  $T(1, t)$  – температура на выходе;  $T_T(x, t)$  – температура тепловыделяющего элемента (пара);  $T_T(0, t)$  – на входе,  $T_T(1, t)$  – на выходе; расход подогреваемого топлива  $G(t)$ . При равномерной по длине ТОА теплоотдаче, без учета тепловой инерционности стенки, уравнения динамики теплообмена имеют вид [2, 3]:



**Рисунок 1 – Схема ТОА:**

$ХТ$  – холодный теплоноситель;

$ГТ$  – горячий теплоноситель (топливо);

$ТВЭ$  – тепловыделяющий элемент (пар)

$$v \frac{\partial T_T(x,t)}{\partial t} + T_T(x,t) = a_2 G_T(t) + T(x,t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + b_1 \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + b_2 T(x,t) = b_3 T_T(x,t) - b_4 G(t), \quad (2)$$

с неотрицательными постоянными коэффициентами.

Начальные и граничные условия обычно принимаются в виде:

$$T(x,0)=0, \quad T_T(x,0)=0; \quad T(0,t)=T_0(t).$$

В задаче управляемого теплообмена основной интерес представляет процесс изменения температуры топлива  $T(1,t)$  на выходе ТОА. Возмущающими воздействиями являются температура топлива на входе  $T(0,t)$  и расход топлива  $G(t)$ , управляющим воздействием – расход тепловыделяющего пара  $G_T(t)$ .

Преобразование Лапласа уравнений (1),(2) по  $t$  с изображениями  $T_T(x,p)$ ,  $T(x,p)$  дает с учетом начальных условий после исключения  $T_T(x,p)$  соотношение:

$$\frac{dT(x,p)}{dx} + \left( b_1 p + b_2 - \frac{b_3}{vp+1} \right) T(x,p) = \frac{a_2 b_3}{vp+1} G_T(p) - b_4 G(p). \quad (3)$$

Будем рассматривать задачу построения и анализа математической модели ТОА как объекта управления методами теории преобразования Лапласа, адекватно отражающими аналитическую природу изображений переменных системы. Конечной целью определим разработку методов анализа типовых динамических характеристик ТОА рассматриваемого класса как объекта управления.

## 2. Построение и анализ математической модели ТОА как объекта управления.

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (3) с учетом граничного условия позволяет определить  $T(x,p)$  температуру топлива (точнее ее изображение) в произвольной точке ТОА в виде:

$$T(x,p) = T_0(p) e^{-A(p)x} + \frac{a_2 b_3}{(vp+1)A(p)} [1 - e^{-A(p)x}] G_T(p) - \frac{b_4}{A(p)} [1 - e^{-A(p)x}] G(p), \quad (4)$$

где

$$A(p) = b_1 p + b_2 - \frac{b_3}{vp+1}. \quad (5)$$

При  $x=1$  полученное выражение определяет изображение температуры топлива на выходе ТОА. В соответствии с выражением (4) имеем три компоненты температуры теплоносителя на выходе ( $x=1$ ):

$$T(1,p) = T_0(p) e^{-A(p)}, \quad (6)$$

$$T(1,p) = \frac{a_2 b_3}{(vp+1)A(p)} [1 - e^{-A(p)}] G_T(p), \quad (7)$$

$$T(1,p) = -\frac{b_4}{A(p)} [1 - e^{-A(p)}] G(p), \quad (8)$$

порождаемые возмущениями  $T_0(p)$ ,  $G_T(p)$ ,  $G(p)$  соответственно.

Соотношение (7) определяет математическую модель ТОА в комплексной области (комплексной плоскости переменной  $(p)$ ) как объекта управления с управляющим воздействием  $G_T(p)$ , а (6), (8) отражают возмущающие воздействия на него. В соответствии с изображениями компонент температуры теплоносителя (6)–(8) можно рассматривать каждую компоненту температуры на выходе ТОА в виде:

$$T(1,t) = \Theta(t) - \Psi(t). \quad (9)$$

Здесь второе слагаемое является интегралом обращения вида:

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} e^{pt} \Theta(p) e^{-A(p)} dp, \quad (10)$$

где  $\Theta(p)$  – дробно-рациональная функция, равная:

$$\Theta(p) = -T_0(p), \quad (11)$$

$$\Theta(p) = \frac{a_2 b_3}{(vp+1)A(p)} G_T(p), \quad (12)$$

$$\Theta(p) = -\frac{b_4}{A(p)} G(p) \quad (13)$$

для (6)–(8) соответственно. Первое слагаемое в (9)  $\Theta(t) = 0$  для (6), а для (7), (8) является оригиналом изображения  $\Theta(p)$ , определяемого соотношениями (12) и (13) соответственно.

Таким образом, при дробно–рациональных изображениях  $G_T(p), G(p)$ , соответствующие функции  $\Theta(t)$  могут быть определены по изображениям (12), (13) любым методом обращения дробно – рациональных изображений. Поэтому, основной интерес представляет интеграл (10). Учитывая выражение (5) для  $A(p)$ , находим:

$$\Psi(t) = 0, \quad t < b_1; \quad (14)$$

$$\Psi(t) = e^{-b_2} \mathcal{G}(t - b_1), \quad t \geq b_1, \quad (15)$$

где

$$\mathcal{G}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} e^{pt} \Theta(p) e^{\frac{b_3}{vp+1}} dp. \quad (16)$$

Задача анализа оригинала (16) является существенной и нетривиальной частью задачи анализа температуры  $T(1, t)$  на выходе ТОА как объекта управления. Рассмотрим возможные подходы к анализу интеграла (16). Один из них состоит в выделении вычета в существенно особой точке подынтегральной функции (16). Для этого понадобится оценка функции  $\gamma(p) = \exp \frac{b_3}{vp+1}$ . Пусть  $p = R e^{j\alpha}$ ,  $R = |p|$ ,  $\alpha = \arg p$ . Тогда легко находим:

$$\left| \gamma(R e^{j\alpha}) \right| \leq e^{\frac{b_3 (vR \cos \alpha + 1)}{v^2 R^2 + 2vR \cos \alpha + 1}} \leq e^{\frac{b_3 (vR + 1)}{(vR - 1)^2}}.$$

Таким образом, на всякой окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат при  $R \rightarrow \infty$   $\left| \gamma(R e^{j\alpha}) \right| \rightarrow 1$  равномерно относительно аргумента. Поскольку  $\Theta(p)$  – дробно–рациональная функция, то из этого следует, что интеграл (16) допускает применение леммы Жордана. Следовательно, его можно представить в виде:

$$\mathcal{G}(t) = \hat{\mathcal{G}}(t) + \mu(t), \quad (17)$$

где

$$\hat{\mathcal{G}}(t) = \sum \text{res } e^{pt} \Theta(p) e^{\frac{b_3}{vp+1}} \quad (18)$$

– сумма вычетов функции в полюсах изображения  $\Theta(p)$ , а

$$\mu(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint e^{pt} \Theta(p) e^{\frac{b_3}{vp+1}} dp \quad (19)$$

– вычет в существенно особой точке. В (19) контур интегрирования представляет собой любую окружность с центром в существенно особой точке  $p = -\frac{1}{v}$ , которая не охватывает полюсы функции  $\Theta(p)$ . Выполняя экспоненциальное разложение:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, \quad z = \frac{b_3}{v} \frac{1}{p + \frac{1}{v}}, \quad p \neq -\frac{1}{v}, \quad (20)$$

получаем для (19):

$$\mu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{b_3}{v} \right)^k \frac{1}{k!(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} e^{pt} \Theta(p) \bigg|_{p=-\frac{1}{v}} = e^{-\frac{1}{v}t} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{b_3}{v} \right)^{k+1} \frac{1}{(k+1)!k!} \mu_k(t, v), \quad (21)$$

где  $\mu_k(t, v)$  многочлены степени  $k$  переменной  $t$ :

$$\mu_0(t, v) = \alpha_0, \quad \mu_1(t, v) = \alpha_0 t + \alpha_1, \quad \mu_2(t, v) = \alpha_0 t^2 + 2\alpha_1 t + \alpha_2, \dots \quad (22)$$

$\alpha_i = \Theta^{(i)}\left(-\frac{1}{v}\right)$  – значение  $i$ -ой производной  $\Theta(p)$  при  $p = -\frac{1}{v}$ .

В общем виде можно записать:

$$\mu_k(t, v) = (t + D)^k \Theta(p) \bigg|_{p=-\frac{1}{v}}, \quad (23)$$

где  $D = \frac{d}{dp}$  – оператор дифференцирования:

$$D^k \Theta(p) = \frac{d^k}{dp^k} \Theta(p), \quad k = 1, 2, \dots; \quad D^0 \Theta(p) = \Theta(p). \quad (24)$$

Другой подход к анализу интеграла (16) состоит в применении функций Бесселя. В связи с разложением (21) рассмотрим контурный интеграл:

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint e^{pt} \frac{1}{p} e^{\frac{a}{p}} dp,$$

где контур интегрирования охватывает точку  $p=0$ . При аналогичном (20) использовании экспоненциального разложения имеем:

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{1}{k! 2\pi j} \oint e^{pt} \frac{1}{p^{k+1}} dp = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! k!} a^k t^k = I_0(2\sqrt{at}),$$

где  $I_0(z)$  – функция Бесселя нулевого порядка. Отметим, что соотношение:

$$I_0(2\sqrt{at}) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} e^{\frac{a}{p}} \right\} \quad (25)$$

представляет собой известное табличное соответствие и успешно применяется в решении задач теплообмена [2]. Покажем, как функции Бесселя с помощью (25) могут быть введены и для рассматриваемого интеграла обращения (16). Пусть:

$$T_0(p) = \frac{T_0}{p}, \quad G_T(p) = \frac{G_T}{p}, \quad G(p) = \frac{G}{p},$$

где  $T_0, G_T, G$  – заданные константы. Рассмотрим функцию изображение:

$$Y(p) = \frac{1}{p - \beta} e^{\frac{\alpha}{p+\lambda}} = \frac{1}{p + \lambda} e^{\frac{\alpha}{p+\lambda}} + \frac{\lambda + \beta}{p - \beta} \frac{1}{p + \lambda} e^{\frac{\alpha}{p+\lambda}}. \quad (26)$$

В силу (25) и теоремы смещения имеем:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p + \lambda} e^{\frac{\alpha}{p+\lambda}} \right\} = e^{-\lambda t} I_0(2\sqrt{\alpha t}).$$

Применяя ко второму слагаемому теорему умножения, получаем оригинал для (26):

$$Y(t) = e^{-\lambda t} I_0(2\sqrt{\alpha t}) + (\lambda + \beta) e^{\beta t} \int_0^t e^{-(\lambda + \beta)\tau} I_0(2\sqrt{\alpha \tau}) d\tau. \quad (27)$$

Отсюда при  $\beta=0, \lambda=\frac{1}{v}, \alpha=\frac{b_3}{v}$  для случая (11) следует оригинал (16)  $\mathcal{A}(t)=T_0 \mathcal{A}_0(t)$ , где:

$$\mathcal{A}_0(t) = e^{\frac{-1}{v}t} I_0(2\sqrt{\frac{b_3}{v}t}) + \frac{1}{v} \int_0^t e^{\frac{-1}{v}\tau} I_0(2\sqrt{\frac{b_3}{v}\tau}) d\tau.$$

Для рассмотрения случаев (12), (13) заметим, что по (5):

$$A(p) = \frac{q_0(p)}{vp + 1}, \quad q_0(p) = vb_1 p^2 + (b_1 + vb_2)p + b_2 - b_3. \quad (28)$$

Таким образом, в каждом из случаев (12), (13)  $\Theta(p)$  имеет три полюса  $p=0, p=\lambda_1, p=\lambda_2$ , где  $\lambda_1, \lambda_2$  – нули многочлена  $q_0(p)$ . Из этого следует разложение на простые дроби (случай кратного полюса опускаем):

$$\Theta(p) = \frac{\delta_0}{p} + \frac{\delta_1}{p - \lambda_1} + \frac{\delta_2}{p - \lambda_2}, \quad (29)$$

и для оригинала (16) найдем:

$$\mathcal{A}(t) = \delta_0 \mathcal{A}_0(t) + \delta_1 \mathcal{A}_1(t) + \delta_2 \mathcal{A}_2(t), \quad (30)$$

где выражения для  $\mathcal{A}_1(t), \mathcal{A}_2(t)$  получаем из (27) при  $\lambda=\frac{1}{v}, \alpha=\frac{b_3}{v}$  и  $\beta=\lambda_1, \beta=\lambda_2$  соответственно.

*Замечание.* Для исследования процессов теплообмена полезно отметить, что нули  $\lambda_1, \lambda_2$  многочлена  $q_0(p)$  вещественные. Причем, при  $b_2 - b_3 > 0$  – оба отрицательные, при  $b_2 - b_3 \leq 0$  – один отрицательный, а другой – неотрицательный.

Заметим, что представление оригинала (16) с помощью функций типа (27) может быть распространено на более общий случай дробно-рациональных изображений  $T_0(p), C_T(p), G(p)$  расширением разложений вида (29).

**3. Динамические характеристики ТОА как объекта управления.** В качестве исходного соотношения принимаем равенство (7), которое запишем в виде:

$$T(1, p) = \frac{a_2 b_3}{q_0(p)} [1 - e^{-A(p)}] G_T(p),$$

где многочлен  $q_0(p)$  будем называть характеристическим многочленом объекта управления, а функцию:

$$W_o(p) = \frac{a_2 b_3}{q_o(p)} [1 - e^{-A(p)}]$$

– передаточной функцией объекта управления по управляющему воздействию  $G_T(p)$ . В качестве динамических характеристик временной области примем

$$g_o(t) = L^{-1}\{W_o(p)\} \quad \text{и} \quad h_o(t) = L^{-1}\left\{W_o(p) \frac{1}{p}\right\}$$

– весовую и единичную переходную функции объекта управления соответственно. Для построения этих функций используем соотношение (9), в котором:

$$\Theta(t) = L^{-1}\{\Theta(p)\},$$

– оригинал изображения, а

$$\Theta(p) = \frac{a_2 b_3}{q_0(p)} G_T(p)$$

и  $\psi(t)$  определено соотношениями (10), (14) – (16). Причем, следует принять  $G_T(p)=1$  и  $G_T(p)=\frac{1}{p}$  для весовой и единичной переходной функции соответственно.

При вычислении функции  $g(t)$  согласно изложенному выше можно использовать два типа представлений. В первом (выделение вычета в существенно особой точке  $p = \frac{-1}{v}$ ) при вычислении (16) используются соотношения (17), (18) и (21) – (24) с функцией:

$$\Theta(p) = \frac{a_2 b_3}{q_0(p)}.$$

Во втором (применение функций Бесселя)– функция  $\Theta(p)$  представляется в виде суммы простых дробей (34)

$$\Theta(p) = \frac{\delta_0}{p} + \frac{\delta_1}{p - \lambda_1} + \frac{\delta_2}{p - \lambda_2},$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – нули характеристического многочлена  $q_0(p)$ .

Коэффициенты разложения (29) равны:

$$\delta_0 = 0, \delta_1 = \lim_{p \rightarrow \lambda_1} (p - \lambda_1) \Theta(p) = \frac{a_2 b_3}{q'_0(\lambda_1)}, \delta_2 = \lim_{p \rightarrow \lambda_2} (p - \lambda_2) \Theta(p) = \frac{a_2 b_3}{q'_0(\lambda_2)}$$

и

$$\delta_0 = \frac{a_2 b_3}{q_0(0)}; \quad \delta_1 = \frac{a_2 b_3}{\lambda_1 q'_0(\lambda_1)}; \quad \delta_2 = \frac{a_2 b_3}{\lambda_2 q'_0(\lambda_2)}$$

– для весовой и единичной переходной функции соответственно. Вычисление функции  $g(t)$  по (16) при разложении (29) дает соотношение (30), в котором:

$$g_i(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} \frac{1}{p - \lambda_i} e^{\frac{b_3}{vp+1}} dp, \quad i = 0, 1, 2, \quad (31)$$

причем  $\lambda_0 = 0$ . Интегралы (31) вычисляются с помощью соотношений (26), (27). Пусть левая часть равенства (27) записана в виде  $Y(t, \beta)$ . Учитывая, что в (31)  $\alpha = \frac{b_3}{v}$ ,  $\lambda = \frac{1}{v}$  неизменные параметры, а параметр  $\beta$  имеет значения  $\beta = 0, \beta = \lambda_1, \beta = \lambda_2$  для функций  $g_0(t), g_1(t), g_2(t)$  соответственно, в силу соотношений (26), (27) будем иметь:

$$g_0(t) = Y(t, 0), \quad g_1(t) = Y(t, \lambda_1), \quad g_2(t) = Y(t, \lambda_2).$$

Таким образом, для динамических характеристик ТОА получаем следующие представления.

**Весовая функция  $g_0(t)$ , представление первого типа:**

$$g_0(t) = a_2 b_3 \left[ \frac{1}{q'_0(\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{q'_0(\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} \right], \quad 0 \leq t < b_1;$$

$$g_0(t) = a_2 b_3 \left[ \frac{1}{q'_0(\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{q'_0(\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} \right] - e^{-b_2} \mathcal{G}(t-b_1), \quad t \geq b_1.$$

Функция  $\mathcal{G}(t)$  определена как:

$$\mathcal{G}(t) = a_2 b_3 \left[ \frac{1}{q'_0(\lambda_1)} e^{\frac{b_3}{v\lambda_1+1}} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{q'_0(\lambda_2)} e^{\frac{b_3}{v\lambda_2+1}} e^{\lambda_2 t} \right] + e^{\frac{-1}{v} t} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{b_3}{v} \right)^{k+1} \frac{1}{k!(k+1)!} \mu_k(t, v).$$

Здесь (см. (22) – (24)) следует принять  $\Theta(p) = \frac{a_2 b_3}{q_0(p)}$ .

**Весовая функция  $g_0(t)$ , представление второго типа:**

$$g_0(t) = a_2 b_3 \left[ \frac{1}{q'_0(\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{q'_0(\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} \right], \quad 0 \leq t \leq b_1;$$

$$g_0(t) = a_2 b_3 \left[ \frac{1}{q'_0(\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{q'_0(\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} \right] - e^{-b_2} \mathcal{G}(t-b_1), \quad t \geq b_1,$$

где

$$\mathcal{G}(t) = \delta_1 Y(t, \lambda_1) + \delta_2 Y(t, \lambda_2); \quad \delta_1 = \frac{a_2 b_3}{q'_0(\lambda_1)}, \quad \delta_2 = \frac{a_2 b_3}{q'_0(\lambda_2)}. \quad (32)$$

**Единичная переходная функция  $h_0(t)$ , представление первого типа:**

$$h_0(t) = a_2 b_3 \left[ \frac{1}{q_0(0)} + \frac{1}{\lambda_1 q'_0(\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2 q'_0(\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} \right], \quad 0 \leq t < b_1;$$

$$h_0(t) = a_2 b_3 \left[ \frac{1}{q_0(0)} + \frac{1}{\lambda_1 q'_0(\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2 q'_0(\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} \right] - e^{-b_2} \mathcal{G}(t-b_1), \quad t \geq b_1.$$

Здесь функция  $\mathcal{G}(t)$  определена как:

$$\mathcal{G}(t) = a_2 b_3 \left[ \frac{1}{q_0(0)} e^{b_3} + \frac{1}{\lambda_1 q'_0(\lambda_1)} e^{\frac{b_3}{v\lambda_1+1}} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2 q'_0(\lambda_2)} e^{\frac{b_3}{v\lambda_2+1}} e^{\lambda_2 t} \right] + e^{\frac{-1}{v} t} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{b_3}{v} \right)^{k+1} \frac{1}{k!(k+1)!} \mu_k(t, v),$$

а при вычислении функций  $\mu_k(t, v)$  следует принять  $\Theta(p) = \frac{a_2 b_3}{p q_0(p)}$ .

**Единичная переходная функция  $h_0(t)$ , представление второго типа:**

$$h_0(t) = a_2 b_3 \left[ \frac{1}{q_0(0)} + \frac{1}{\lambda_1 q'_0(\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2 q'_0(\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} \right], \quad 0 \leq t < b_1;$$

$$h_0(t) = a_2 b_3 \left[ \frac{1}{q_0(0)} + \frac{1}{\lambda_1 q'_0(\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2 q'_0(\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} \right] - e^{-b_2} \mathcal{G}(t-b_1), \quad t \geq b_1,$$

где

$$\mathcal{G}(t) = \delta_0 Y(t, 0) + \delta_1 Y(t, \lambda_1) + \delta_2 Y(t, \lambda_2) \quad (33)$$

и

$$\delta_0 = \frac{a_2 b_3}{q_0(0)}, \quad \delta_1 = \frac{a_2 b_3}{\lambda_1 q'_0(\lambda_1)}, \quad \delta_2 = \frac{a_2 b_3}{\lambda_2 q'_0(\lambda_2)}.$$

*Замечание.* Для вычисления значений функции:

$$Y(t, \beta) = e^{-\lambda t} I_0(2\sqrt{\alpha t}) + (\lambda + \beta) e^{\beta t} \int_0^t e^{-(\lambda+\beta)\tau} I_0(2\sqrt{\alpha \tau}) d\tau \quad (34)$$

с использованием таблиц для функции Бесселя нулевого порядка первого рода  $I_0(x)$  [4] полезно с помощью подстановки  $x = 2\sqrt{\alpha \tau}$  пользоваться записью функции  $Y(t, \beta)$  в виде:

$$Y(t, \beta) = e^{-\lambda t} I_0(2\sqrt{\alpha t}) + \frac{(\lambda + \beta)}{2\alpha} e^{\beta t} \eta(2\sqrt{\alpha t}),$$

где функция  $\eta(z)$  определена как:

$$\eta(z) = \int_0^z e^{-\frac{\lambda+\beta}{4\alpha} x^2} x I_0(x) dx.$$

*Замечание.* При оценках поведения функций  $g_0(t), h_0(t)$  с представлениями второго типа полезно иметь в виду формулу Бесселя [4]:

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \varphi) d\varphi,$$

из которой, в частности, следует при  $z \in R$ ,  $|I_0(z)| \leq 1$ .

**4. Построение динамических характеристик ТОА интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений.** Наряду с указанными представлениями для весовой  $g_0(t)$  и единичной переходной  $h_0(t)$  функций, можно предложить метод их вычисления на основе интегрирования обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

С помощью функции (34) введем в рассмотрение функции:

$$Y_0(t) = Y(t, 0) = e^{-\lambda t} I_0(2\sqrt{\alpha t}) + \lambda \eta_0(t),$$

$$Y_1(t) = Y(t, \lambda_1) = e^{-\lambda t} I_0(2\sqrt{\alpha t}) + (\lambda + \lambda_1) \eta_1(t),$$

$$Y_2(t) = Y(t, \lambda_1) = e^{-\lambda t} I_0(2\sqrt{\alpha t}) + (\lambda + \lambda_2) \eta_2(t),$$

где

$$\eta_0(t) = \int_0^t e^{-\lambda \tau} I_0(2\sqrt{\alpha \tau}) d\tau, \quad \eta_1(t) = e^{-\lambda_1 t} \int_0^t e^{-(\lambda + \lambda_1) \tau} I_0(2\sqrt{\alpha \tau}) d\tau,$$

$$\eta_2(t) = e^{-\lambda_2 t} \int_0^t e^{-(\lambda + \lambda_2) \tau} I_0(2\sqrt{\alpha \tau}) d\tau.$$

Дифференцируя равенства для  $\eta_0(t), \eta_1(t), \eta_2(t)$ , найдем:

$$\frac{d\eta_0(t)}{dt} = e^{-\lambda t} I_0(2\sqrt{\alpha t}), \quad \eta_0(0) = 0; \quad (35)$$

$$\frac{d\eta_1(t)}{dt} = \lambda_1 \eta_1(t) + e^{-\lambda t} I_0(2\sqrt{\alpha t}), \quad \eta_1(0) = 0; \quad (36)$$

$$\frac{d\eta_2(t)}{dt} = \lambda_2 \eta_2(t) + e^{-\lambda t} I_0(2\sqrt{\alpha t}), \quad \eta_2(0) = 0, \quad (37)$$

где, как указывалось выше,  $\alpha = \frac{b_3}{v}$ ,  $\lambda = \frac{1}{v}$ , а  $\lambda_1, \lambda_2$  – нули характеристического многочлена (28).

Интегрирование линейных дифференциальных уравнений (35)–(37) при указанных начальных условиях позволяет найти функции  $\eta_0(t), \eta_1(t), \eta_2(t)$ . С помощью соотношения:

$$\mathcal{Y}(t) = \delta_0 Y_0(t) + \delta_1 Y_1(t) + \delta_2 Y_2(t),$$

объединяющего формулы (32), (33) (с соответствующими значениями коэффициентов  $\delta_0, \delta_1, \delta_2$  в случаях вычисления функций  $g_0(t), h_0(t)$ ) получим в результате представление:

$$\mathcal{Y}(t) = \delta_0 \lambda \eta_0(t) + \delta_1 (\lambda + \lambda_1) \eta_1(t) + \delta_2 (\lambda + \lambda_2) \eta_2(t),$$

поскольку  $\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 = 0$ . Действительно, для случая весовой функции  $\Theta(p) = \frac{a_2 b_3}{q_0(p)}$ , а для случая

единичной переходной  $\Theta(p) = \frac{a_2 b_3}{p q_0(p)}$ . Как указывалось выше, в первом случае  $\delta_0 = 0$ ,  $\delta_1 = \frac{a_2 b_3}{q'_0(\lambda_1)}$ ,

$\delta_2 = \frac{a_2 b_3}{q'_0(\lambda_2)}$ , а во втором  $\delta_0 = \frac{a_2 b_3}{q_0(0)}$ ,  $\delta_1 = \frac{a_2 b_3}{\lambda_1 q'_0(\lambda_1)}$ ,  $\delta_2 = \frac{a_2 b_3}{\lambda_2 q'_0(\lambda_2)}$ . Поскольку в каждом из случаев степень знаменателя рассматриваемых рациональных функций  $\Theta(p)$  не меньше двух, вычеты функций  $\Theta(p)$  в бесконечно удаленной точке равны нулю. Поэтому по теореме о вычетах (сумма всех вычетов, включая вычет в бесконечно удаленной точке, равна нулю) имеем указанное выше равенство для суммы коэффициентов.

**Заключение.** Выполненное исследование применения преобразования Лапласа к анализу динамика ТОА как объекта управления имеет два основных результата. Во-первых, построена аналитическая модель ТОА как объекта управления в комплексной области (области изображений), позволяющая далее рассматривать задачи анализа САУ ТОА. Во-вторых, предложены эффективные методы анализа типовых динамических характеристик –



весовой и единичной переходной функций в выходном сечении ТОА ( $x=1$ ). Причем, эти методы точные (адекватные первичной модели в виде дифференциальных уравнений в частных производных). Следует отметить, что аналогичным образом динамические характеристики можно исследовать и в любом ( $x<1$ ) другом сечении ТОА. Предложенная система обыкновенных дифференциальных уравнений (35)–(37) для построения функции  $g(t)$  позволит разработать эффективные методы расчета и анализа процессов ТОА рассмотренного класса.

Представляется, что полученные результаты позволят также по новому подойти к анализу и всей задачи управления (регулирования) температуры на выходе ТОА с полным учетом аналитических особенностей модели САУ ТОА.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барабанов, А.Т. Задача анализа устойчивости системы автоматического регулирования конвективного теплообмена / А.Т. Барабанов, С.А. Конева // Динамические системы. Межведомственный науч. сб. – Симферополь: Таврия. – 2004. – №18. – С. 14–22.
2. Кутателадзе, С.С. Основы теории теплообмена / С.С. Кутателадзе. – М.: Атомиздат, 1979. – 415 с.
3. Себиси, Т. Конвективный теплообмен / Т. Себиси, П. Брэдшоу. – М.: Мир, 1987. – 589 с.
4. Янке, Е. Таблицы функций с формулами и кривыми / Е. Янке, Ф. Эмде. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 420 с.

**Конева Светлана Андреевна**

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

доцент, кандидат технических наук

ул. Университетская 33, г. Севастополь, 299053

E-mail: info@sevsu.ru

---

S.A. KONEVA

## ANALYSIS DYNAMIC CHARACTERISTICS OF DEVICE WITH THE HEAT EXCHANGE OF ONE CLASS AS MANAGEMENT OBJECT

*Examines the object model with the exchange of heat by convection in the class of systems with distributed parameters. The Laplace transformation of equations of convective heat transfer allows to build a model of the control object in the field images. On this basis the proposed methods of analysis of dynamic characteristics of the device, where full account of the analytical nature of the images the dynamic characteristics.*

**Keywords:** *heat exchange, dynamic characteristics, transitive function, object of management, transformation of Laplace.*

## BIBLIOGRAPHY

1. Barabanov, A.T. Zadacha analiza ustoychivosti sistemy avtomaticheskogo regulirovaniya konvektivnogo teploobmena/ A.T. Barabanov, S.A. Koneva// Dinamicheskiye sistemy. Mezhvedomstvennyy nauch. sb. – Simferopol: Tavriya. – 2004. – №18. – S. 14–22.
2. Kutateladze, S.S. Osnovy teorii teploobmena/S.S. Kutateladze. – M.: Atomizdat, 1979. – 415 s.
3. Sebisi, T. Konvektivnyy teploobmen /T. Sebisi, P. Bredshou. – M.: Mir, 1987. – 589 s.
4. Yanke, Ye. Tablitsy funktsiy s formulami i krivymi / Ye. Yanke, F. Emde. – M.: GIFML, 1959. – 420 s.

**Koneva Svetlana Andreyevna**

FGAOU IN «Sevastopol National Technical University»

Associate Professor, Ph.D.

Str. University 33, Sevastopol, 299053

E-mail: info@sevsu.ru

А.В. НЕМЕНКО, М.М. НИКИТИН

## ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРУЗОПОДЪЕМНОЙ СИСТЕМЫ

*Рассмотрен метод интегрирования системы дифференциальных уравнений динамики подвешенного груза с помощью степенных рядов. Предложен способ формализации метода с помощью рекурсивной матрицы из коэффициентов решения, позволяющий исключить ручное дифференцирование и составление формул в случае нелинейной системы.*

**Ключевые слова:** грузоподъемная система, дифференциальное уравнение, метод степенных рядов, матрица коэффициентов.

**Введение.** Механизмы, выполняющие работу по перемещению груза, представляют собой транспортный модуль, архитектура которого обуславливается производственной необходимостью.

Грузоподъемные механизмы имеют большое количество степеней свободы, что затрудняет управление ими в реальном времени. В качестве независимых движений, осуществляемых системой, выступают линейные и угловые перемещения её составных частей (кран может двигаться по рельсам с одновременным поворотом стрелы и изменением высоты перемещаемого груза, манипулятор может осуществлять сложное движение в нескольких плоскостях и т.д.). Нормальному течению производственного процесса препятствуют плохо формализуемые факторы (в частности, при тросовой передаче груза возникают его колебания, а в морских условиях на результат накладывается качка судна, носящая характер случайного процесса; манипулятор с течением времени теряет точность вследствие износа прецизионных пар и т.п.). Превышение размаха колебаний выше допустимых значений может привести к повреждению агрегата и созданию аварийной ситуации.

Техническое состояние грузоподъемной системы рассматривается поблочно с выделением критичных элементов и зон. В механизмах подъема груза, в состав которого входит гибкий элемент в виде троса, критичные зоны выделяют на подвеске и учитывают их при установлении граничных и конечных параметрах целевой функции.

Для обеспечения нормальной работы механизма необходимо, чтобы целевая функция была непрерывной, обладать гибкой системой внутренних связей и предусматривать компенсации случайных внештатных возмущений.

Построение целевой функции грузоподъемной системы основано на характеристиках ее базовых оценочных показателей с разделением логических процедур и технологических операций, упорядоченных для контроля и открытых для управления с коррекцией. Компоненты целевой функции образуют совокупность параметров, каждый из которых имеет свои факторы влияния на рабочий процесс.

Целевая функция устанавливает структурную композицию информационно – управляющего комплекса, который позволяет оценивать состояние объекта в любой текущий момент и обеспечивать безаварийную работу грузоподъемной системы.

Математическая модель механической системы, обладающей  $P$  степенями свободы, является решением системы уравнений Лагранжа второго рода суммарного порядка  $2P$ . Система состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с явно выраженной старшей производной. Учет эффектов высших порядков без линеаризации необходим для наиболее полного использования массогабаритных показателей конструкции, одновременно позволяя предупредить возникновение опасного уровня напряжений в материале. Для оперативного контроля текущего состояния механизма существенное значение имеет скорость построения математической модели. Для этого применяются численные методы.

Метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов занимает промежуточное положение между численными и аналитическими методами и позволяет делать качественные выводы о свойствах решения. В частности, решение в виде достаточного количества коэффициентов ряда Тейлора не только дает возможность вычислить значение величины в конкретный момент времени в пределах

радиуса сходимости ряда, но и, в отдельных случаях, получить прогноз ее поведения при стремлении аргумента к бесконечности. Однако, формализация метода затрудняется в случае систем высокой размерности, содержащих трансцендентные функции. В настоящей работе предложен метод матричной записи степенного ряда, позволяющий обойти эти затруднения.

**Цель работы:** Формализовать процесс оценки и прогнозирования координат груза в зависимости от времени.

**Постановка задачи:** Рассмотрим грузоподъемную систему, где груз перемещается параллельно оси  $Z$  на тросе, который сматывается с барабана. Плоскость  $XY$  является плоскостью приземления груза. Проверим выполнение условий  $X < X_{\max}$  и  $Y < Y_{\max}$  в течение всего времени перемещения груза.

**Изложение материала исследования:**

Выразим координаты  $X(t)$  и  $Y(t)$  через углы  $\varphi$  и  $\psi$ , которые груз составляет с осью  $Z$ :

$$X(t) = l(t) \cdot \sin \varphi(t); Y(t) = l(t) \cdot \sin \psi(t), \quad (1)$$

где  $l(t)$  – изменение длины троса во времени.

Критерии оптимизации при  $t = T$  имеют вид:

$$\varphi(T) = 0; \psi(T) = 0.$$

Функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  представляют собой непосредственное решение уравнений Лагранжа второго рода, описывающих колебания груза относительно точки подвеса.

Решим задачу в общем виде.

Рассмотрим дифференциальное уравнение порядка  $m$ :

$$x^{(m)} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(m-2)}, x^{(m-1)}) \quad (2)$$

с начальными условиями Коши при  $t=t_0$

$$x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0, \dots, x^{(m-1)} = x_0^{(m-1)}. \quad (3)$$

При использовании для интегрирования степенных рядов решение уравнения (2) ищут в виде ряда:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n. \quad (4)$$

В каждом конкретном случае необходимо дополнительное исследование на предмет возможности применения метода. В случае положительного результата все производные  $x$  также возможно выразить рядами:

$$x^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+i}^{(i)} (t-t_0)^n, \quad (5)$$

где  $c_{n+\mu}^{(\mu)} = c_{n+\mu} \cdot \prod_{i=1}^{\mu} (n+i); \mu = 1 \dots v.$

В зависимости от вида правой части выражения (2), производим суммирование членов при одинаковых степенях  $(x - x_0)$  и последовательно находим коэффициенты  $c_n$  ряда (4).

Общая рекуррентная формула имеет вид:

$$c_n = f(c_0, c_1, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}). \quad (6)$$

В уравнении (6) первые  $m$  коэффициентов находим непосредственно из начальных условий уравнения (3):

$$c_{\mu} = \frac{y_0^{(\mu)}}{\mu!}. \quad (7)$$

После нахождения достаточного по точности решения количества коэффициентов оценивают радиус сходимости ряда (4) и в случае необходимости строим его аналитические продолжения [1], обеспечивающие заданную точность решения на всем интервале изменения абсциссы.

Приведенные положения метода степенных рядов являются общими для широкого класса дифференциальных уравнений, в которых возможно в явном виде выразить старшую производную.

Однако, в отдельных случаях, в зависимости от вида правой части уравнения (2), возможны значительные осложнения приведенного выше алгоритма. Одним из таких примеров является наличие в уравнении трансцендентных функций от  $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(m-1)}$ .

Разложив правую часть выражения (6) в многопараметрический ряд по степеням величин, содержащихся в скобках, с центром сходимости в точке  $(t_c, x_c, \dot{x}_c, \ddot{x}_c, \dots, x_c^{(i)}, x_c^{(m)})$  получим:

$$x^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial t} \cdot (t - t_c) + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \cdot (x^{(i)} - x_c^{(i)}) \right)^n \cdot f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(m-1)}). \quad (8)$$

При раскрытии скобки в выражении (8) степень оператора дифференцирования интерпретируется как взятие частной производной порядка, равного величине степени.

Используем мультиномиальные коэффициенты и преобразуем уравнение (8) к виду:

$$x^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\left( kt + \sum_{i=0}^{m-1} k_i \right) = n} \frac{1}{kt! \prod_{i=0}^{m-1} k_i!} \cdot (t - t_c) \cdot \prod_{i=0}^{m-1} (x^{(i)} - x_c^{(i)})^{k_i} \times \\ \times \frac{\partial^{kt}}{\partial t^{kt}} \cdot \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\partial^{k_i}}{\partial (x^{(i)})^{k_i}} \cdot f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(m-1)}). \quad (9)$$

Из структуры выражения (9) следует, что, несмотря на справедливость формулы (6), получение решения в виде ряда (2) требует неоднократной операции подстановки ряда в ряд.

Такая операция связана с ручным выводом формул, количество которых резко увеличивается с ростом порядка уравнения  $m$  и порядка обрабатываемого члена многопараметрического ряда  $n$ .

Возведение ряда (4) в степень производим по формуле Коши для перемножения степенных рядов:

$$A \cdot B = C, \quad (10)$$

где  $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$ ;  $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t - t_0)^n$ ;  $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n$ ;  $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ .

Отмеченные недостатки метода степенных рядов могут быть значительно снижены введением формализованной записи ряда в виде матрицы из его коэффициентов, причем алгебраические действия над такими матрицами должны давать своим результатом матрицу, соответствующую ряду, полученному в результате тех же действий над исходными рядами.

#### Сформулируем и докажем Утверждение.

Пусть  $A$  и  $B$  – степенные ряды вида (10) с одним и тем же центром сходимости  $t_0$ , причем  $b_0 \neq 0$ .

Пусть элементы квадратных матриц  $(A_n)$  и  $(B_n)$  размерности  $(n+1)$  заданы соотношениями:

$$\begin{cases} (A_n)_{ij} = a_{i-j} & \text{при } (i \geq j) \\ 0 & \text{при } (i < j) \end{cases}, \quad \begin{cases} (B_n)_{ij} = b_{i-j} & \text{при } (i \geq j) \\ 0 & \text{при } (i < j) \end{cases}. \quad (11)$$

В выражениях (11)  $a_n$  и  $b_n$  – коэффициенты рядов (10). Тогда при  $(n \geq i \geq j)$  элемент строки  $i$  столбца  $j$  матрицы  $(C_n)$ , полученной в результате применения любой из операций: алгебраического суммирования, умножения, умножения одной из матриц на обратную другую, к матрицам  $(A_n)$  и  $(B_n)$  (11), является коэффициентом порядка  $(i - j)$  ряда  $C$ , полученного в результате соответствующей операции (алгебраического суммирования, умножения, деления, примененной в той же последовательности к рядам  $A$  и  $B$ ).

Запишем матрицу (11) в развернутом виде:

$$(A_n) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & . & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & . & a_0 & 0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & . & a_1 & a_0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Требуемые свойства матриц вида (12) проверим непосредственным сравнением результатов алгебраических действий над ними и над исходными рядами.

*Алгебраическое суммирование.* В обозначениях (10) по правилам сложения степенных рядов:

$$A + B = C, \quad (13)$$

где  $c_n = a_n + b_n$ .

По правилам сложения матриц, каждый элемент суммы двух квадратных матриц равен сумме элементов слагаемых с теми же индексами:

$$(A_n) + (B_n) = (C_n), \quad (14)$$

где  $(C_n)_{ij} = (A_n)_{ij} + (B_n)_{ij}$ .

Раскрываем выражение  $(C_n)$ .

$$(C_n) = \begin{pmatrix} a_0 + b_0 & 0 & . & 0 & 0 \\ a_1 + b_1 & a_0 + b_0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-2} + b_{n-2} & . & a_0 + b_0 & 0 \\ a_n + b_n & a_{n-1} + b_{n-1} & . & a_1 + b_1 & a_0 + b_0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

В выражении (15) каждый элемент удовлетворяет соотношению (13).

*Умножение.* Из теории матриц [2] известно, что в общем случае операция перемножения матриц некоммукативна, так что  $(A_n) \cdot (B_n) \neq (B_n) \cdot (A_n)$ . При умножении  $(A_n)$  на  $(B_n)$  элементы строки  $(A_n)$  умножаются на элементы столбца  $(B_n)$ . В результате получаем:

$$(C_n) = \begin{pmatrix} a_0 \cdot b_0 & 0 & . & 0 & 0 \\ a_1 \cdot b_0 + a_0 b_1 & a_0 \cdot b_0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot b_{n-i-1} & \sum_{i=0}^{n-2} a_i \cdot b_{n-i-2} & . & a_0 \cdot b_0 & 0 \\ \sum_{i=0}^n a_i \cdot b_{n-i} & \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot b_{n-i-1} & . & a_1 \cdot b_0 + a_0 \cdot b & a_0 \cdot b_0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

В выражении (16) каждый элемент является соответствующим коэффициентом ряда  $C$  в формуле (10). Заменяв в матрице (16) все коэффициенты  $a$  на  $b$  и наоборот, получим правую часть, соответствующую ряду, полученному в результате умножения ряда  $B$  на ряд  $A$ .

Для матриц вида (11) операция умножения является коммутативной.

*Деление.* Деление степенных рядов можно представить, как произведение прямого и обращенного ряда. При доказанной выше справедливости Утверждения для умножения, доказательство эквивалентности деления рядов (10) и умножения одной из матриц (11) на обратную другую сводится к доказательству эквивалентности операций нахождения обратного ряда:

$$C = \frac{1}{B} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (t - t_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (t - t_0)^n. \quad (17)$$

Матрица, обратная второй из матриц (12) получает вид:

$$(C_n) = (B_n)^{-1}. \quad (18)$$

Коэффициенты левой части (17) могут быть получены [3] с помощью рекуррентных соотношений:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{1}{b_0} \\ c_n = -\frac{1}{b_0} \cdot \sum_{i=1}^n c_{n-i} \cdot b_i \end{cases}. \quad (19)$$

Допустим, что Утверждение справедливо относительно деления, и тогда матрица  $(B_n)^{-1}$  принимает вид:

$$(B_1)^{-1} = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \dots & 0 \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

В выражении (20) коэффициенты заданы формулами (19), и должно выполняться следующее из определения обратной матрицы равенство:

$$(B_n) \cdot (B_n)^{-1} = (E_n), \quad (21)$$

В выражении (21)  $(E_n)$  – единичная матрица размерности  $(n+1)$ :

$$(E_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

При матрицах (11) и (20), учитывая доказанную выше справедливость Утверждения для умножения и коммутативность этой операции, получим, что результат произведения матриц левой части (20) может быть представлен в виде:

$$(B_n) \cdot (B_n)^{-1} = \begin{pmatrix} b_0 \cdot c_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 \cdot c_0 + b_0 c_1 & b_0 \cdot c_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot c_{n-i-1} & \sum_{i=0}^{n-2} b_i \cdot c_{n-i-2} & \dots & b_0 \cdot c_0 & 0 \\ \sum_{i=0}^n b_i \cdot c_{n-i} & \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot c_{n-i-1} & \dots & b_1 \cdot c_0 + b_0 \cdot c_1 & b_0 \cdot c_0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Из формул (19) получим следующие тождества:

$$\begin{cases} b_0 \cdot c_0 = 1 \\ b_0 \cdot c_k + \sum_{i=1}^k b_i \cdot c_{k-i} = 0 \end{cases}, \quad (24)$$

где  $k$  – целое число,  $k > 0$ .

Учитывая зависимость (24), устанавливаем, что правая часть выражения (23) представляет собой единичную матрицу размерности  $(n+1)$ , то есть, при сделанном допущении соотношение (21) выполняется и матрица (20) с элементами (19) является обратной к матрице (11). Согласно теореме Кронеккера-Капелли [2], эта матрица является единственной.

Утверждение доказано.

В рассматриваемой тросовой грузоподъемной системе с учетом трех степеней свободы подвешенного груза (колебания груза в плоскостях XZ и YZ; вращение груза вокруг оси Z), преобразовав уравнения Лагранжа, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l(t)} \cdot \sin \varphi + \frac{E \cdot I_\varphi}{m \cdot l^2(t)} \cdot \varphi - \frac{M_\varphi(t)}{m \cdot l^2(t)} = 0 \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{g}{l(t)} \cdot \sin \psi + \frac{E \cdot I_\psi}{m \cdot l^2(t)} \cdot \psi - \frac{M_\psi(t)}{m \cdot l^2(t)} = 0, \\ \frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{G \cdot k_\beta}{l(t) \cdot I_{кр}} \cdot \beta = 0 \end{cases} \quad (25)$$

где  $\varphi$  – угол размаха подвеса в плоскости XZ, рад;  
 $\psi$  – угол размаха подвеса в плоскости YZ, рад;  
 $\beta$  – угол поворота груза относительно оси Z;  
 $Z$  – вертикальная ось;  $t$  – время от начального состояния, с;  
 $g$  – ускорение свободного падения,  $\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$ ,  $l(t)$  – длина подвеса, м;  
 $E$  – модуль упругости материала троса, Па;  
 $I_\varphi, I_\psi$  – моменты инерции сечения троса при по осям X и Y соответственно,  $\text{м}^4$ ;  
 $I_{кр}$  – момент инерции груза относительно оси Z,  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ,  
 $G$  – модуль сдвига, Па;  
 $k_\beta$  – коэффициент;  
 $M_\varphi(t), M_\psi(t)$  – моменты внешних сил, действующих на груз в плоскостях XZ и YZ соответственно, Н·м;  
 $m$  – масса груза, кг.

С учетом условий Коши в начальный момент времени ( $t = 0$ ), значение углов, а также их производных будут иметь вид:

$$\varphi = \varphi_0; \varphi' = 0; \psi = \psi_0; \psi' = 0; \beta = \beta_0; \beta' = 0. \quad (26)$$

Зависимость длины подвеса от времени при постоянной угловой скорости барабана, с которого сматывается трос, имеет вид линейной функции:

$$l(t) = l_0 + \omega \cdot r \cdot t, \quad (27)$$

где  $l_0$  – длина подвеса в начальный момент времени, м;

$\omega$  – угловая скорость барабана,  $\text{рад} \cdot \text{с}^{-1}$ ;

$r$  – радиус барабана, м.

При переменной угловой скорости барабана выражение (27) имеет вид:

$$l(t) = l_0 + r \cdot \int_0^t \omega(t) \cdot dt \quad (28)$$

Из структуры системы (25) следует, что уравнения могут быть проинтегрированы независимо, в результате чего будут получены угловые координаты груза, которые при установленной с помощью формул (27) или (28) длине подвеса однозначно зададут положение груза в пространстве в любой момент времени.

При интегрировании уравнений системы (25) с помощью ряда (4) первые 2 коэффициента находятся непосредственно по формуле (7), а для нахождения остальных необходимо возводить в  $i$  степень ряд из ранее найденных, умножать его на  $q_i$ , суммировать коэффициенты при одинаковой степени ( $t - t_0$ ) и делить сумму на произведение в формуле (5) при  $\mu = 2$ .

Использование матриц вида (11) позволяет значительно упростить запись вычислительного процесса и формализовать его применение в случае объектно-ориентированных языков программирования, а также прикладных пакетов вычислительных программ (MathCAD, Maple, Mathematica и др.).

В системе (25) каждое из уравнений может быть проинтегрировано независимо, причем первые два уравнения имеют одну структуру, третье интегрируется в явном виде и для данной вычислительной схемы интереса не представляет. Рассмотрим применение метода к первому из уравнений.

Коэффициенты ряда (4) для уравнения устанавливаются по общей формуле:

$$c_{n+2} = \frac{c_{n+2}^{(2)}}{(n+1) \cdot (n+2)}. \quad (29)$$

Промежуточный коэффициент  $c_{n+2}^{(2)}$  определяется по формуле:

$$c_{n+2}^{(2)} = \left( C_{n+2}^{(2)} \right)_{n0}. \quad (30)$$

Промежуточная матрица  $(C_{n+2}^{(2)})$  равна:

- для точного решения:

$$\left( C_{n+2}^{(2)} \right) = -g \cdot (L_n)^{-1} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} q_i (C_n)^i - \frac{E \cdot I_{\varphi}}{m} \cdot \left( (L_n)^{-1} \right)^2 + \frac{1}{m} \cdot (M_n) \cdot \left( (L_n)^{-1} \right)^2 \quad (31)$$

- для приближенного решения:

$$\left( C_{n+2}^{(2)} \right) \approx -g \cdot (L_n)^{-1} \cdot \sum_{i=0}^k q_i (C_n)^i - \frac{E \cdot I_{\varphi}}{m} \cdot \left( (L_n)^{-1} \right)^2 + \frac{1}{m} \cdot (M_n) \cdot \left( (L_n)^{-1} \right)^2 \quad (32)$$

В выражения (31) и (32) входят компоненты:

-  $(C_n)$  – матрица вида (11) порядка  $(n+1)$ , составленная из  $(n+1)$  найденных ранее коэффициентов (4);

-  $(L_n)$  – матрица, характеризующая изменение длины подвеса со следующими элементами строки  $i$  и столбца  $j$ :

$$(L_n)_{ij} = l_0 \text{ при } (i = j); (L_n)_{ij} = \omega \cdot r \text{ при } (i - j = 1), (L_n)_{ij} = 0 \text{ - в остальных случаях,} \quad (33)$$

-  $q_i$  – коэффициенты разложения функции  $f(y) = \sin(y)$  в зависимости от порядкового номера:

$$q_i = \frac{1}{i!} \cdot \sin \frac{\pi \cdot i}{2}, \quad (34)$$

-  $(M_n)$  – матрица коэффициентов разложения в ряд по степеням времени момента внешних сил.

$$\begin{cases} (M_n)_{ij} = cm_{i-j} & \text{при } (i \geq j) \\ 0 & \text{при } (i < j) \end{cases}, \quad (35)$$

где  $cm$  – коэффициенты разложения.

Ряд с коэффициентами (34) знакочередующийся, поэтому, по теореме Лейбница, погрешность при вычислении его частичной суммы не должна превосходить первого отброшенного члена. Это свойство позволяет прекратить суммирование правой части выражения (31) как только очередное слагаемое станет меньше заданной погрешности результата. Повторяя процесс построения матрицы коэффициентов уравнения (32)  $s$  раз при увеличении её размерности на единицу, получим  $s$  первых коэффициентов разложения функции  $\varphi(t)$ :

$$\varphi(t) \approx \sum_{n=0}^s c_{n\varphi} \cdot t^n. \quad (36)$$

Применив те же рассуждения, получим приближенное решение второго уравнения (25):

$$\psi(t) \approx \sum_{n=0}^s c_{n\psi} \cdot t^n. \quad (37)$$

Третье уравнение проинтегрируем в явном виде и получим его общее решение:

$$\begin{aligned} \beta(t) = & C_1 \cdot \sqrt{l_0 + \omega \cdot t} \cdot J_1 \left( 2 \cdot \sqrt{\frac{G \cdot k_{\beta}}{I_{kp}} \cdot \frac{l_0 + \omega \cdot t}{\omega^2}} \right) + \\ & + C_2 \cdot \sqrt{l_0 + \omega \cdot t} \cdot Y_1 \left( 2 \cdot \sqrt{\frac{G \cdot k_{\beta}}{I_{kp}} \cdot \frac{l_0 + \omega \cdot t}{\omega^2}} \right), \end{aligned} \quad (38)$$

где  $J_1$  и  $Y_1$  – функции Бесселя первого и второго рода первого порядка [4];

$C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования, которые определены из начальных условий (26):



$$C_1 = \frac{\beta_0 \cdot Y_0(C)}{(Y_0(C) \cdot J_1(C) - J_0(C) \cdot Y_1(C)) \cdot \sqrt{l_0}}; \quad (39)$$

$$C_2 = \frac{\beta_0 \cdot J_0(C)}{(J_0(C) \cdot Y_1(C) - Y_0(C) \cdot J_1(C)) \cdot \sqrt{l_0}}. \quad (40)$$

В уравнениях (39) и (40) принято:

$$C = 2 \cdot \sqrt{\frac{G \cdot k_\beta \cdot l_0}{\omega^2 \cdot I_{кр}}}. \quad (41)$$

Таким образом, установлены угловые параметры колебаний груза на тросовой подвеске.

**Выводы:** Динамика грузоподъемного устройства описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений, частным случаем которой является система (25).

Первые два её уравнения описывают колебание груза в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, которые, складываясь, образуют фигуру Лиссажу. Вследствие нелинейности, частоты колебаний строго равны только при равенстве их амплитуд (начальные условия), что на практике не выполняется, поэтому груз будет двигаться не по эллипсу, как он бы описывался линеаризованной системой, а по сложной незамкнутой кривой, рассчитать которую приближенно позволяет предлагаемый метод решения. Для этого решения (34) совмещается с решением (35) и в зависимости от времени строятся точки  $X = l(t) \cdot \sin \varphi(t)$ ,  $Y = l(t) \cdot \sin \psi(t)$ , определяющие проекцию центра масс груза на плоскость ХУ, параллельную плоскости его приземления. Решение третьего уравнения системы в виде (36) описывает вращение вокруг центра масс и учитывается с целью предотвращения резонанса с описанным выше движением, что может вызвать обрыв троса.

Для интегрирования систем вида (24) с приемлемой степенью точности и адаптивности к введению в правые части уравнений новых нелинейных функций в настоящей работе был предложен метод записи степенных рядов в виде матриц (10), что обеспечивает наглядность восприятия кода человеком и возможность масштабирования на системы дифференциальных уравнений практически любой размерности. Алгоритм может быть применен как непосредственно в специализированном программном обеспечении (что и было продемонстрировано в настоящей работе на примере системы Maple), так и в объектно-ориентированных языках программирования высокого уровня (Object Pascal, C++ и Java), где матрица коэффициентов может быть представлена в виде класса.

Полученное решение позволяет получить детерминированную функцию размаховых колебаний груза при постоянных параметрах системы. Увеличив количество удерживаемых коэффициентов и применив метод аналитических продолжений, определим координаты  $X$  и  $Y$  для любого момента времени в пределах перемещения груза по уровням, что позволяет проверить их на соответствие допустимой области.

В случае несоответствия необходима коррекция решения изменением параметров.

При использовании в грузоподъемной системе двигателя с постоянной частотой вращения вариантами коррекции характеристик упругих колебаний грузовой подвески могут быть: изменение массы груза  $m$  или использование троса иной жесткости. В сложении с гравитационными колебаниями, обусловленными только длиной троса, и ветровой нагрузкой, меняющейся по сложному закону, упругие колебания образуют сложное около периодическое движение, амплитуда которого может быть минимизирована подбором их частот. Очевидно, что в процессе оптимизации масса груза и сечение троса не должны выходить за пределы грузоподъемности системы.

В случае, когда в грузоподъемной системе использован двигатель с регулируемой частотой вращения (например, двигатель постоянного тока с тиристорным управлением), то дополнительным параметром оптимизации является угловая скорость барабана. Это позволяет при микропроцессорном управлении добиться оптимальных параметров перемещения груза варьированием его кинематических параметров без каких-либо изменений в механической части.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Де Брёйн, Н.Г. Асимптотические методы в анализе. Пер. с англ. / Н.Г. де Брёйн – М.: Физматгиз, 1962. – 246 с.

2. Маркус, М. Обзор по теории матриц и матричных неравенств / М. Маркус, Х. Минк // М.: Наука, 1972. – 232 с.
3. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Том 3. Специальные функции. Дополнительные главы. / А. П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.А. Маричев – М.: Физматлит, 2002. – 688 с.
4. Olver, F.W.J. NIST Handbook of Mathematical Functions/ F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark// Cambridge University Press, 2010. – 951 p.
5. Неменко, А.В. Оптимизация контроля рабочего состояния гибкого органа подъема груза / А.В. Неменко, И.С. Тищенко // Прогрессивные направления развития машино-приборостроительных отраслей и транспорта. – М.: Изд – во МГАПИ. – 2000. – С. 49 – 53.
6. Никитин, М.М. Применение матриц к решению нелинейной задачи Коши при помощи степенных рядов / М. М. Никитин // Моделирование и исследование сложных систем. – М.: Изд – во МГАПИ. – 2000. – С. 59 – 62.
7. Неменко, А.В. Оценка технического состояния гибких органов грузоподъемных машин / А.В. Неменко// Прогрессивные направления развития машино-приборостроительных отраслей и транспорта. – Севастополь: Изд – во СевНТУ. – 2007. – С. 234 – 237.
8. Неменко, А.В. Оценка работоспособности механизмов подъема груза. / А.В. Неменко, А.О. Соловьев, Р.М. Зинаков // Прогрессивные направления развития машино-приборостроительных отраслей и транспорта. – Севастополь: Изд – во СевНТУ. – 2011. – С. 154 – 156.

**Неменко Александра Васильевна**  
 ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»  
 Кандидат технических наук, доцент кафедры  
 «Техническая механика и машиноведение»  
 ул. Университетская 33, г. Севастополь, 299053  
 Тел. + 7(978)8330519  
 E-mail: valesan@listl.ru

**Никитин Михаил Михайлович**  
 ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»  
 Инженер кафедры «Техническая механика и машиноведение»  
 ул. Университетская 33, г. Севастополь, 299053  
 Тел. + 7(978)0621579  
 E-mail: m.nikitin.1979@gmail.com

A.V. NEMENKO, M.M. NIKITIN

## EVALUATION OF DYNAMIC CHARACTERISTICS HOISTING SYSTEM

*We consider the way of numeric solving of differential equation system of lifted body with the aid of power series. We propose formalized method using recurrent matrix composed of solution coefficients allowing to avoid manual formulae composing for the next term of series in case of non-linear system.*

**Keywords:** cargo-lifting system, differential equation, power series method, matrix of coefficients.

### BIBLIOGRAPHY

1. De Broyn, N.G. Asimptoticheskiye metody v analize. Per. s angl. / N.G. de Broyn – М.: Fizmatgiz, 1962. – 246 s.
2. Markus, M. Obzor po teorii matrits i matrichnykh neravenstv / M. Markus, KH. Mink // М.: Nauka, 1972. – 232 s.
3. Prudnikov, A.P. Integraly i ryady. Tom 3. Spetsialnyye funktsii. Dopolnitelnyye glavy. / A. P. Prudnikov, YU.A. Brvchkov, O.A. Marichev – М.: Fizmatlit, 2002. – 688 s.
4. Olver, F.W.J. NIST Handbook of Mathematical Functions/ F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark// Cambridge University Press, 2010. – 951 p.
5. Nemenko, A.V. Optimizatsiya kontrolya rabocheho sostoyaniya gibkogo organa podvema gruzha / A.V. Nemenko, I.S. Tishchenko // Progressivnyye napravleniya razvitiya mashino-priborostroitelnykh otrasley i transporta. – М.: Изд – во МГАПИ. – 2000. – С. 49 – 53.
6. Nikitin, M.M. Primeneniye matrits k resheniyu nelinevnykh zadachi Koshi pri pomoshchi stepennnykh ryadov / M.M. Nikitin // Modelirovaniye i issledovaniye slozhnykh sistem. – М.: Изд – во МГАПИ. – 2000. – С. 59 – 62.
7. Nemenko, A.V. Otsenka tekhnicheskogo sostoyaniya gibkikh organov gruzopodvemnnykh mashin / A.V. Nemenko// Progressivnyye napravleniya razvitiya mashino-priborostroitelnykh otrasley i transporta. – Sevastopol: Изд – во СевНТУ. – 2007. – С. 234 – 237.
8. Nemenko, A.V. Otsenka rabotosposobnosti mekhanizmov podvema gruzha. / A.V. Nemenko, A.O. Solovjev, R.M. Zinakov // Progressivnyye napravleniya razvitiya mashino-priboro-stroitelnykh otrasley i transporta. – Sevastopol: Изд – во СевНТУ. – 2011. – С. 154 – 156.

**Nemenko Aleksandra Vasiljevna**  
 FGAOU IN «Sevastopol National Technical University»  
 Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of  
 the Department «Technical Mechanics and Engineering»  
 Str. Universitv 33. Sevastopol, 299053  
 Tel. + 7 (978) 8330519  
 E-mail: valesan@listl.ru

**Nikitin Mikhail Mikhavlovich**  
 FGAOU IN «Sevastopol National Technical University»  
 Engineer of the Department «Technical Mechanics and Engineering»  
 Str. Universitv 33. Sevastopol, 299053  
 Tel. + 7 (978) 0621579  
 E-mail: m.nikitin.1979@gmail.com

А.В. НЕМЕНКО, М.М. НИКИТИН

## ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ ДЕТАЛИ С УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНОЙ

*Получены расчетные формулы, позволяющие вычислить вероятность разрушения механической системы, содержащей деталь с усталостной трещиной, которая может скачкообразно перемещаться на одно или несколько выделенных положений.*

**Ключевые слова:** усталостное разрушение, дискретная модель, цепь Маркова, быстрое умножение матриц.

Прогнозная диагностика усталостных повреждений является актуальной задачей при использовании механических систем, детали которых подвергаются циклическим нагрузкам. Возникновение и рост усталостных повреждений происходит внутри массива материала на основе слияния микроразрушений и образования магистральной трещины. Этот процесс имеет вероятностный характер.

Визуализация такого повреждения возможна лишь при выходе его на поверхность объекта, т.е. на последней стадии, когда предотвратить поломку невозможно. Разрушение детали происходит внезапно, чем и опасны усталостные отказы.

Скрытый характер усталостного разрушения в сочетании с возникновением его в труднодоступных для осмотра деталях и узлах обуславливает применения специальных методов диагностики.

Трещины могут возникнуть в валах, осях, корпусных конструкциях, элементах нагруженных передач и в других элементах агрегата. Деталь с обнаруженной усталостной трещиной безусловно подлежит замене, так как развитие трещины является необратимым процессом, продолжающимся до момента статического долома, когда сечение детали становится меньше необходимого для её несущей способности. Тем не менее, немедленная остановка транспортного средства (самолет, морское судно) или технологической линии (процесс непрерывной разливки стали) для замены такой детали не всегда возможна с точки зрения безопасности и в этом плане мало отличается от вынужденной остановки вследствие отказа.

Поэтому возникает актуальная практическая проблема: усталость обнаружена, размер трещины известен, желаемое время для безопасной остановки – тоже, какова вероятность, что по истечении этого времени деталь будет разрушена? В частности существуют акустические, оптические, тензометрические, резистивные и другие методы диагностики, позволяющие с практически приемлемой степенью достоверности определить усталость в ряде предметных областей. Миниатюризация датчиков, приемно–передающих устройств и вычислительной части очевидно позволяет расширить область их применения, чему препятствием является именно алгоритмическая часть.

С целью предотвращения отказа требуется оперативный контроль текущего состояния объекта. Безаварийную работу агрегата обеспечим применив экспертно–управляющий комплекс, в состав которого входят первичные информаторы, а также аналитико–управляющий и исполнительно–корректирующий блоки. Мониторингом детальной структуры агрегата выявляем критичный элемент и опасную зону и подбираем датчики контроля по косвенным параметрам (деформация энергетической эмиссии, изменение омического сопротивления и т.д.), которые отражают динамику развития усталостного дефекта.

Сигналы с первичных преобразователей поступают в согласующий анализатор, где присутствуют объективные показатели по критичному элементу (механические характеристики материала, в том числе предел его выносливости и т.д.), полученные предварительно по логистико–нормативным регламентам. Происходит сравнение информации базовой и фактической с выработкой рекомендаций и команд по управлению рабочим процессом.

Классификация состояний объекта путем отбора и упорядочения признаков функциональных признаков. Последовательное исключение вторичных признаков позволяет состояние объекта проецировать на подпространства меньшей размерности. Изменение признаков в исходном пространстве и степень пересечения классов в подпространстве объектов с распределенными параметрами определяет применение алгоритмов со случайным поиском.

Рассматриваемая система контроля и оценки технического состояния объекта позволяет проводить шаговый и интегральный анализ в реальном времени.

В работе [3] были приведены теоретические и экспериментальные предпосылки, позволяющие описать динамику изменения характерного размера трещины, возникающей в детали типа вал, в виде марковского процесса дискретного времени с поглощающим состоянием, и получен алгоритм быстрого возведения в степень матрицы вероятностей переходов специального вида.

Вместе с тем, при малом количестве имеющегося к настоящему времени экспериментального материала, граф состояний, рассмотренный в [3], нельзя считать единственным вариантом марковского описания усталостного процесса. Более общим подходом, включающим рассмотренный граф как частный случай, является модель развития трещины, допускающая ненулевую вероятность перехода фронта в любое из заранее выделенных дискретных положений.

В этом случае остается та же проблема оперативного прогноза вероятности разрушения, связанная с необходимостью возведения в степень матрицы вероятностей переходов высокого порядка и с затратами времени на эту операцию. В настоящей работе мы приводим ее решение для матрицы вероятностей переходов общего вида.

**Постановка задачи.** Существует  $m$  состояний  $s_0, s_1, \dots, s_{m-1}$ , в которых может находиться фронт трещины. Все состояния являются существенными (переход в прежние состояния ни из одного из них не возможен), кроме того состояние  $s_{m-1}$  является поглощающим (происходит разрушение и марковский процесс завершается). На начальном шаге фронт находится в состоянии  $s_j$ . Исходами каждого следующего шага могут являться нахождение фронта трещины в том же состоянии с вероятностью  $p_0$ , либо переход его в состояние  $s_k$  с вероятностью  $p_{k-j}$ .

Требуется: определить вероятность нахождения фронта трещины в состоянии  $s_{m-1}$  через  $N$  шагов с затратностью алгоритма, меньшей, чем непосредственное возведение матрицы вероятностей переходов в степень  $N$ .

**Изложение материала исследования.** Согласно математическому аппарату марковских цепей дискретного времени [4], искомая вероятность численно равна элементу строки  $j$  столбца  $m-1$  матрицы вероятностей переходов, возведенной в степень  $N$ .

Учитывая принятые допущения, матрицу вероятностей переходов запишем в виде

$$P_m = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \dots & p_{m-2} & 1 - \sum_{j=0}^{m-2} p_j \\ 0 & p_0 & \dots & p_{m-3} & 1 - \sum_{j=0}^{m-3} p_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_0 & 1 - p_0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Рассмотрим возможность сокращенного вычисления элементов  $(P_m)^N$ .

**Утверждение 1.** Элементы матрицы (1) в степени  $N$ , не входящие в последний столбец, не зависят от элементов ее последнего столбца.

**Доказательство.**

Положим  $(N = 2)$ , тогда:

$$(P_m)^2 = (P_m) \cdot (P_m). \quad (2)$$

Элемент строки  $i$  столбца  $j$  результирующей матрицы равен:

$$(P_m)^2_{ij} = \sum_{k=0}^{m-1} (P_m)_{ik} \cdot (P_m)_{kj}. \quad (3)$$

Учитывая верхнетреугольный вид обеих матриц правой части выражения (3), их элементы равны нулю при выполнении условий  $(i > k)$  и  $(k > j)$ . Для элементов предпоследнего столбца  $j = m - 2$ , поэтому в сумме правой части выражения (3) произведение, содержащее индекс  $k = m - 1$  обращается в ноль. Для элементов предыдущих столбцов условие  $j < m - 1$  выполняется автоматически. Таким образом, в левой части выражения (2) содержится верхнетреугольная матрица, удовлетворяющая Утверждению 1. Применив те же рассуждения к произведению ее с матрицей (1) и повторяя процесс, получим справедливость Утверждения 1 для любой целой неотрицательной степени.

Утверждение 1 доказано.

### Утверждение 2.

Пусть  $A$  и  $B$  – степенные ряды вида:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n; B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x - x_0)^n. \quad (4)$$

Пусть элементы квадратных матриц  $(A_m)$  и  $(B_m)$  размерности  $m$  заданы следующими соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_m)_{ij} = a_{j-i} \text{ при } (i \leq j) \\ 0 \text{ при } (i > j) \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} (B_m)_{ij} = b_{j-i} \text{ при } (i \leq j) \\ 0 \text{ при } (i > j) \end{array} \right\}, \quad (5)$$

где  $a_n$  и  $b_n$  – коэффициенты рядов (4).

При  $(m - 1 \geq j \geq i)$  элемент строки  $i$  столбца  $j$  матрицы  $(C_m)$ , полученной в результате операции умножения матриц  $(A_m)$  и  $(B_m)$  в любой последовательности, является коэффициентом порядка  $(j - i)$  ряда:

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n. \quad (6)$$

Выражение (6) получено в результате умножения рядов  $A$  и  $B$  выражения (5).

Доказательство утверждения, эквивалентного Утверждению 2, содержится в [5].

Обозначим элементы последнего столбца (1) через  $q_i = P_{i,m-1}$ . Учитывая утверждение 1, для элементов последнего столбца той же матрицы в степени  $N$  получим:

$$(P^N)_{i,m-1} = q_i + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{m-2} q_j \cdot (P^{k-1})_{i,j}. \quad (7)$$

Рассмотрим элементы промежуточных матриц  $(P^{k-1})_{i,j}$ .

Учитывая утверждение 2 и структуру матрицы (1), можно вычислить любой элемент этой матрицы в заданной степени  $k$ , за исключением элементов последнего столбца, как соответствующий коэффициент условного степенного ряда:

$$SP = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot x^n, \quad (8)$$

возведенного в степень  $k$ , первые  $(m - 1)$  коэффициентов которого являются элементами матрицы (1):

$$(P^k)_{ij} = \begin{cases} (SP^k)_{j-i} \text{ при } (i \leq j) \\ 0 \text{ при } (i > j) \end{cases}. \quad (9)$$

Для коэффициентов степенного ряда в заданной степени существует известная формула [6], из которой следует:

$$(SP^k)_0 = p_0^k; \quad (10)$$

$$(SP^k)_n = \frac{1}{p_0 \cdot n} \cdot \sum_{l=1}^n (k \cdot l - n + l) \cdot p_l \cdot (SP^k)_{n-l}, \quad n > 0; \quad (11)$$

$$(SP^k)_{j-i} = \frac{1}{p_0 \cdot (j-i)} \cdot \sum_{l=1}^n (k \cdot l - j + i + l) \cdot p_l \cdot (SP^k)_{j-i-l}. \quad (12)$$

Возвращаясь к ранее принятым обозначениям, запишем окончательно:

$$\begin{aligned} (P^N)_{i,m-1} = 1 - \sum_{j=0}^{m-2-i} p_j + \sum_{k=1}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{m-2} \left( 1 - \sum_{s=0}^{m-2-j} p_s \right) \cdot \frac{1}{p_0 \cdot (j-i)} \times \right. \\ \left. \times \sum_{l=1}^n (k \cdot l - j + i + l) \cdot p_l \cdot (SP^k)_{j-i-l} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

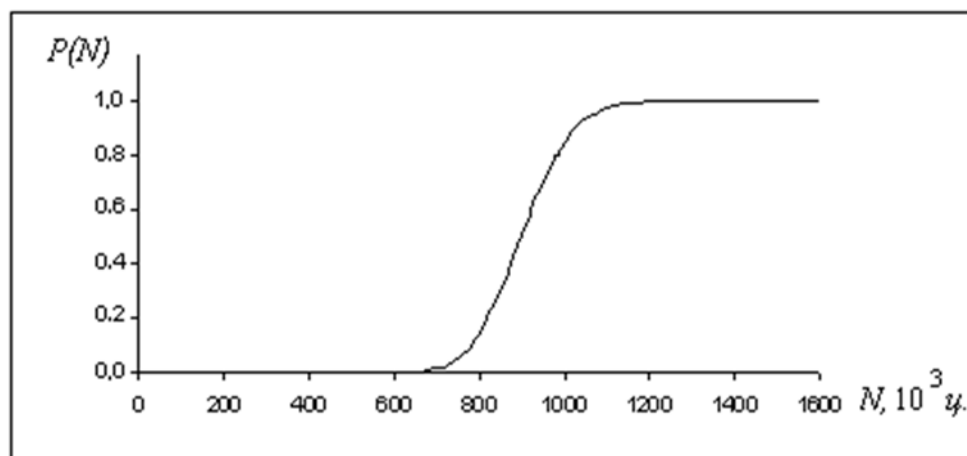
**Пример 1.** Определить вероятность разрушения детали в зависимости от количества  $N$  циклов, прошедших после зарождения усталостной трещины. Общее количество дискретных состояний, в которых может находиться фронт трещины  $m=100$ . Шаг марковского процесса равен 1000 циклов. Вероятности нахождения фронта трещины на следующем шаге равны: в том же состоянии  $p_0=0,9$ ; в следующем состоянии  $p_1=0,09$ ; через одно состояние  $p_2=0,009$ ; через два состояния  $p_3=9 \cdot 10^{-4}$ ; через три состояния  $p_4=9 \cdot 10^{-5}$ ; через четыре состояния  $p_5=9 \cdot 10^{-6}$ ; через пять состояний  $p_6=9 \cdot 10^{-7}$ ; через шесть состояний  $p_7=9 \cdot 10^{-8}$ ; через семь состояний  $p_8=9 \cdot 10^{-9}$ ; через восемь состояний  $p_9=1 \cdot 10^{-9}$ .

Искомая зависимость задается формулой (7) либо с непосредственным вычислением по правилам перемножения степенных рядов, либо с использованием рекурсивных подпрограмм по формулам (10 – 13). Для наглядности рассмотрим первый вариант.

Так как по условию зарождение трещины имело место на начальном шаге марковского процесса (при  $N=0$  фронт находился в состоянии  $s_0$ ), то искомая вероятность равна элементу верхней (0) строки последнего (99) столбца матрицы вероятностей переходов (1), возведенной в степень  $N$ . Соответственно, при использовании формулы сокращенного умножения (10) принимаем  $(i=0), (m=100)$ . Выпишем первые 100 коэффициентов степенного ряда  $SP$  (11), в котором первые 10 коэффициентов равны заданным вероятностям  $(p_0, \dots, p_9)$ , остальные – нулю. Из условия нормировки получим  $(q_i=0)$ , остальные элементы вектора  $q$  задаются последним столбцом матрицы (1) по найденным коэффициентам ряда  $SP$ . Дальнейшие действия рассмотрим для фиксированного количества шагов  $N = \text{const}$ .

Пользуясь формулами (6) для умножения степенного ряда последовательно вычислим первые 100 коэффициентов ряда (8) во всех степенях от 2 до  $N$  с занесением промежуточных результатов в столбцы двумерного массива размерности  $[N][100]$ . Искомую вероятность иницируем нулевым значением. Запускаем цикл по всем заполненным столбцам массива от 1 до  $N-1$ , на каждом шаге которого столбец массива используем в качестве векторов коэффициентов ряда, по которому строим матрицу вида (5), по верхней строке которой запускаем еще один цикл. При варьировании индекса цикла от 0 до 98 к текущему значению вероятности прибавляется произведение элемента ранее найденного вектора  $q$  с этим индексом и элемента верхней строки полученной матрицы. По завершении внешнего цикла получим искомое значение вероятности.

Результаты расчета по приведенному алгоритму при различном количестве циклов, полученные с помощью интегрированной среды разработки приложений Embarcadero Delphi, в графическом виде представлены на рисунке 1.



*Рисунок 1 – Вероятность разрушения детали в зависимости от количества циклов с момента образования усталостной трещины*

Затратность алгоритма при непосредственном возведении матрицы (1) в степень с помощью перемножения промежуточных матриц как матриц общего вида составляет  $O(m^3 \cdot N)$  операций умножения и может быть снижена до  $O(m^{2,5} \cdot N)$  путем использования специальных алгоритмов. Затратность же рассмотренного алгоритма на основе формулы (10), использующего свойства матрицы (1), составляет  $O(m \cdot N)$ .

**Выводы.** В настоящей работе было дано развитие прогнозной модели, предложенной в [3], в частности, приведено обобщение полученного решения для матрицы вероятностей переходов с двумя ненулевыми диагоналями на случай верхнетреугольной матрицы общего вида. В результате получены расчетные формулы, позволяющие вычислить вероятность разрушения механической системы, содержащей деталь с усталостной трещиной, которая может скачкообразно перемещаться на одно или несколько выделенных положений.

Движение фронта трещины было рассмотрено как марковский процесс дискретного времени с одним поглощающим экраном и всеми существенными состояниями.

Предложен алгоритм сокращенного возведения в степень матрицы вероятностей переходов такого процесса, обеспечивающий сокращение затратности по операциям умножения в  $m^2 - m^{1,5}$  раз (где  $m$  – количество возможных состояний марковской цепи) по сравнению с реализацией тех же математических операций для матриц общего вида.

Ключевыми параметрами процесса являются вероятности перехода фронта трещины на фиксированное количество позиций, которые должны быть определены заранее.

Исходным материалом для их нахождения представляются результаты усталостных испытаний с учетом масштабного фактора, что представляется темой самостоятельного исследования. Величина эффекта позволяет использовать полученный алгоритм в системах прогнозирования отказа, работающих в реальном времени.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванова, В.С. Природа усталости металлов / В.С. Иванова, В.Ф. Терентьев. – М.: Металлургия, 1975. – 456 с.
2. Троценко, В.Т. Сопротивление усталости металлов и сплавов. Справочник. Часть 1 / В.Т. Троценко, Л.А. Сосновский. – К.: Наукова Думка, 1987 – 346 с.
3. Неменко, А.В. Оценка вероятности разрушения вала с обнаруженной усталостной трещиной / А.В. Неменко, М.М. Никитин // Инновационная наука. – Уфа.: Аэтерна. – 2015. – № 5–2. – С. 99 – 106.

4. Соколов, Г.А. Управляемые цепи Маркова в экономике / Г.А. Соколов, Н.А. Чистякова. – М.: Физматлит, 2005. – 248 с.
5. Никитин, М.М. Применение матриц к решению нелинейной задачи Коши при помощи степенных рядов / М.М. Никитин // Моделирование и исследование сложных систем. – М.: Изд – во МГАПИ. – 2000. – С. 59 – 62.
6. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Том 3. Специальные функции. Дополнительные главы. / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.А. Маричев. – М.: Физматлит, 2002. – 688 с.
7. Неменко, А.В. Прогнозная оценка технического состояния механических систем / А.В. Неменко // Моделирование и исследование сложных систем. – М.: Изд – во МГАПИ. – 1999. – С. 148 – 154.
8. Неменко, А.В. Оценка технического состояния механических элементов судовых механизмов / А.В. Неменко // Вестник СевНТУ №110. Механика, энергетика, экология. – Севастополь: Изд – во СевНТУ. – 2010. – С. 291 – 293.
9. Nicholas, T. High cycle fatigue. A mechanics of materials perspective / T. Nicholas – Elsevier, 2006. – 656 p.

**Неменко Александра Васильевна**

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»  
Кандидат технических наук, доцент кафедры  
«Техническая механика и машиноведение»  
ул. Университетская 33, г. Севастополь, 299053  
Тел. + 7(978)8330519  
E-mail: valesan@listl.ru

**Никитин Михаил Михайлович**

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»  
Инженер кафедры «Техническая механика и машиноведение»  
ул. Университетская 33, г. Севастополь, 299053  
Тел. + 7(978)0621579  
E-mail: m.nikitin.1979@gmail.com

A.V. NEMENKO, M.M. NIKITIN

## ASSESSING THE FAILURE PROBABILITY DETAILS WITH FATIGUE CRACKS

*We propose fast matrix multiplication formulae allowing to calculate destruction probability for mechanical system containing element with fatigue crack which can jump into one or several selected positions from its current state.*

**Keywords:** fatigue, discrete model, Markov chain, fast matrix multiplication.

### BIBLIOGRAPHY

1. Ivanova, V.S. Priroda ustalosti metallov / V.S. Ivanova, V.F. Terentyev. – М.: Metallurgiya, 1975. – 456 s.
2. Troshchenko, V.T. Soprotivleniye ustalosti metallov i splovov. Spravochnik. Chast 1 / V.T. Troshchenko, L.A. Sosnovskiy. – К.: Naukova Dumka, 1987 – 346 s.
3. Nemenko, A.V. Otsenka veroyatnosti razrusheniya vala s obnaruzhennoy ustalostnoy treshchinoy / A.V. Nemenko, M.M. Nikitin // Innovatsionnaya nauka. – Ufa.: Aeterna. – 2015. – № 5–2. – С. 99 – 106.
4. Sokolov, G.A. Upravlyayemye tsepi Markova v ekonomike / G.A. Sokolov, N.A. Chistyakova. – М.: Fizmatlit, 2005. – 248 s.
5. Nikitin, M.M. Primeneniye matrits k resheniyu nelineynoy zadachi Koshi pri pomoshchi stepennykh ryadov / M.M. Nikitin // Modelirovaniye i issledovaniye slozhnykh sistem. – М.: Izd – vo MGAPI. – 2000. – С. 59 – 62.
6. Prudnikov, A.P. Integraly i ryady. Tom 3. Spetsialnyye funktsii. Dopolnitelnyye glavy. / A. P. Prudnikov, YU.A. Brychkov, O.A. Marichev. – М.: Fizmatlit, 2002. – 688 s.
7. Nemenko, A.V. Prognoznaya otsenka tekhnicheskogo sostoyaniya mekhanicheskikh sistem / A.V. Nemenko // Modelirovaniye i issledovaniye slozhnykh sistem. – М.: Izd – vo MGAPI. – 1999. – С. 148 – 154.
8. Nemenko, A.V. Otsenka tekhnicheskogo sostoyaniya mekhanicheskikh elementov sudovykh mekhanizmov / A.V. Nemenko // Vestnik SevNTU №110. Mekhanika, energetika, ekologiya. – Sevastopol: Izd – vo SevNTU. – 2010. – С. 291 – 293.
9. Nicholas, T. High cycle fatigue. A mechanics of materials perspective / T. Nicholas – Elsevier, 2006. – 656 p.

**Nemenko Aleksandra Vasilyevna**

FGAOU IN «Sevastopol National Technical University»  
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of  
the Department «Technical Mechanics and Engineering»  
Str. University 33, Sevastopol, 299053  
Tel. + 7 (978) 8330519  
E-mail: valesan@listl.ru

**Nikitin Mikhail Mikhaylovich**

FGAOU IN «Sevastopol National Technical University»  
Engineer of the Department «Technical Mechanics and Engineering»  
Str. University 33, Sevastopol, 299053  
Tel. + 7 (978) 0621579  
E-mail: m.nikitin.1979@gmail.com



В.М. БЫРДИН

## «ОДНО УРАВНЕНИЕ – ДВА НЕИЗВЕСТНЫХ»: НЕДООПРЕДЕЛЕННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ–РАЗДВОЕНИЯ

*Изучены недоопределённые функциональные линейные уравнения с двумя неизвестными  $f_1 + af_2 = b$ . В общем случае их решения представляются бесконечным множеством спаренных произвольных функций. На базе метода факторизации–раздвоения для одного широкого класса таких уравнений выделено единственное решение в виде функций  $f_k$ , голоморфных в смежных полуплоскостях. Дан оригинальный, краткий экскурс метода факторизации Винера–Хопфа–Фока. Результаты методически интересны для спецкурсов, актуальны в теории волн и в краевых задачах с неоднородными граничными условиями.*

**Ключевые слова:** недоопределённые функциональные линейные уравнения; метод факторизации–раздвоения; факторизация в сумму и в произведение; функция, полином и константа раздвоения; разно–регулярные функции; метод факторизации Винера–Хопфа–Фока; краевые задачи; волновые процессы.

**Введение и постановка задачи.** Вообще, в математике известен ряд методов факторизации в различных областях, в теории чисел, вероятностей и графов, в математической физике и в др. разделах. Автор исходил из развития метода факторизации (Винера–Хопфа–Фока) в физической теории волн и вышел на оригинальное обобщение – на недоопределённые функциональные линейные уравнения и единственное их решение для одного, широкого класса. Очевидно, результат интересен для прикладной математики и смежных отраслей. (Термин факторизация, от лат. factor – делающий, производящий, означает разложение на элементы, чаще, на множители, в нашем случае и по Винеру–Хопфу – на два множителя или слагаемых)

Рассмотрим постановку задачи, в некотором отличии от проблематики интегральных уравнений *Винера–Хопфа–Фока (ВХФ)* в математической физики [1–4]. Пусть дано линейное функциональное уравнение:

$$f_1(x) + a(x)f_2(x) = b(x). \quad (1)$$

И пусть функции  $b$  и  $a$  заданы, а  $f_j$ ,  $j = 1, 2$ , неизвестны. Тогда данное уравнение мы классифицируем как *недоопределённое: одно уравнение – два неизвестных*; и в этом главная его черта. В математических руководствах такого рода задачи примыкают к системам линейных уравнений. Но известно, и не только из алгебры, что на 2 неизвестных, то ли это корни–числа, то ли функции, необходимо 2 уравнения.

**Замечание 1.** Заметим, что подобные алгебраические уравнения называют *неопределёнными*. Хотя известны и *переопределённые* уравнения [4], асимметричные, так сказать, нашему (1). И, по–видимому (что легко доступно в Рунете), уже появились публикации по недоопределённым дифференциальным уравнениям.

На данное время проблема недоопределённых уравнений является, конечно, чисто математической, ещё без приложений (кроме одного известного их вида в математической физике). Так что мы будем рассматривать простые умозрительные примеры, чисто математического плана.

Вначале покажем принципиальную неединственность решения уравнения (1).

**Бесконечное, открытое множество решений недоопределённых функциональных линейных уравнений.** Общее решение такого уравнения принципиально неоднозначно.

**Теорема 1.** Всякое недоопределённое уравнение (1) (без тривиального  $a(x) \equiv 0$ ) имеет следующие решения.

1) Бесконечное несчётное (*открытое*) множество в виде произвольных функций  $f_k(x)$ ,  $k = 1, 2$ , сколь угодно произвольных, спаренных (двух взаимосвязанных элементарно):

$$f_1(x) = b(x) - a(x)f_2(x). \quad (2)$$

Или, в более общем случае – спаренных двояко произвольных.

2) Единственное решение возможно только в случае некоторых дополнительных условий, выделяющих его из общего произвольного решения (2).

**Доказательство.** 1) Пусть определены две функции  $f_{1E}$  и  $f_{2E}$ , представляющие, возможно – см. пп. 3–5, единственное решение уравнения (1). Однако и функции  $f_k = f_{kE} + f_{kO}$  также удовлетворяют уравнению (1), если  $f_{kO}$  являются решениями *приведённого однородного* уравнения (соответствующего (1)):

$$f_{1O}(x) + a(x)f_{2O}(x) \equiv 0.$$

Таким образом:

$$f_1 = f_{1E} - af_{2O}, f_2 = f_{2E} + f_{2O} \quad (3)$$

(или через  $f_{1O} = -af_{2O}$ ), что не противоречит и (2).

Однако,  $f_{kO}$  – *спаренные*, сколь угодно произвольные функции. Так что получено общее решение в спаренных функциях, представляющих собой (через произвольную функцию  $f_{2O}$  или, идентично,  $f_{1O}$ ), множество решений  $f_K(x)$ . Т.е. бесконечное несчётное, *открытое множество* решений. Открытое – в связи со *сколь угодно произвольной* функцией  $f_{kO}(x)$ .

**Замечание 2.** Уместной геометрической интерпретацией общего решения, в смысле открытого, бесконечного множества произвольных функций, является трёхмерная поверхность  $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ , описываемая исходным уравнением (1):

$$x_1 + a(x_3)x_2 - b(x_3) = 0; \text{ здесь } x_K = f_K, \quad K = 1, 2.$$

Тогда «сколь угодная произвольность» искомых функций  $f_K$  наглядно трактуется их произвольными численными значениями: бесконечностью двух осей,  $|x_K| < \infty$ , и несчётными множествами точек  $x_K$ , пусть, возможно, и замкнутыми множествами – при ограниченной поверхности  $\Psi$ . Кроме того, в этой связи, к исходной проблеме недоопределённых уравнений может быть привлечён аппарат аналитической, дифференциальной и др. разделов геометрии; насколько результативно – покажет анализ. Так, по-видимому, единственным разно-регулярным решениям  $f_{\pm}$  будут соответствовать четырёхмерные поверхности *шестимерного пространства* комплексных  $(z_1, z_2, z_3)$ ,  $z_J = x_J + iy_J$ , являющиеся регулярными поверхностями в смежных  $z$ -полуплоскостях.

В некоторых задачах математической физики и в других случаях решение *неоднородного*, исходного уравнения получается с точностью (вернее, со *псевдо-точностью*) до функции  $F_N(x)$  некоторого класса (целая, полином). Тогда общее решение имеет вид:

$$f_1(x) = \Phi_1(F_N) - af_{2O}(x), \quad f_2(x) = \Phi_2(F_N) + f_{2O}(x). \quad (4)$$

где  $\Phi_K(F_N)$  – алгебраические функции с прямой пропорцией (и между ними, с учётом (2), имеется соотношение  $\Phi_1 = b - a\Phi_2$ ).

Т.е. общее решение вновь является открытым множеством решений, можно сказать, *двойко открытым* – представляется спаренными двойко произвольными функциями, через *вообще* (сколь угодно) произвольную  $f_{2O}$  и произвольную  $F_N$  из некоторого класса.

Итак, общее решение возможно в трёх, всё более узких классах: (2), (4) и (3).

2) Тривиальным дополнительным условием для единственного решения является 2-ое уравнение,  $f_1(x) + d(x)f_2(x) = h(x)$ . Или, *изысканным* условием – класс функций  $f_K$ , голоморфных в разных полуплоскостях. И т.п. Важно также подчеркнуть, что в большинстве прикладных задач формулируются дополнительные *условия* (*краевые*, например) или специальные, *фундаментальные принципы* (в частности, принцип сохранения энергии), достаточные для корректной постановки и единственного решения физической задачи в целом. Так что решение получается, как правило, корректным, имеющим практический смысл, и вполне *верифицируемым* (подтверждаемым экспериментально).

**Замечание 3.** Здесь просматриваются параллели с положениями теории других неоднородных уравнений, в частности, с линейными дифференциальными уравнениями. А также с краевыми задачами, где единственное корректное решение выделяется из общего математического.

**Простой пример единственного решения одного класса.** Рассмотрим одно простое недоопределённое уравнение на базе метода факторизации.

**Пример 1.** Берём «на вскидку»:

$$f_1(z) + a(z)f_2(z) = b(z), \quad a = (z - z_-)/(z - z_+), \quad b = 1/(z^2 - z_o^2); \quad (5 \text{ а-в})$$

$f_K$ ,  $K = 1, 2$ , искомые. Единственно, что здесь, как и в методе ВХФ, заложено – это два условия на бесконечности, и что потребуется ниже:  $a \rightarrow 1$ ,  $b \rightarrow 0$ .

**Решение.** Раздвинем с вещественной оси нули  $z_j$  ( $j=0, +, -$ ;  $z = x + iy$ ):  $y_+ > 0$ ,  $y_- < 0$ ,  $y_0 \neq 0$  (для конкретности, пусть  $y_0 > 0$ ; но всё будет идентично и для  $y_0 < 0$ ). Теперь все условия для решения выполнены.

1) *Факторизуем* (раздвоим) функцию  $a$  в *произведение*:

$$a_+ = C(z - z_-); \quad a_- = a/a_+ = 1/C(z - z_+);$$

здесь  $C = \text{const}$  – константа интегрирования (при взятии интеграла Коши), которая впоследствии сократится. Получили две функции, регулярные и не имеющие нулей в разных полуплоскостях  $z$ -плоскости:  $a_-$  в нижней полуплоскости;  $a_+$  – в верхней. Причём они совместно регулярны в бесконечной полосе  $\Pi_0$  вокруг  $x$ -оси:  $y \in (y_-; y_+)$ . Данная факторизация проведена подбором и, очевидно, однозначна только в смысле отсутствия нулей и *разнорегулярности* (в разных, но пересекающихся по общей полосе, полуплоскостях) функций  $a_{\pm}$ . Что также можно строго установить на базе формулы Коши.

**Замечание 4.** Поскольку в матанализе применяется ряд терминов, «дифференцируемая, аналитическая, голоморфная и регулярная», в одном и том же смысле, примем понятия *голоморфной* или *регулярной* функции (в отл. от аналитической многозначной), которых и будем придерживаться. И уточним, голоморфна – это однозначна и дифференцируема. Причём дифференцируема в смысле комплексного анализа, т.е. в некоторой окрестности точки и бесконечно дифференцируема (или с условиями аналитичности Даламбера–Эйлера). Многозначные же аналитические функции в данной работе не рассматриваются.

2) Факторизуем в сумму правую часть уравнения (5, а), разделённого на  $a_+$ :

$$b/a_+ = q = q_+ + q_-; \quad q_- = 1/2C_0z_0(z_0 - z_-)(z - z_0); \quad q_+ = q - q_-.$$

Получили две разно-регулярные функции аналогично функциям  $a_{\pm}$  (кроме их нулей). Данная факторизация проведена по формуле Коши и однозначна (хотя возможен и подбор функций  $q_{\pm}$ , очевидно, неоднозначный).

3) Разделим полученное соотношение  $f_1/a_+ - q_+ + f_2/a_- - q_- = 0$  на два уравнения

$$f_1/a_+ - q_+ = q_- - f_2/a_- = P(z), \quad (6)$$

введя некую неизвестную функцию  $P$ . Поскольку функции  $q_{\pm}$  и множители при  $f_K$  на  $\infty$ -ти исчезают как  $z^{-1}$ , то, как в комплексных переменных, так и в вещественных (переходя в конце к пределу  $u_j \rightarrow 0$ ), получим следующий результат.

4) Для весьма широкого класса голоморфных, но разно-регулярных, а, следовательно, ограниченных на бесконечности (каждая в своей полуплоскости  $|z| = \infty$ ), функций

$$f_1 \equiv f_+, \quad f_2 \equiv f_-, \quad f_K \sim z^{-M}, \quad M \geq 0,$$

имеем по теореме *Лиувилля* (о целых функциях) выполнение двух полученных уравнений (6) возможно только при  $P(z) \equiv 0$  и только тогда. Следовательно, получаем единственное решение уравнения (5) в данном, довольно широком классе разно-регулярных функций

$$f_1(x) = b(x) - (x - x_-)/2x_0(x_0 - x_-)(x - x_0), \quad f_2(x) = (x - x_+)/2x_0(x_0 - x_-)(x - x_0). \quad (7)$$

Подчеркнём, что здесь потребовалась голоморфность функций  $f_K$  в разных полуплоскостях ( $f_1$  в верхней,  $f_2$  в нижней), как это и по методу ВХФ. В общем же случае, произвольных функций, решение *много-, бесконечно, значно*, т.е. все положения теоремы 1 здесь также в силе.

Т.о., единственное решение (7) построено в основном на базе метода ВХФ. Дадим существенное расширение класса уравнений, решаемых факторизацией.

#### **Теорема об одном, широком классе недоопределённых уравнений.**

**Теорема 2.** (О широком классе недоопределённых уравнений). Пусть дано недоопределённое линейное уравнение (1), где  $f_K(z)$  искомые функции, а  $a(z)$  и  $b(z)$  заданы и голоморфны на  $x$ -оси ( $z=x+iy$ ), кроме, возможно, счётного множества полюсов, а для  $a(z)$  – и нулей. И пусть только частное  $b/a$  ограничено на бесконечности как  $x^{-M}$ ,  $M > 0$ .

Тогда всегда найдётся голоморфная, в  $z$ -полуплоскости, функция  $g = g_+$  или  $g_-(z)$ , такая, что приведённое уравнение  $gf_1 + gaf_2 = bg$  безусловно будет факторизоваться, т.е. удовлетворит требованиям метода факторизации-раздвоения, и получит единственное, однозначное решение в разно-регулярных функциях. Что и определит один класс, разно-регулярный класс единственных решений уравнения (1); кроме, конечно, общего открытого множества произвольных решений (3).

Т.о., в отличие от метода ВХФ, требующего на  $\infty$ -ти две асимптоты,  $a \rightarrow 1$  и  $b \rightarrow 0$ , у нас только одна  $b/a \rightarrow 0$ . В чём и состоит существенное расширение класса уравнений, решаемых факторизацией единственным образом. Кроме того, здесь не требуется жёсткая привязка нулей и полюсов функций  $a$  и  $b$  к  $x$ -оси. Мы не рассматриваем многозначные аналитические функции; по-видимому, такое обобщение возможно (см. также замечание 5, ниже).

**Лемма 1.** Недоопределённое уравнение  $gf_1 + gaf_2 = bg$ , оговоренное в теореме 2, решается методом факторизации-раздвоения и решается единственным образом в классе разно-регулярных функций.

Действительно. Возможные нули и полюса  $a(x)$  и полюса  $b(x)$  раздвигаем с оси  $x$  малыми мнимыми добавками, которые в конечном результате устремим к нулю. Подбираем  $g(z)$  так, чтобы она была голоморфна в одной из  $y$ -полуплоскостей, охватывая и ось  $x$ , а на бесконечности в этой полуплоскости составила асимптоту для  $d = ga \equiv 1$ . Тогда, проводим факторизацию в произведение (см. п. 5.2)  $d = d_+ d_-$ .

А далее, поскольку  $d_{\pm}(x)$  голоморфна, а, следовательно, и ограничена на бесконечности  $1$ -ей каждая в своей полуплоскости, то голоморфная функция  $e(x) = gb/d_{\pm} \sim x^{-M}$ ,  $x \rightarrow \infty$ , (также как и  $gb \sim b/a \sim x^{-M}$ ,  $M > 0$  по условиям теоремы). Следовательно,  $e$  факторизуется в сумму  $e = e_+ + e_-$ . По теореме Лиувилля в нашем случае разно-регулярных  $f_1 \equiv f_+$  и  $f_2 \equiv f_-$  целая функция раздвоения  $P(z)$  для *сдвоенного* уравнения типа (6) тождественна нулю

$$gf_+/d_+ - e_+ = e_- - d_-f_- = P \equiv 0.$$

Данное раздвоение уравнений дано для выбора  $g = g_+$ ; в противном случае,  $g = g_-$ , – противоположные знаки + и –; третьего не дано. Так что нашим *методом факторизации–раздвоения* получено единственное решение в разно–регулярном классе функций.

**Пример 2.** Продемонстрируем наш, изложенный метод. Берём произвольно:

$$f_1(x) + a(x) f_2(x) = b(x), \quad a = (x - x_0) \exp ix, \quad b = \sin x. \quad (8)$$

Здесь только  $b/a$  ограничено нулём на бесконечности, как требуется в теореме. Положим  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $y_0 > 0$ . Тогда множитель  $g_- = 1/(z - z_0)$  факторизует (8); в частности,  $d_- = \exp -ic_0 z$ ,  $c_0 = \text{const}$  и впоследствии сокращается. Т.о. однозначно в нашем классе разно–регулярных функций:

$$f_1 \equiv f_- = \sin z + (\exp iz_0 - \exp iz)/2, \quad f_2 \equiv f_+ = (1 - \exp i(z_0 - z))/2(z - z_0),$$

где  $y_0$  теперь можем положить нулю.

**Замечание 5.** В более общем случае, комплексных переменных (общем относительно (1)), схема метода та же. Создание полосы регулярности  $\Pi_0$  также производится смещением нулей и полюсов функций  $a(z)$  и  $b(z)$  с вещественной оси, или мнимыми добавками, или заменой переменной  $y = y + y_0$ .

**Замечание 6.** В случае многозначных аналитических функций зачастую достаточно замены переменной степенной функцией, как «всё регуляризуется». Однако, например, в случае краевых задач матем. физики с физическими полупространствами возникают *двузначные* функции типа радикала  $q(k) = \sqrt{(k^2 - k_o^2)}$ , для которого удачной замены так и не найдено. А интегралы по берегам разрывов трудно взять. В частности, поэтому отложена задача о пластине, погруженной в жидкое *полупространство*, решаемая на базе метода ВХФ.

**Гипотеза 1.** Есть также идея применить этот метод к решению дифференциальных уравнений, двумя неизвестными членами которого выступают функция и её производная, любого порядка. Разнорегулярными их можно сделать только для решения дифференциального уравнения, а затем перейти на вещественную ось. Однако насколько такой метод будет «соперничать» с простым интегрированием, дающим здесь каноническое  $\ln y/C = \int f dx$  и т.п. Впрочем, взятие интеграла зачастую тоже проблема.

**Краткий экскурс: 4-е основных идеи метода факторизации Винера–Хопфа–Фока (ВХФ).** Среди теоретиков метод ВХФ, пожалуй, имеет неформальный статус «замысловатого», его головоломкой овладевают немногие, тем более после экспансии численных технологий.

Т.к. уже имеется почти вековой опыт успешного (и не только успешного; [5–11]) применения метода ВХФ и не загромождая изложение *известными*, «тонкими», зачастую громоздкими вопросами строгости, выделим узловые моменты. А их 4-е, основных идеи и в методе ВХФ, как и в нашем обобщении. Т.о., дадим общее представление, обзор метода, что называется, с высоты «птичьего полёта».

Пусть аналитические функции  $f_j$  переменной  $k = \sigma + i\tau$  регулярны, но в *различных* областях: 1-ая  $f_1 \equiv f_+$  в верхней полуплоскости, т.е. при  $\tau \geq \tau_1$ ; а  $f_2 \equiv f_-$  – в нижней  $\tau \leq \tau_2$ . Причём  $\tau_1 < 0 < \tau_2$  и вокруг оси  $\sigma$  имеется полоса  $\Pi_0$  совместной регулярности  $f_1$  и  $f_2$ .

**Замечание 7.** Такая, так сказать, *разно–регулярность функций* возникает во множестве краевых задач в ходе применения интегральных преобразований, в частности, Фурье, на полубесконечных участках,  $\pm z \geq 0$ , искомым потенциалов  $\varphi_j(z)$  ( $xyz$  – декартова или др. система). Например:

$$f_+(k) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty \varphi_1(z) \exp(ikz) dz$$

и т.п. Последнее можно доказать развёрнуто, как, например, в [3], или проверить качественно. Ведь в силу известной *интегральной теоремы Коши*, исходя из

$$\varphi_1(z) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^\infty f_+(k) \exp(-ikz) d\sigma \quad (9)$$

и, поскольку при  $z < 0$  полагается  $\varphi_1(z) \equiv 0$ , то, как обычно, замыкая путь интегрирования бесконечным полукругом,  $R \rightarrow \infty$ , кверху,  $\tau \geq 0$ , придём к требованию голоморфности и занулению  $f_+(k)$  в верхней полуплоскости. Отметим также, что по лемме Жордана предполагается, что  $f_+(k)$  стремится к нулю и в нижней полуплоскости.

Далее, пусть коэффициент  $a(k)$  в уравнении:

$$f_+(k) + a(k) f_-(k) = b(k) \quad (10)$$

разбивается на два сомножителя  $a = a_+ \times a_-$ , голоморфных в перекрывающихся полуплоскостях (подобно  $f_j$ ) и не имеющих там нулей. Преобразуем:  $\ln a_+ + \ln a_- = \ln a$ ; или [1]  $a_+'/a_+ + a_-'/a_- = a'/a$ . Сравним это соотношение с уравнением, следующим из (10):  $f_+/a_+ + f_-/a_- = b/a_+$ . Они идентичны: во–первых, *недоопределены*, на одно уравнение два неизвестных, а, во–вторых, обладают указанной выше разно–регулярностью, т.е.  $b_{c+} + b_{c-} =$

$b_C$  (где  $b_C$  – общее обозначение суммарной функции). Т.о., факторизация в произведение сводится к факторизации в сумму. В конечном счёте от  $a(k)$  в полосе  $\Pi_0$  потребуется: 1) голоморфность; 2) отсутствие нулей и 3) предел  $a \rightarrow l$  при  $\sigma \rightarrow \pm\infty$  (в более общем случае  $a_\infty = \text{const}$  – всё следует элементарно разделить на  $a_\infty$ ).

Центральная идея, собственно факторизация функций в сумму разнорегулярных функций. Это представление заданных правых частей уравнений суммой всё с той же разнорегулярностью. В книге [1], в объёмистом параграфе 1.3 этому посвящена теорема В со значительным вводным материалом по комплексному анализу. А, например, в учебнике [3] – лемма 1 и большая часть раздела с красноречивым заголовком «Общая схема метода Винера–Хопфа» (с. 293–298). Мы также ограничимся основными аспектами.

Исходим из интегральной формулы Коши:

$$b_C(k) = (2\pi i)^{-1} \int_L b_C(y) dy / (y-k).$$

где  $L$  – замкнутый контур, в данном случае, прямоугольник, содержащий ось  $\sigma$ , вплоть до  $\pm\infty$ -ти, а по  $\tau$  довольно тонкий, т.е. лежащий в полосе  $\Pi_0$ .

Пусть в этой полосе функция  $b_C$  голоморфна, а также стремится к нулю при  $\sigma \rightarrow \pm\infty$ . Тогда, выделяя по 4-ём сторонам прямоугольника  $L$  4-е интеграла (два из которых равны нулю, т.к.  $b_C \rightarrow 0$ ), получаем:

$$b_C(k) = (2\pi i)^{-1} \left( \int_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} b_C(y) dy / (y-k) - \int_{-\infty+i\tau_2}^{\infty+i\tau_2} b_C(y) dy / (y-k) \right) \quad (11)$$

и, соответственно, две разнорегулярных функции,  $b_C = b_{C+} + b_{C-}$ , голоморфных каждая в своей полуплоскости. Последнее следует или из голоморфной зависимости интеграла от параметра  $k$ , сначала как точки, лежащей внутри  $L$ , или из упомянутой выше теоремы Коши (отличающейся от формулы Коши множителем  $(y-k)^{-1}$ ; отметим, что по этой же теореме деформируется и контур  $L$  при расширении до бесконечной полосы  $\Pi_0$ ).

**Замечание 8.** Факторизуемая в сумму функция может быть константой на бесконечности вещественной оси. А не нулём, как по методу ВХФ. Ведь ширину полосы  $\Pi_0$  (совместной голоморфности факторизуемой и разнорегулярных функций) можно брать сколь угодно малой и устремить к нулю, оставив лишь вещественную ось за линией совместной регулярности. Чего достаточно для взятия интегралов (9) и (11) и определения целой функции  $P$  (см. ниже). Однако и после этого остаются вопросы о сходимости интегралов, о применении леммы Жордана и т.п.

**Раздвоение уравнения и функция или константа раздвоения.** После факторизации, уравнение (10) преобразуем в *сдвоенное* уравнение и вводим новую неизвестную функцию  $P(k)$ :

$$f_+/a_+ - g_+ = g_- - f_- a_- = P, \text{ где } g = b/a_+. \quad (12)$$

(При факторизации в произведение такой проблемы нет). Для окончательного решения задачи необходимо установить  $P(k)$ . Назовём её *функцией раздвоения*, как в методе разделения переменных, отчасти подобном нашей проблеме и в котором исходная дифференциальное уравнение разделяется на 2, 3 или 4 уравнения и вводится константа разделения. В нашем же случае именно раздвоение.

Применим *теорему Лиувилля о целых функциях*, голоморфных всюду, кроме, как правило, бесконечности (заметим, что это «наиболее» голоморфные функции). Действительно, ведь  $P$  голоморфна и в верхней полуплоскости вместе с 1-ой частью сдвоенного соотношения (12), и в нижней, вместе со 2-ой частью, и в их общей полосе  $\Pi_0$ , и, следовательно, является целой функцией. Далее, в зависимости от поведения асимптот функций  $f_\pm$ ,  $a_\pm$  и  $g_\pm$  на  $\infty$ -ти,  $P$  может быть или трансцендентной функцией, или многочленом, или, в частности, константой и нулём. В задачах матем. физики – это, как правило, *полином* степени  $m$  [1, 3]. В волновых задачах, по-видимому,  $P_m = P_0(k) \equiv 0$  [5–11]. А вообще, для определения параметров  $P_m$  ищутся дополнительные условия.

Общим же для вышеизложенного будет следующее. Все 4-е функции  $a_\pm$  и  $g_\pm$  голоморфны в своих полуплоскостях, а, следовательно, ограничены там константой, если не нулём  $g_\pm$  и 1-ей  $a_\pm$ . Искомые  $f_j$  – на бесконечности также либо ноль, либо константа. Отсюда:  $P_m(k) \equiv \text{const}$  или 0.

**Заключение. О новых результатах и некоторые новые трактовки и понятия.** В данном представлении метода, конечно, был опущен целый ряд интересных и важных нюансов, несколько общеизвестных теорем (о единственности, лемма Жордана и др.), многие доказательства, многозначные функции, сходимость интегралов, асимптотические оценки на бесконечности и т.д. В частности, выбор констант  $\tau_K$  из условий экспоненциального затухания поля; особенности в полюсах и в точках ветвления и др. Всё это можно найти в литературе. И мы надеемся, что данное своеобразное, краткое

представление будет небезынтесно читателю и подвигнет к новым приложениям метода. Тем более что классическая литература по этому вопросу [1, 2, 8], насколько нам известно, не переиздавалась и малоизвестна, а новых работ нет. Так, аналогичный нашему, но довольно объёмистый раздел (на 30–ти с.), с одним красноречивым подзаголовком «Общая схема метода Винера–Хопфа», выделен в учебнике МГУ по комплексному анализу [3]. Укажем также две весьма лаконичные, но информативные статьи В. И. Дмитриева в Матем. энциклопедии [4]. И здесь мы не даём, конечно, обзора многочисленных публикаций по применению метода ВХФ; хотя у автора имеется немалая подборка, прежде всего советских работ, начиная с 1970–ых, и что недоступно в Интернете.

**О терминологии.** Отметим, что в русскоязычной литературе, метод обычно именуется методом факторизации или Винера–Хопфа; реже Винера–Хопфа–Фока. А в зарубежной – по–видимому, метод Винера–Хопфа. Ясно, что основные положения метода приоритетно получили *N. Wiener* и *E. Hopf* в 1930–ые гг. [4]. Однако впоследствии его существенное развитие дал В.А. Фок, 1942–44гг., в большой статье «О некоторых уравнениях матем. физики» (Матем. сб., 1944, № 1, с. 3–50) [2]. См. следующее замечание.

В.А. Фок – это наш, советский физик–теоретик, академик. *Н. Винер* и *Е. Хопф* – западные учёные. Причём, первый – очевидно, «тот самый» *Норберт Винер* – один из основателей кибернетики, учёный–энциклопедист, написавший, в частности, и философскую книгу «Я – математик».

Вопрос о *недоопределённости уравнений* ставится нами впервые. Во всяком случае, ранее в литературе, в известных нам многочисленных статьях (с прикладной математикой) этот аспект нигде не обсуждался (см. также замечание 1). По–видимому, такое положение сложилось *исподволь* вследствие обособления проблемы в уравнении с уже заданной голоморфностью,  $f_+(k) + a(k)f_-(k) = f_c(k)$ , или в интегральное уравнение [2, 3, 12]. В отл. от нашей, более простой и общей формулировки (1). Эта, предложенная нами [7], характеристика уравнений вполне соответствует как данной, так и математической проблематике и терминологии [4, тт. 3–4]. И ещё предстоит изучить возможности взаимного обогащения двух этих областей, разделов *недо– и переопределённых уравнений* и метода факторизации.

Проведение аналогии с методом разделения переменных также уместно и полезно методически. Как и предложенные нами понятия и термины: функция, полином и константа раздвоения; факторизация в сумму и в произведение и разно–регулярные функции. Полагаем, эти новшества способствуют развитию метода.

**Новыми результатами**, результатами содержательными для прикладной математики, автор считает следующее.

1) В отличие от метода ВХФ, требующего в уравнении (10) (или в (1)) две асимптоты на  $\infty$ –ти,  $a \rightarrow 1$  и  $b \rightarrow 0$ , по нашей теореме 2 – только одна  $b/a \rightarrow 0$ . Что даёт существенное расширение класса недоопределённых функциональных линейных уравнений, решаемых методом факторизации–раздвоения единственным образом в классе разно–регулярных функций. Причём, вообще говоря (без дополнительных условий к задаче), данное единственное разно–регулярное решение не исключает и общего решения с произвольными функциями.

2) Изучено общее решение недоопределённых функциональных линейных уравнений с двумя неизвестными, представляющее собой открытое множество произвольных, сколь угодно произвольных, спаренных (двух взаимосвязанных) функций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нобл, Б. Метод Винера–Хопфа / Б. Нобл. – М.: ИИЛ, 1962. – 280 с.
2. Фок, В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн / В.А. Фок. – М.: Сов. радио, 1970. – 518 с.
3. Свешников, А.Г. Теория функций комплексной переменной: Уч. для вузов. 6 изд. Стер / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – М.: ФМЛ, 2004. – 336 с.
4. Математическая энцикл. Т.Т. 1–5./ Гл. ред. И.М. Виноградов. – М.: СЭ, 1977–85.
5. Бабешко, В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости / В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
6. Банков, С.Е. Электромагнитные кристаллы / С.Е. Банков. – М.: ФМЛ, 2010. – 350 с.
7. Бырдин, В.М. К теории дифракции нормальных волн в слоистых структурах (метод факторизации, квазирезонансы и модель ультразвукового уровнемера) / В.М. Бырдин, В.И. Луценко // Физическая акустика. Тр. сессии Рос. акуст. об–ва. – М.: ГЕОС. – 2008. – Т. 1.
8. Вайнштейн, Л.А. Теория дифракции и метод факторизации / Л.А. Вайнштейн. – М.: Сов. радио, 1966. – 432 с.

9. Исраилов, М.Ш. Динамическая теория упругости и дифракция волн / М.Ш. Исраилов. – М.: Изд. МГУ, 1992. – 208 с.
10. Rokhlin, S. Diffraction of Lambs waves by a finite crack in an elastic layer / S. Rokhlin. – JASA. – 1980. – V. 67. – № 4.
11. Ткачёва, Л.А. Дифракция волн на кромке плавающей пластины / Л.А. Ткачёва. // Изв. РАН, МЖГ. – 2005. – № 2.
12. Титчмарш, Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титчмарш – М.: ГТИ, 1948. – 479 с.

**Бырдin Василий Михайлович**

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г. Москва  
кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник отдела «Виброакустики машин», лаб. «Волновой механики машин»  
101990, Москва, М. Харитоньевский пер., 4.  
Тел.: +74991350430.  
E-mail: V\_M\_Byrdin@mail.ru

V.M. BYRDIN

**«ONE EQUATION – TWO UNKNOWN»:  
UNDERDETERMINED FUNCTIONAL EQUATIONS  
AND THE FACTORIZATION-FURCATION METHOD**

*We studied underdetermined linear functional equation with two unknowns  $f_1 + af_2 = b$ . In general, they appear to an infinite number of solutions paired arbitrary functions. On the basis of the factorization-furcation method for a wide class of equations is allocated a unique solution in the form of  $f_k$  functions holomorphic in the adjacent half-planes. Offered a original brief digression on the method of factorization of Wiener-Hopf-Fock. Results methodically interesting for special courses, relevant to the theory of waves and boundary value problems with inhomogeneous boundary conditions.*

**Keywords:** underdetermined linear functional equation; factorization-furcation method; factorization of the sum and the product; function, polynomial and constant furcation; various-regular functions; factorization method Wiener-Hopf-Fock; boundary value problems; wave processes.

**BIBLIOGRAPHY**

1. Nobl, B. Metod Vinera-Khopfa / B. Nobl. – М.: IIL. 1962. – 280 s.
2. Fok, V.A. Problemy difraktsii i rasprostraneniya elektromagnitnykh voln / V.A. Fok. – М.: Sov. radio, 1970. – 518 s.
3. Sveshnikov, A.G. Teoriya funktsiy kompleksnoy peremennoy: Uch. dlya vuzov. 6 izd. Ster / A.G. Sveshnikov, A.N. Tikhonov. – М.: FML. 2004. – 336 s.
4. Matematicheskaya entsikl. T.1. 1–5. / Gl. red. I.M. Vinogradov. – М.: SE. 1977–85.
5. Babeshko, V.A. Obobshchennyy metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii uprugosti / V.A. Babeshko. – М.: Nauka. 1984. – 256 s.
6. Bankov, S.Ye. Elektromagnitnye kristally / S.Ye. Bankov. – М.: FML. 2010. – 350 s.
7. Byrdin, V.M. K teorii difraktsii normalnykh voln v sloistvkh strukturakh (metod faktorizatsii kvazirezonansov i model ultrazvukovogo urovnemera) / V.M. Byrdin, V.I. Lutsenko // Fizicheskaya akustika. Tr. sessii Ros. akust. ob-va. – М.: GEOS. – 2008. – T. 1.
8. Vavnshteyn, L.A. Teoriya difraktsii i metod faktorizatsii / L.A. Vavnshteyn. – М.: Sov. radio. 1966. – 432 s.
9. Israilov, M.SH. Dinamicheskaya teoriya uprugosti i difraktsiya voln / M.SH. Israilov. – М.: Izd. MGU, 1992. – 208 s.
10. Rokhlin, S. Diffraction of Lambs waves by a finite crack in an elastic layer / S. Rokhlin. – JASA. – 1980. – V. 67. – № 4.
11. Tkachova, L.A. Difraktsiya voln na kromke plavayushchey plastiny / L.A. Tkachova. // Izv. RAN, MZHG. – 2005. – № 2.
12. Titchmarsh, Ye. Vvedeniye v teoriyu integralov Furiye / Ye. Titchmarsh – М.: GTI, 1948. – 479 s.

**Byrdin Vasily Mikhaylovich**

Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS  
Ph.D., Senior Research Associate, Dep. «Vibroacoustics machines», lab. «Wave Mechanics machines»  
Moscow, Maly Kharitonevsky Lane, 4  
Tel. +74991350430  
E-mail: V\_M\_Byrdin@mail.ru

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ** **ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

УДК 621.774. 38

С.Р. РАХМАНОВ

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МЕХАНИЗМА УДЕРЖАНИЯ ОПРАВКИ СТАНА ХОЛОДНОЙ ПИЛЬГЕРНОЙ ПРОКАТКИ ТРУБ**

*Приведено решение задачи о нестационарных продольных колебаниях системы «труба – оправка – стержень» стана холодной пильгерной прокатки труб (ХПТ). Составлено дифференциальное уравнение вынужденных продольных колебаний оправки со стержнем с учетом нестационарного воздействия со стороны очага деформации и переменности во времени массы рассматриваемой механической системы. Решение задачи о нестационарных продольных колебаниях системы «труба – оправка – стержень» стана приведено в фундаментальных функциях Бесселя и Неймана. Анализ динамики системы «труба – оправка – стержень» представлен коэффициентом динамичности системы. Выявлены некоторые особенности функционирования механизма удержания оправки стана ХПТ с учетом переменности во времени массы систем стана и нестационарного воздействия со стороны очага деформации.*

**Ключевые слова:** стан ХПТ, пильгерная прокатка труб, труба, динамика, колебания, оправка, стержень, дифференциальное уравнение, переменная масса, продольная жесткость, центрователь, люнет, задача Коши, задача Лагранжа, функция Бесселя, функция Неймана, разностенность труб.

**Введение.** Для формирования требуемой геометрии холоднокатаных труб, прокатываемых на современных станах холодной пильгерной прокатки труб (ХПТ), практическое значение имеет стабильная динамика механизмов со стороны механизмов загрузки трубной заготовки в очаг деформации стана. Для реализации устойчивых технологических операций пильгерной прокатки трубной заготовки и стабилизации виброактивности стержня механизма удержания оправки на большинстве современных станов ХПТ отечественного и зарубежного производства используются многочисленные удерживающие, направляющие, центрирующие и упорно–регулирующие механизмы [1–4] (рисунок 1, а).

**Постановка задачи.** Со стороны прокатываемой трубной заготовки стержень с оправкой воспринимают значительные статические и изменяющиеся во времени нестационарные динамические нагрузки. В силу того, что стержень механизма оправки имеет значительную гибкость и определенную массу, то в рассматриваемой механической системе возникают значительные по величине и изменяющиеся во времени нестационарные динамические нагрузки, которые обуславливают его продольные колебания вдоль оси прокатки трубы по соответствующим гармоническим формам. Отметим, что оправка совместно со стержнем механизма ее удержания совершает продольные колебания в очаге деформации в направлении оси прокатки. Рабочий конус оправки уходит от проектного положения калибра, что, зачастую, вызывает ненормированную различными стандартами продольную и поперечную разностенности готовой трубы. Интенсивность нестационарного воздействия очага деформации на оправку, изменение во времени массы прокатываемой трубы и параметров опорных узлов центрователей стержня оправки, рядом установленных вдоль оси прокатки, значительно усложняет корректное составление математической модели динамических процессов.

Пути интенсификации технологического процесса и вопросы повышения качества прокатываемых холоднокатаных труб всемерно диктуют необходимые условия совершенствования конструкций всех базовых механизмов фиксации, удержания стержня на оси прокатки. Характерно, что настройка рабочего положения оправки в очаге деформации



осуществляется соответствующими патронами зажима, поворота, подачи и промежуточными центрователями (люнетами), установленными по всей длине рабочего желоба и рам стана ХПТ [3, 4].

**Цель работы.** Целью работы является формирование научно–обоснованных предложений по совершенствованию конструкции механизма удержания оправки со стороны механизмов подачи трубы–заготовки в очаг деформации стана ХПТ в процессе пильгерной прокатки труб. Данный подход обуславливает детальное изучение влияния различных параметров процесса пильгерной прокатки труб (влияние параметров очага деформации и изменения во времени массы прокатываемой трубы–заготовки) на виброактивность выбранной модели механической системы стана ХПТ и на качество готового изделия.

**Метод решения задачи.** Ниже в работе в качестве объекта исследования рассмотрена развитая динамическая и математическая модели «труба – оправка – стержень» отечественных станов ХПТ и быстроходных станов КРВ.

Решение поставленной задачи обуславливает некоторое уточнение выбранной расчетной схемы (рисунок 1, б) и, в связи с этим, дальнейшее развитие математической модели исследуемой системы «труба – оправка – стержень», наиболее точно отражающей динамические процессы, происходящие в исходной механической системе.

Данная работа отличается от известных [3, 4] комплексным подходом к исследованию нестационарных динамических процессов с последующим учетом переменных во времени инертных характеристик прокатываемой трубы и изменяющихся во времени технологических нагрузок, действующих на оправку со стороны очага деформации.

Исследование развитой динамической модели «труба – оправка – стержень» стана ХПТ позволяет проанализировать нестационарное динамическое состояние стержневой системы механизма удержания оправки в течение всего цикла прокатки трубной заготовки. Следовательно, на основании вышеизложенного, возможно решить задачу по выработке обоснованных рекомендаций по эксплуатации стана и принятию необходимых технических решений по комплексной модернизации механизмов стана ХПТ.

В качестве расчетной схемы вынужденных продольных колебаний сложной механической системы примем стержень механизма удержания оправки стана ХПТ постоянного сечения с шарнирными опорами на концах и упругими опорами (центрователями, люнетами) между ними (рисунок 1, б). Стержень совместно с прокатываемой гильзой со стороны очага деформации подвергается воздействию гармонического составляющего осевого усилия процесса пильгерной прокатки  $\vec{P}_0 \sin(\omega t)$ . Характерно, что в процессе подачи трубы–заготовки по стержню массы  $M_0$  длиной  $l$  в очаг деформации с заданной условно постоянной скоростью  $\vec{V}$  (равномерно) вдоль оси прокатки дискретно перемещается прокатываемая гильза массы  $M_q$ .

Переходим к изложению решения задачи о вынужденных продольных колебаниях оправки стана ХПТ со стержневой системой механизма ее удержания с учетом переменности во времени массы системы. Учитывая переменность во времени массы системы для построения корректной математической модели стана и последующего анализа динамического состояния оправки со стержнем, в процессе прокатки трубной заготовки, воспользуемся соответствующим уравнением продольного движения оправки в постановке базовой задачи И.В. Мещерского [5–7]:

$$\frac{d}{dt} \left[ M(t) \frac{dx(t)}{dt} \right] = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad (1)$$

где  $x(t)$  – продольное перемещение оправки в очаге деформации вдоль оси прокатки;

$M(t)$  – переменная во времени масса системы «труба – оправка – стержень» с учетом исходной массы стержня оправки  $M_0$ ;

$\sum_{k=1}^n F_{kx}$  – сумма проекции всех сил на ось прокатки.

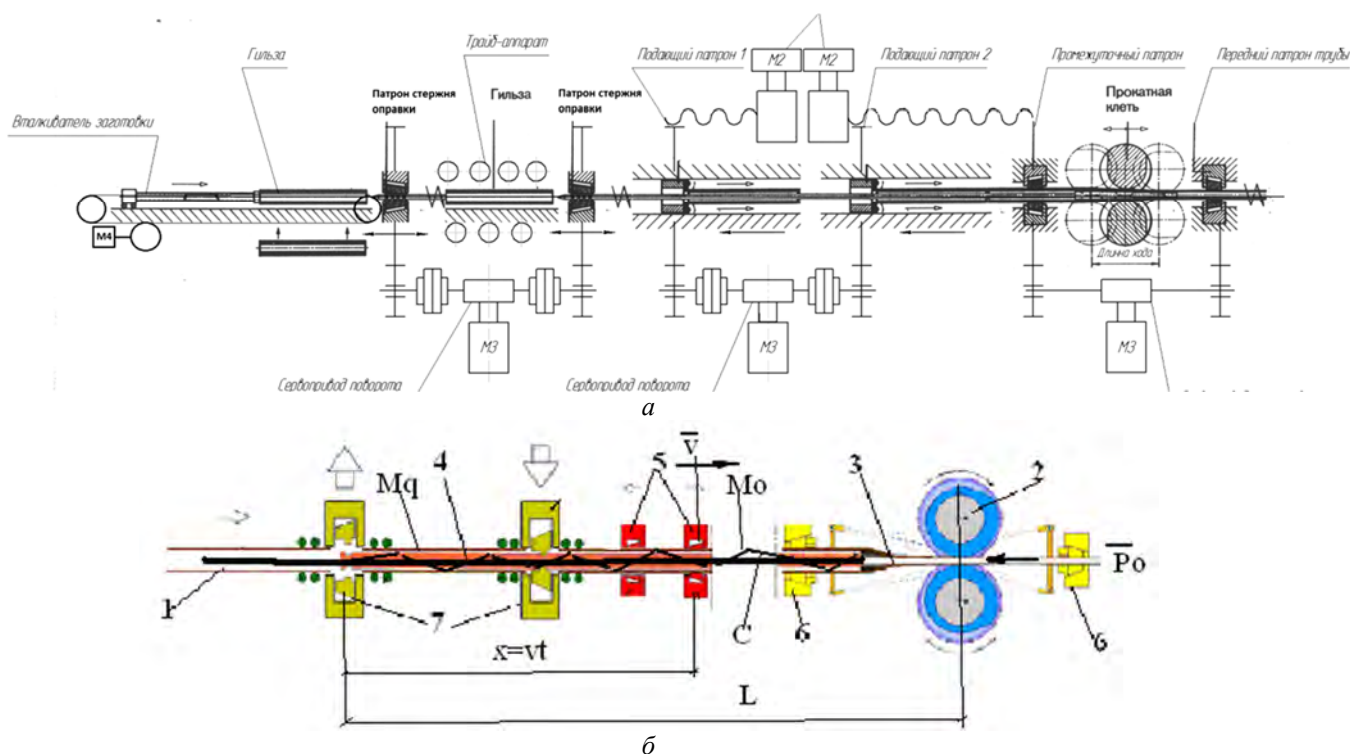


Рисунок 1 – Схема модернизированного высокоскоростного стана холодной пильгерной прокатки труб KPW 25VMR с системой торцевой загрузки трубы–заготовки а) и уточненная расчетная схема механизма удержания оправки со стержнем б):

1 – труба – заготовка (гильза); 2 – валки рабочие; 3 – оправка; 4 – стержень оправки; 5 – патроны подачи трубы; 6 – патроны поворота трубы; 7 – патроны удержания стержня оправки

Силу упругости стержня оправки в направлении оси прокатки принимаем, в пределах принятых допущений, по линейному закону Гюка:

$$F(t) = cx(t). \quad (2)$$

Здесь  $c$  – приведенная эквивалентная продольная жесткость оправки со стержнем и всеми механизмами удержания стержня оправки на оси прокатки стана ХПТ.

В предположении того, что внутреннее трение в системе по сравнению с циклическими технологическими  $P_0 \sin(\omega t)$  и нестационарными динамическими нагрузками незначительно, согласно [4], приходим к дифференциальному уравнению продольного движения оправки в виде:

$$M(t) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dM(t)}{dt} \frac{dx(t)}{dt} + cx(t) = P_0 \sin(\omega t), \quad (3)$$

где  $\omega$  – частота изменения вынуждающей силы (без учета скольжения металла равна угловой скорости вращения кривошипного колеса главного привода стана ХПТ).

Отметим, что переменность во времени массы механической системы вызывает пропорциональное изменение инертности всего механизма удержания оправки, что во многом определяет характер развития нестационарных динамических процессов.

Базируясь на результатах исследований [4], закон изменения (уменьшения) массы системы с учетом изменения во времени массы подвижной части системы принимаем в виде:

$$M(t) = M_0 - M_q \frac{x}{l} \Big|_{x=vt} = M_0(1 - \gamma t), \quad (4)$$

где  $\gamma = \frac{M_q v}{M_0 l}$  – скорость изменения массы механической системы ( $\lambda \leq 0$  масса механической системы с течением времени дискретно уменьшается);

$M_q = m_q l$  – масса прокатываемой гильзы;

$v$  – скорость подачи гильзы по стержню оправки за один двойной ход клетки;

$M_0 = m_0 l$  – начальная масса механической системы.

Следовательно, для анализа соответствующей части уравнения (3) с учетом (4) формируем задачу Коши при определенных начальных условиях [6, 7]. Тогда дифференциальное уравнение продольных колебаний оправки со стержнем (3) с учетом закона изменения во времени массы системы (4) в постановке задачи Коши приобретает вид:

$$\begin{cases} M_0(1 + \gamma t) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + M_0 \gamma \frac{dx(t)}{dt} + cx(t) = P_0 \sin(\omega t) H(t); \\ x(0) = x_0; \quad \frac{dx(0)}{dt} = v_0. \end{cases} \quad (5)$$

Переходим к определению коэффициента динамичности механической системы. Не учитывая действие реактивной составляющей, решаем дифференциальное уравнение (5) при заданных начальных условиях задачи. Разделив части уравнения (5) на  $M_0$  запишем:

$$(1 + \gamma t) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \frac{P_0 \sin(\omega t)}{M_0} H(t), \quad (6)$$

где  $H(t)$  – импульсная функция Хэвисайда;

$\omega_0^2 = c / M_0$  – квадрат частоты свободных колебаний оправки со стержнем механизма ее удержания.

Базируясь на фундаментальных исследованиях вопросов динамики тела переменной массы, исходя из постановки задачи И. В. Мещерского [5, 6], в данном приближении решения поставленной задачи в уравнении (3) не учитываем реактивную слагаемую инерционной нагрузки от действия прокатываемой трубы, механизмов подачи и поворота трубы  $\frac{dM(t)}{dt} \frac{dx(t)}{dt} = M_0 \gamma \frac{dx(t)}{dt}$ .

Для решения неоднородного дифференциального уравнения вынужденных продольных колебаний (6) в замкнутом виде вводим некоторую замену переменных

$$1 + \gamma t = \xi. \quad (7)$$

Следовательно, задачу Коши (6) с учетом данных условий и принятых допущений можно представить в удобном виде:

$$\frac{d^2 x(\xi)}{d\xi^2} + \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} x(\xi) = f(\xi) \quad (8)$$

где 
$$f(\xi) = \frac{P_0}{M_0 \xi \gamma^2} \sin \left[ \frac{\omega}{\gamma} (\xi - 1) \right].$$

Решение однородного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 x(\xi)}{d\xi^2} + \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} x(\xi) = 0$$

в очередном приближении ВБК – метода [8] ( $P_0 = 0$ ) представим в фундаментальных функциях Бесселя и Неймана:

$$x_1(\eta) = \eta J_1(\eta); \quad x_2(\eta) = \eta Y_1(\eta), \quad (9)$$

где  $J_1(\eta)$ ;  $Y_1(\eta)$  – соответственно фундаментальные функции Бесселя и Неймана [9];

$$\eta = \eta(t) = \eta_0 \sqrt{1 + \gamma t}; \quad \eta_0 = \frac{2\omega_0}{\gamma};$$

Тогда, согласно Лагранжу [6], исходная задача Коши имеет решение в квадратурах:

$$x(\eta) = c_1(\eta) x_1(\eta) + c_2(\eta) x_2(\eta), \quad (10)$$

где

$$\begin{cases} c_1(\eta) = -\frac{2}{\eta_0^2} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\eta f(\eta) x_2(\eta) d\eta}{\Delta(\eta)}; \\ c_2(\eta) = \frac{2}{\eta_0^2} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\eta f(\eta) x_1(\eta) d\eta}{\Delta(\eta)}. \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{Здесь } f(\eta) = \frac{P_0 \eta_0^2}{M_0 \gamma^2 \eta^2} \sin \left[ \frac{\omega}{\gamma} \left( \frac{\eta^2}{\eta_0^2} - 1 \right) \right].$$

Из постановки базовой задачи Лагранжа формируем определитель Вронского для системы уравнений. Раскрывая, главный определитель системы уравнений, запишем:

$$\Delta(\eta) = x_1(\eta) \frac{dx_2(\eta)}{d\eta} - x_2(\eta) \frac{dx_1(\eta)}{d\eta}. \quad (12)$$

Здесь  $x_1(\eta)$  и  $x_2(\eta)$  – соответствующие фундаментальные решения однородного дифференциального уравнения (8).

Поскольку, безусловно, справедливо равенство:

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{\eta_0^2}{2\eta} \frac{d}{d\eta}, \quad (13)$$

то тогда, дифференцируя выражения (9) получаем:

$$\frac{dx_1(\eta)}{d\eta} = \eta J_0(\eta); \quad (14)$$

$$\frac{dx_2(\eta)}{d\eta} = \eta Y_0(\eta). \quad (15)$$

Для полученных выражений после соответствующих подстановок (9), (14) и (15) в (12) и преобразований окончательно находим:

$$\Delta(\eta) = \frac{\eta_0^2 \eta}{2} [J_1(\eta) Y_0(\eta) - J_0(\eta) Y_1(\eta)] = \frac{\eta_0^2}{2}. \quad (16)$$

Далее подстановкой (16) в (11) соответственно имеем:

$$\begin{cases} c_1(\eta) = -\frac{\pi \eta_0 P_0}{2c} g_1(\eta); \\ c_2(\eta) = \frac{\pi \eta_0 P_0}{2c} g_2(\eta). \end{cases} \quad (17)$$

$$\text{где } g_1(\eta) = \int_1^{\frac{\eta}{\eta_0}} \sin \left[ \frac{\omega}{\gamma} (y^2 - 1) \right] Y_1(y \eta_0) dy; \quad (18)$$

$$g_2(\eta) = \int_1^{\frac{\eta}{\eta_0}} \sin \left[ \frac{\omega}{\gamma} (y^2 - 1) \right] J_1(y \eta_0) dy. \quad (19)$$

После соответствующих подстановок в (10) и некоторых преобразований окончательно находим динамические перемещения оправки со стержнем вдоль оси прокатки трубы:

$$x(\eta) = \frac{\pi P_0}{2c} \eta \eta_0 \left\{ b_1(\eta) \sin \left[ \frac{\omega}{\gamma} \left( \frac{\eta^2}{\eta_0^2} - 1 \right) \right] + b_2(\eta) \cos \left[ \frac{\omega}{\gamma} \left( \frac{\eta^2}{\eta_0^2} - 1 \right) \right] \right\}, \quad (20)$$

$$\text{где } b_1(\eta) = \int_1^{\frac{\eta}{\eta_0}} [J_1(y \eta_0) Y_1(\eta) - J_1(\eta) Y_1(y \eta_0)] \cos \left[ \frac{\omega}{\gamma} \left( \frac{\eta^2}{\eta_0^2} - 1 \right) \right] dy; \quad (21)$$

$$b_2(\eta) = \int_1^{\frac{\eta}{\eta_0}} [J_1(y\eta_0)Y_1(\eta) - J_1(\eta)Y_1(y\eta_0)] \sin \left[ \frac{\omega}{\gamma} \left( \frac{\eta^2}{\eta^2} - 1 \right) \right] dy. \quad (22)$$

Вычисление коэффициента динамичности, при этом, сводим к выражению:

$$K_a(\eta) = \frac{\text{ampl}[x(\eta)]}{x_c(\eta)} = \frac{c}{P_0} \text{ampl}[x(\eta)], \quad (23)$$

где  $x_c(\eta) = \frac{P_0}{c}$  – статическая деформация упругих систем всего механизма удержания оправки вдоль оси прокатки трубы.

Следовательно, путем подстановок и соответствующих преобразований окончательно находим амплитудное значение коэффициента динамичности систем стана при нестационарных колебаниях оправки:

$$K_a(\eta) = \frac{\pi\eta\eta_0}{2} \sqrt{b_1^2(\eta) + b_1^2(\eta)}. \quad (24)$$

Неоднородное дифференциальное уравнение (5) составлено и представлено в форме задачи Коши, что с достаточно высокой степенью точности описывает вынужденные колебания механизма удержания оправки стана ХПТ. Далее для достоверности разработанной математической модели решение дифференциального уравнения (5) реализуем численно методом Рунге – Кутты для наиболее распространенной первой формы колебаний системы «труба – оправка – стержень».

Выполним уточненный расчет на базе математической модели задачи о вынужденных колебаниях оправки со стержнем на примере исследования стана КРВ 25 (рисунок 1б). Для этого примем следующие исходные данные для стана КРВ 25 (труба по маршруту 28х2,5→19х1,5, материал – Gr2):  $l = 16$  м;  $v = 1,2$  м/с;  $M_0 = m_0 l$ ;  $m_0 = 2$  кг/м;  $M_q = m_q l$ ;  $m_q = 3$  кг/м;  $c = 2,5 \cdot 10^5$  Н/м;  $t \in [0; 0,5]c$ .

Результаты численного анализа дифференциального уравнения (5) продольных колебаний оправки совместно со стержнем механизма ее удержания при прокатке трубы по маршруту 28х2,5→19х1,5, материал – титан Gr2, на стане КРВ 25 представлены на рисунке 2.

Расчетные кривые, приведенные на рисунке 2, указывают на крайне неудовлетворительные нестационарные условия функционирования оправки со стержнем за время процесса прокатки трубной заготовки на стане КРВ 25. Амплитуда продольных колебаний оправки достигает 0,037 м, что, безусловно, приводит к уходу оправки от проектного положения в калибре и образованию повышенной разностенности прокатываемых труб.

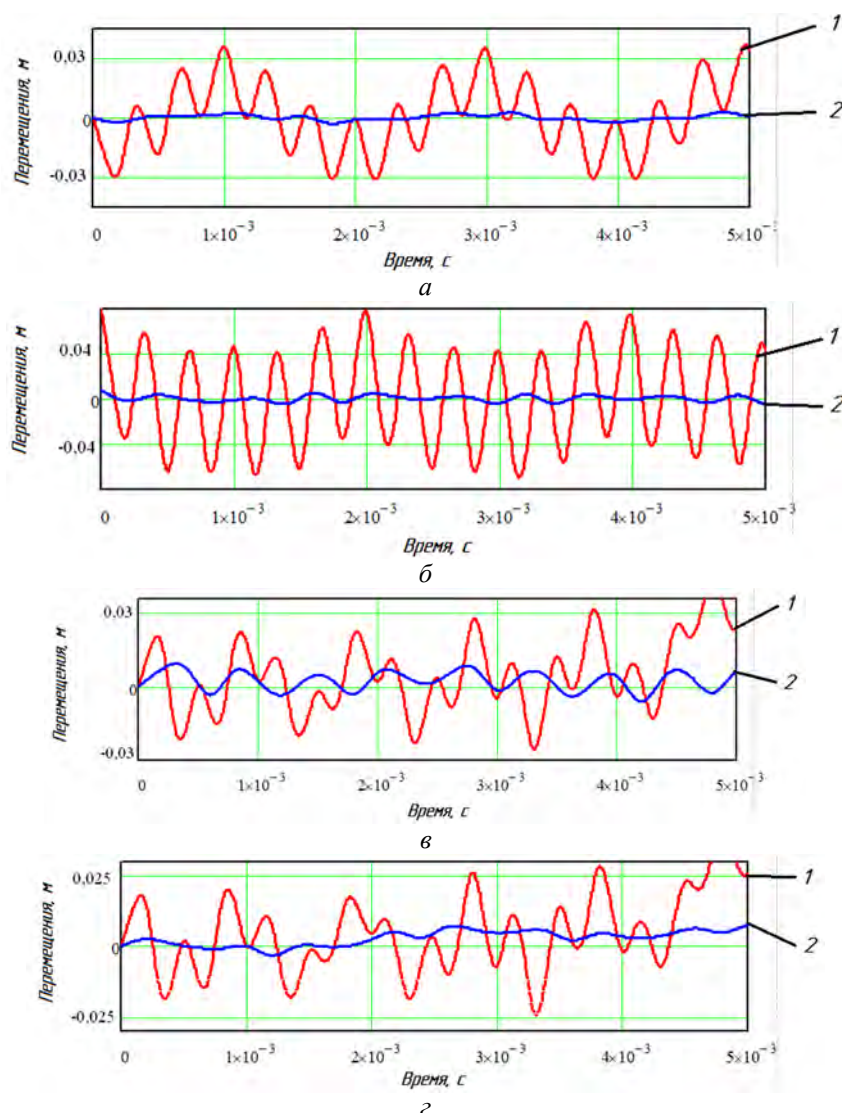
Таким образом, при нестационарном воздействии со стороны очага деформации соответствующим образом меняется поведение системы «труба – оправка – стержень».

Далее исследуем влияние изменения во времени массы механической системы на коэффициент динамичности на примере расчета механизма удержания оправки высокоскоростного стана КРВ 25.

Расчеты свидетельствуют о том, что в системе «труба – оправка – стержень» с учетом снижения массы механической системы первый максимум коэффициента динамичности меньше двух, а последующие максимумы меньше первого. Откуда следует, что ближе к концу процесса прокатки трубы происходит определенная стабилизация виброактивности в системе «труба – оправка – стержень». Полученные данные совпадают с результатами ряда исследований быстроходного стана КРВ 25 [4].

Используя разработанную математическую модель и элементы современных информационных технологий, переходим к исследованию зависимости динамики механизма удержания оправки от скорости дискретной подачи трубной заготовки, массы узлов механической системы; осевой составляющей силы прокатки трубы, интенсивности воздействия трубной заготовки, частоты вращения стержня оправки и жесткости элементов

механической системы стана ХПТ. Результаты комплексных исследований представлены на рисунке 3.



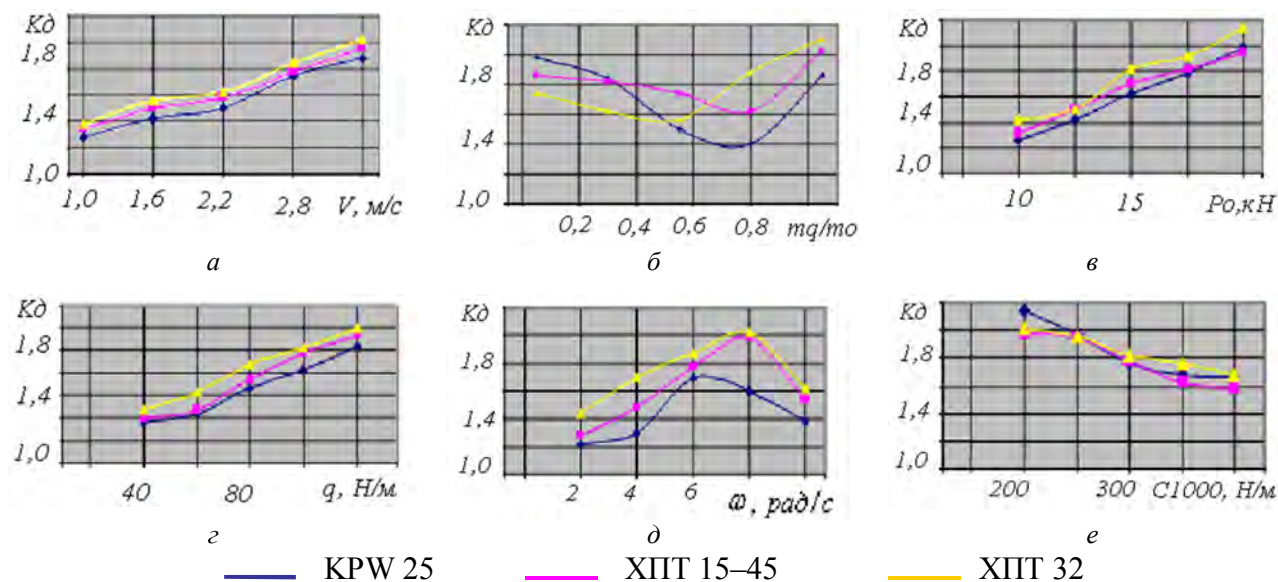
**Рисунок 2 – Вынужденные продольные колебания оправки со стержнем на стане KPW 25VMR:**

1 – колебания стержня оправки без центрователей; 2 – колебания стержня оправки с модернизированными центрователями: а – труба по маршруту 28x2,5→19x1,5 материал – Gr2; б – труба по маршруту 25x2,0→16x0,9, материал – 12X18H10T; в – труба по маршруту 20x1,2→12x0,9 материал – ПТ-7М; г – труба по маршруту 16x1,2→10x0,8 материал – Gr10

Анализ полученного указывает, что математическая модель процессов достоверно и в достаточной мере описывает нестационарные динамические явления в системе «труба – оправка – стержень». Следует подчеркнуть, что амплитудно-частотные характеристики динамических процессов при продольных колебаниях за время реализации всего технологического процесса прокатки трубной заготовки на станах превышают допустимый уровень динамичности механической системы.

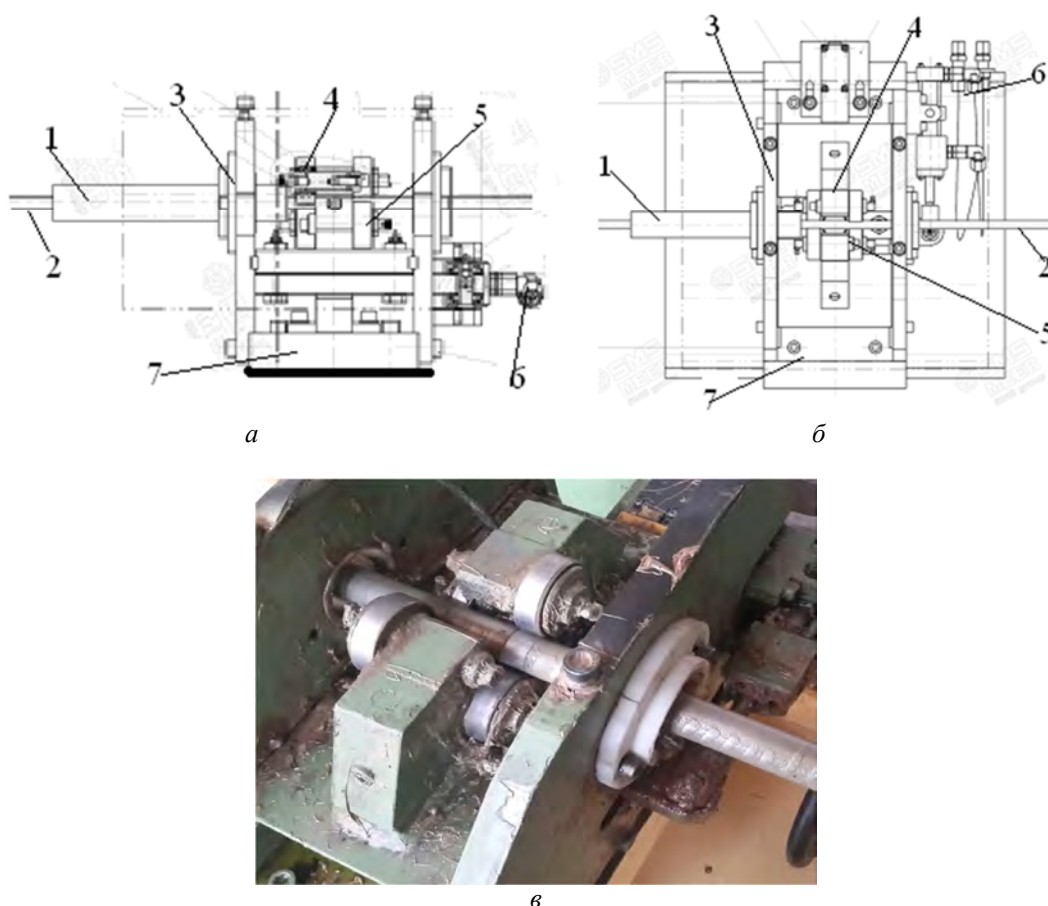
Исследование динамики механизма удержания оправки указывает на то, что реализация интенсивных технологических процессов приводит к повышенной виброактивности системы, что влечет за собой образование гильз повышенной разностенности. Очевидно, что учет интенсивности воздействия очага деформации и переменности массы системы являются определяющими параметрами в рамках выбранной динамической модели механизма удержания оправки ряда станков ХПТ и быстроходного стана KPW 25. Наведенная со стороны механизмов продольная разностенность готовых труб в дальнейшем носит сложный и трудноустраняемый характер.





**Рисунок 3 – Зависимость коэффициента динамичности механизма удержания оправки станов ХПТ от:**

- а) скорости подачи трубы; б) соотношения масс системы;  
 в) осевой составляющей силы прокатки; г) интенсивности воздействия гильзы;  
 д) частоты вращения стержня оправки; е) жесткости системы



**Рисунок 4 – Центрователь (люнет) стержневой системы механизма удержания оправки конструкции ООО «НПФ «Восток Плюс»:**

- 1 – труба-заготовка; 2 – стержень оправки; 3 – проводка; 4 – ролик центрователя неподвижный;  
 5 – ролик центрователя подвижный; 6 – гидропривод перемещения траверсы подвижных роликов; 7 – основание

Для снижения виброактивности системы рекомендуется использовать регулируемые центрователи (люнеты) стержневой системы механизма удержания оправки конструкции

ООО «НПФ «Восток Плюс» (рисунок 4) в количестве не менее семи штук с удлиненными роликами (суммарная рабочая длина роликов на одном центрователе равна  $100 \div 120$  мм), установленные вдоль оси прокатки [7].

Возможность проведения комплексного математического моделирования режимов пильгерной прокатки трубы–заготовки на этапе проектирования технологических процессов существенно отличает полученные результаты от результатов ранее известных работ [1–4], по исследованию механизма удержания оправки отечественных станов ХПТ и быстроходного стана КРВ 25.

#### **Выводы:**

Уточнена исходная расчетная схема и разработана корректная математическая модель вынужденных продольных колебаний оправки со стержнем механизма ее удержания на оси прокатки в рамках рассматриваемой нестационарной динамической модели системы «труба – оправка – стержень» отечественных станов ХПТ и быстроходного стана КРВ 25. Учтены переменность во времени массы системы, циклическая технологическая нагрузка, действующая со стороны очага деформации и параметры механизма удержания оправки станом ХПТ и КРВ 25.

Приведено замкнутое решение задачи нестационарной динамики механизма удержания оправки станом ХПТ и КРВ 25 в фундаментальных функциях Бесселя и Неймана. Нестационарные процессы в системе «труба – оправка – стержень» представлены коэффициентом динамичности перемещений оправки.

Установлено, что величина коэффициента динамичности, например, для механизма удержания оправки стана КРВ 25, не равна двум, а со временем уменьшается. Его значения монотонно меняются в ходе нестационарных продольных колебаний оправки.

Получено численное решение дифференциального уравнения продольных колебаний оправки со стержнем методом Рунге – Кутты на примере расчета стана КРВ 25 (труба по маршруту  $28 \times 2,5 \rightarrow 19 \times 1,5$ , материал – Gr2). Получены данные, которые позволяют в комплексе с замкнутым решением задачи оценить продольные колебания оправки в очаге деформации с учетом переменности во времени массы механической системы

Путем комплексного математического моделирования вынужденных нестационарных колебаний механизма удержания оправки, на этапе назначения технологических процессов прокатки трубной заготовки, установлены рациональные режимы прокатки трубы–заготовки на стане и построен прогноз показателей качества выпускаемых труб, исходя из величины допустимого уровня виброактивности упругой системы механизма удержания оправки. Например, при производстве труб на стане КРВ 25 (труба по маршруту  $28 \times 2,5 \rightarrow 19 \times 1,5$ , материал – Gr2) расчетным путем определено, что скорость прокатки на стане не должна превышать 2,2 м/с. Полученные результаты достаточно близки с данными промышленных испытаний стана КРВ 25 [5–8], что указывает на высокую достоверность разработанной математической модели механической системы.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Кофф, З.А. Холодная прокатка труб / Кофф З.А., Соловейчик П.М. Свердловск: Государственное научно техническое издательство литературы по черной и цветной металлургии, Свердловское Отделение, 1962. – 431 с.
2. Гриншпун, М.И. Станы холодной прокатки труб / Гриншпун М.И., Соколовский В.И. – М.: Машиностроение, 1967. – 239 с.
3. Данченко, В.Н. Технология трубного производства. Учебник для вузов. / В.Н. Данченко, А.П. Коликов, Б.А. Романцев, С.В. Самусев. – М.: Интермет – Инжиниринг, 2002. – 640 с.
4. Фролов, В.Ф. Холодная пильгерная прокатка труб / В.Ф. Фролов, В.Н. Данченко, Я.В. Фролов. – Днепропетровск: Пороги, 2005. – 255 с.
5. Бессонов, А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев. – М.: Наука, 1967. – 279 с.
6. Cveticanin, L. Dynamics of Machines with Variable Mass/ L. Cveticanin. – Taylor & Francis Ltd, – 1998. – 300 p.
7. Ольшанский, В.П. Моделирование колебаний осциллятора линейно–переменной массы при импульсном нагружении / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПІ»: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2013. – № 37(2010). – С. 125–130.



8. Ольшанский, В.П. Метод ВБК в расчетах нестационарных колебаний осцилляторов / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Харьков: Мисдрук, 2014. – 264 с.  
9. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

**Рахманов Сулейман Рахманович**

Национальная металлургическая академия Украины,  
кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики,  
директор ООО НПФ «ВОСТОК ПЛЮС»,  
Украина, 49027, г. Днепропетровск, ул. Фучика, 18  
Тел.: (+380562) 36 08 07, (+38067) 5643420  
E-mail: npfvostok@mail.ru

---

S.R. RAKHMANOV

**DYNAMICS RESEARCH RETENTION-MANDREL  
OF COLD PILGER ROLLING TUBE**

*The solution of a task on non-stationary fluctuations of system «a pipe – a mandrel – a core» a camp of cold pilger rolling of pipes is specified (CPT). The differential equation of the compelled longitudinal fluctuations of a mandrel with a core taking into account non-stationary influence of the center of deformation and variability in time of mass of a pipe is worked out. The closed solution of a task on non-stationary longitudinal fluctuations of system «a pipe – a mandrel – a core» a camp is provided in Bessel and Neumanns fundamental functions. The analysis of dynamics of system «a pipe – a mandrel – a core» is submitted by dynamism coefficient. Some features of functioning of the mechanism of deduction of a mandrel of a camp of CPT taking into account variability of weight mechanical a camp and non-stationary influence are established from the deformation center.*

**Keywords:** camp of a camp of cold pilger rolling of pipes, pipe, dynamics, fluctuations, mandrel, core, differential equation, variable weight, longitudinal rigidity, Cauchy's task, Lagrange's task, Bessel's function, Neumann's function

**BIBLIOGRAPHY**

1. Koff, Z.A. Kholodnaya prokatka trub / Koff Z.A., Soloveychik P.M. Sverdlovsk: Gosudarstvennoye nauchno tekhnicheskoye izdatelstvo literatury po chernoy i tsvetnoy metallurgii, Sverdlovskoye Otdeleniye, 1962. – 431 s.
2. Grinshpun, M.I. Stany kholodnoy prokatki trub / Grinshpun M.I., Sokolovskiy V.I. – M.: Mashinostroyeniye, 1967. – 239 s.
3. Danchenko, V.N. Tekhnologiya trubnogo proizvodstva. Uchebnik dlya vuzov. / V.N. Danchenko, A.P. Kolikov, B.A. Romantsev, S.V. Samusev. – M.: Intermet – Inzhiniring, 2002. – 640 s.
4. Frolov, V.F. Kholodnaya pilgernaya prokatka trub / V.F. Frolov, V.N. Danchenko, YA.V. Frolov. – Dnepropetrovsk: Porogi, 2005. – 255 s.
5. Bessonov, A.P. Osnovy dinamiki mekhanizmov s peremennoy massoy zvenyev. – M.: Nauka, 1967. – 279 s.
6. Cveticanin, L. Dynamics of Machines with Variable Mass/ L. Cveticanin. – Taylor & Francis Ltd, – 1998. – 300 p.
7. Olshanskiy, V.P. Modelirovaniye kolebaniy ostsillyatora lineynno-peremennoy massy pri impulsnom nagruzhennii / V.P. Olshanskiy, S.V. Olshanskiy // Visnik NTU «KHPÍ»: Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh. – 2013. – № 37(2010). – S. 125–130.
8. Olshanskiy, V.P. Metod VBK v raschetakh nestatsionarnykh kolebaniy ostsillyatorov / V.P. Olshanskiy, S.V. Olshanskiy. – Kharkov: Miskdruk, 2014. – 264 s.
9. Yanke, Ye. Spetsialnyye funktsii / Ye. Yanke, F. Emde, F. Losh. – M.: Nauka, 1977. – 344 s.

**Rakhmanov Suleiman Rahmanovich**

National Metallurgical Academy of Ukraine,  
Ph.D., assistant professor of theoretical mechanics,  
director of NPF «EAST PLUS»  
Ukraine, 49027, Dnepropetrovsk, st. Fucik, 18  
Tel.: (+38067) 5643420  
E-mail: npfvostok@mail.ru

В.В. ПОРОШИН, Д.Ю. БОГОМОЛОВ

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В УЗКОМ ДВУМЕРНОМ КАНАЛЕ С ШЕРОХОВАТЫМИ СТЕНКАМИ

*Рассмотрена математическая модель течения вязкой жидкости и теплопереноса в узких каналах механических систем с шероховатыми стенками в двухмерной постановке. Представлен сравнительный анализ коэффициентов потока и чисел Нуссельта для канала с гладкими стенками и каналов с реальными технологическими шероховатыми стенками.*

**Ключевые слова:** узкий канал, шероховатость поверхности, поток сплошной среды, теплообмен.

**Введение.** Изучение течения жидких и газовых сред, а также связанного с ним теплообмена в узких каналах различных технологических устройств на протяжении многих лет остается одной из главных проблем прикладной механики, определяющих динамику, надежность и долговечность механических систем. Рассматриваемые виды течений актуальны при анализе эффективности компактных теплообменников, изучении тепловых потоков в частях механизмов и т.д.

Режимы течения и теплообмена в узких каналах отличаются от аналогичных процессов, протекающих в каналах большого размера. Одним из главных факторов, оказывающих решающее влияние на характер течения и показатели теплообмена в таких каналах, становится шероховатость поверхности. Более того, одним из традиционных способов увеличения эффективности теплообмена в каналах и каналах большого размера (в особенности для турбулентного потока) является нанесение искусственно созданных неровностей регулярной формы на их стенки.

Практически все существующие на настоящий момент теоретические и расчетные модели учитывают влияние микротопографии посредством осредненных эмпирических коэффициентов либо используют искусственные модели регулярной шероховатости. Влияние реальной микротопографии инженерных поверхностей на течение рабочих сред в узких каналах исследовано недостаточно полно. Универсальные численные расчетные пакеты достаточно продуктивны для гладких поверхностей. Однако в случае развитой шероховатости со сложной топологией сеточная модель становится настолько объемной, что время счета на современных ЭВМ становится соизмеримым с ресурсом работы машины.

В работах [1, 2] авторским коллективом предложены численные модели течения вязкой ньютоновской жидкости в узких каналах с учетом шероховатости их стенок в приближении смазочного слоя. Представлен детальный анализ влияния шероховатости поверхности на герметичность подвижных и неподвижных соединений. Влияние шероховатости поверхности в данных моделях учитывалось с помощью коэффициентов потока. Настоящая работа является попыткой расширить данные численные модели с целью анализа влияния шероховатости поверхностей стенок узкого канала не только на процесс течения вязкой жидкости, но и на сопутствующий ему теплообмен.

Применение предложенной модели позволит уменьшить гидравлические потери в энергомашинах, снизить утечки в трубопроводах и соединениях, обеспечить условия смазки триботехнических узлов, улучшить функциональные характеристики изделия, прежде всего надежность и долговечность.

**Модель течения и теплопереноса.** В основе численной модели лежит двухмерная геометрическая модель узкого канала с учетом шероховатости его стенок  $h_1$  и  $h_2$

(рисунок 1). Средний зазор между двумя поверхностями ( $H$ ) вычисляется как расстояние между их средними линиями. Верхняя и нижняя стенки канала определяются как  $H_1(x) = H + h_1(x)$  и  $H_2(x) = H + h_2(x)$ , а текущий зазор – как  $h_T(x) = H + h_1(x) + h_2(x)$ . Верхняя стенка канала движется параллельно нижней стенке с постоянной скоростью  $U$ .

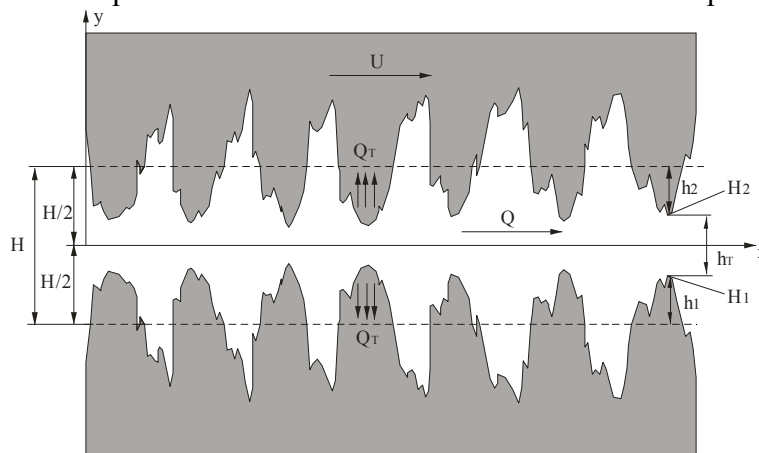


Рисунок 1 – Двухмерная геометрическая модель узкого канала с заданной микроповерхностью поверхности стенок

В расчетах могут быть использованы как результаты измерения реальных технологических поверхностей, так и искусственно сгенерированные поверхности с заданными свойствами. Неровности поверхности канала задаются на регулярной сетке с шагом  $\Delta x$ . Шаг вычислительной сетки  $\delta x$  задается кратно исходному шагу профиля неровностей. Шаг  $\delta y$  в направлении оси  $Oy$  должен быть сопоставим по величине с  $\delta x$ .

Для моделирования течения в узком канале используется приближение смазочного слоя, которое определяется системой уравнений, предложенных О. Рейнольдсом. Для двухмерного случая она может быть решена аналитически, как показано в работе [3]:

$$p(x) = p_{in} + 6\mu U \int_0^x \frac{d\xi}{h_T^2(\xi)} + \frac{p_{out} - p_{in} - 6\mu U \int_0^L \frac{d\xi}{h_T^2(\xi)}}{\int_0^L \frac{d\xi}{h_T^3(\xi)}} \int_0^x \frac{d\xi}{h_T^3(\xi)},$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\mu U}{h_T^2(x)} + \frac{p_{out} - p_{in} - 6\mu U \int_0^L \frac{d\xi}{h_T^2(\xi)}}{h_T^3(x) \int_0^L \frac{d\xi}{h_T^3(\xi)}}, \quad (1)$$

где  $p$  – давление среды;  
 $v$  – локальная скорость среды;  
 $\mu$  – коэффициент динамической вязкости;  
 $p_{in}$  – давление на входе в канал;  
 $p_{out}$  – давление на выходе канала.

Для моделирования связанного с потоком теплопереноса обычно используется уравнения баланса энергии:

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \lambda \Delta(T) + \mu \Phi, \quad (2)$$

где  $T$  – температура среды;

$\rho$  – плотность среды;  
 $C_p$  – теплоемкость среды;  
 $\lambda$  – теплопроводность среды;  
 $t$  – время;  
 $\Phi$  – диссипативная функция.

Процесс диссипации не является определяющим для описанной задачи, компонента  $\Phi$  опущена в рассматриваемой модели. Поток в двумерном узком канале направлен вдоль оси  $Oy$ . Таким образом, можно положить  $v_y = 0$ . Так как процесс стационарен, то полная производная от температуры примет вид:

$$\frac{dT}{dt} = v_x \frac{dT}{dx} + v_y \frac{dT}{dy} = v_x \frac{dT}{dx}. \quad (3)$$

Тепло в двумерном узком канале распространяется вдоль оси  $y$  от стенок канала к середине потока. Поэтому производной  $d^2T/dx^2$  в операторе Лапласа можно пренебречь. В итоге, уравнение баланса энергии примет вид:

$$\rho C_p v_x \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{d^2T}{dy^2}. \quad (4)$$

Для решения дифференциального уравнения (4) необходимо задать температуру на стенках канала  $T_w$  и температуру входного потока  $T_{in}$ . При таких граничных условиях уравнение можно решить, используя неявный конечно-разностный метод:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\delta x}, \quad \frac{d^2T}{dy^2} = \frac{T_{i+1,j-1} - 2T_{i+1,j} + T_{i+1,j+1}}{\delta y^2}, \\ \rho C_p [v_x]_{i,j} \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\delta x} &= \lambda \frac{T_{i+1,j-1} - 2T_{i+1,j} + T_{i+1,j+1}}{\delta y^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для решения соотношения (5) может быть использован метод прогонки. Данная схема абсолютно устойчива и сходится, погрешность линейна относительно  $\delta x$  и квадратична относительно  $\delta y$ .

Для оценки величины расхода в узком канале с шероховатыми стенками и сопряженного теплопереноса были использованы безразмерные характеристики – коэффициент потока и число Нуссельта. Безразмерный коэффициент  $\phi_x$  показывает на сколько уменьшаются величины расхода в канале с шероховатыми стенками по сравнению с каналом с гладкими стенками:

$$\begin{aligned} Q_{xs} &= \frac{B h_T (L)^3}{12 \mu} \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = \frac{B(p_{out} - p_{in})}{12 \mu \int_0^L \frac{d\xi}{h_T^3(\xi)}}, \\ Q_{xs}^* &= -\frac{B H^3 (p_{out} - p_{in})}{12 \mu L}, \quad \phi_x = Q_{xs} / Q_{xs}^*, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $B$  – ширина канала.

Коэффициент потока позволяет сконцентрироваться на зависимости свойств потока от геометрических свойств шероховатости поверхности канала и величины среднего зазора в канале, а не от разницы давлений, значения вязкости и т.д.

Число Нуссельта является отношением конвективной части теплообмена к теплопроводности по нормали к границе. Теплопроводность измеряется так же, как и конвекция, но в установившемся потоке. В рассматриваемом течении этот безразмерный коэффициент показывает эффективность рассмотренной геометрии канала с точки зрения управления потоком тепла за счет изменения перепада давлений или скорости стенки.

Для полностью развитого ламинарного течения число Нуссельта вычисляется для каждого поперечного сечения ( $x = Const$ ) следующим образом [4]:

$$Nu = \frac{\alpha D_h}{\lambda}, \quad (7)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи,  
 $D_h$  – гидравлический диаметр.

Гидравлический диаметр канала для каждого сечения вычисляется по формуле:

$$D_h = \frac{4 A_c}{P} = \frac{4BH}{2B + 2H} = \frac{2BH}{B + H}, \quad (8)$$

где  $A_c$  – площадь поперечного сечения,  
 $P$  – его смоченный периметр.

Коэффициент теплоотдачи в заданном сечении канала вычисляется как:

$$\alpha = \frac{q}{T_w - T_m}, \quad (9)$$

где  $q$  – нормальный тепловой поток вблизи стенок канала;  
 $T_m$  – характерная температура потока в сечении.

Нормальный тепловой поток вблизи стенок может быть вычислена без учета влияния шероховатости:

$$q = \lambda \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (10)$$

Характерная температура потока может быть вычислена путем усреднения поля температуры относительно скорости потока:

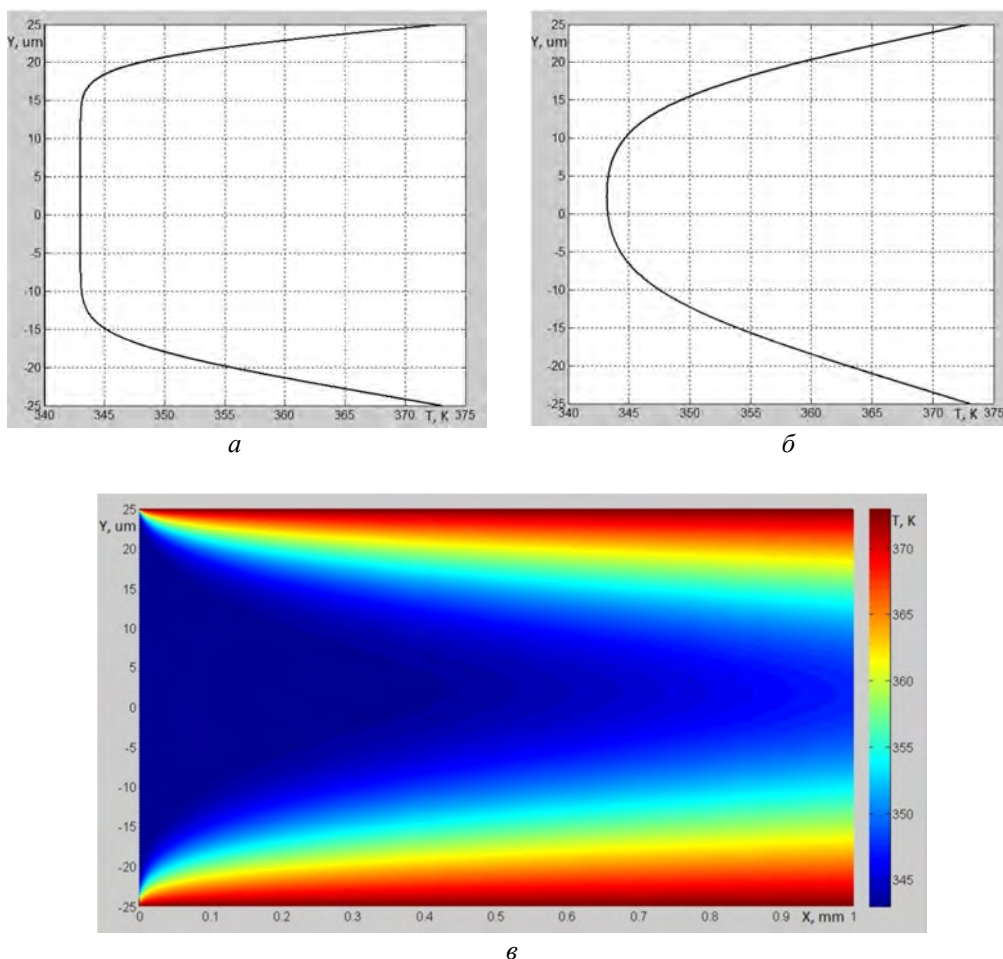
$$T_m(x) = \frac{\int_{H_1(x)}^{H_2(x)} v_x(y) T(y) dy}{\int_{H_1(x)}^{H_2(x)} v_x(y) dy}. \quad (11)$$

Итоговое число Нуссельта, характерное для данного потока, вычисляется как среднее от чисел Нуссельта, рассчитанных по всем сечениям, за исключением зоны развивающегося потока в области вхождения. Свои различающиеся числа Нуссельта могут быть вычислены независимо для статических и динамических граничных условий.

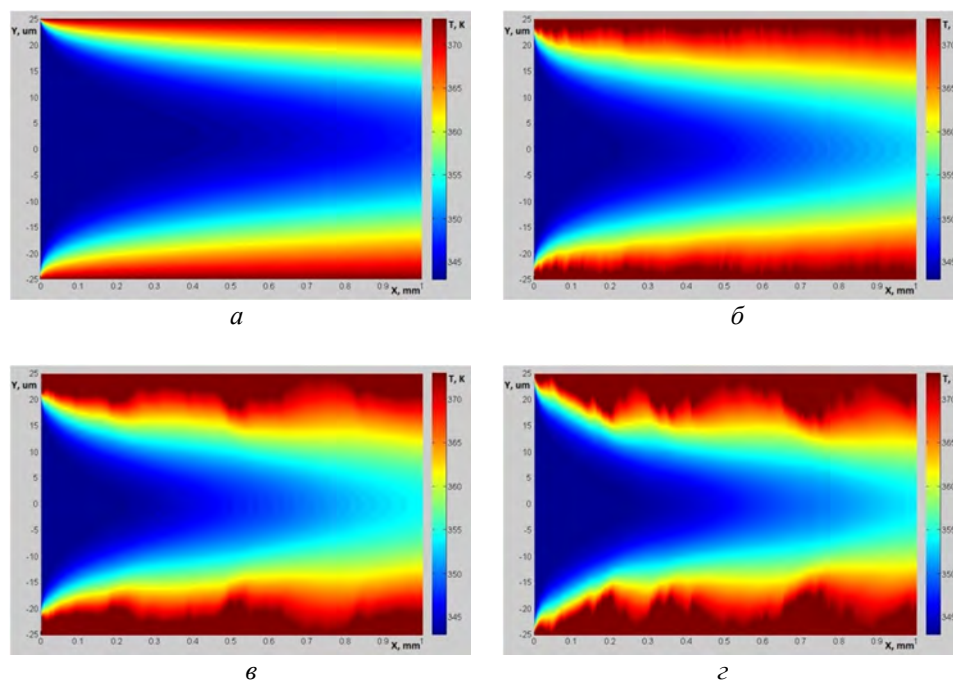
**Анализ численных экспериментов.** Для проверки предложенной численной модели и вычислительной программы были проведено численное моделирование течения для исследованного многими авторами течения в канале с гладкими стенками. В принятой модели поток является гидродинамически развитым с самого начала канала, а скорость имеет параболическую форму в поперечном сечении. Режим теплового потока в области вхождения представляет собой развивающийся процесс. При этом график температуры в поперечном сечении представляет собой сплюснутую параболу. В зоне термально развитого течения график поперечного сечения поля температур имеет строгую параболическую форму (рисунок 2,а). Результаты численных расчетов полностью согласуются с предполагаемым теоретическим поведением потока. Квазипараболическое распределение температуры было получено для внутренней области канала (рисунок 2, б).

В области вхождения потока сечение температуры постепенно развивается от заданной на границе формы к квазипараболической. Полученные для случая с гладкими стенками результаты позволяют подтвердить правильность предложенной численной модели и расчетов.

Другие численные эксперименты были проведены для каналов с шероховатыми стенками. В качестве геометрии стенок канала использовались результаты измерения реальных поверхностей после полирования, шлифования, фрезерования и токарной обработки. Длина исследуемого канала была 0.8 мм, что соответствует базовой длине для оценки параметров шероховатости.



**Рисунок 2 – Распределение температуры в канале с гладкими подвижными стенками:**  
 а – сечение потока температуры в области вхождения, б – сечение потока температуры в центральной области, в – поле потока температуры



**Рисунок 3 – Поле потока температуры в канале с шероховатыми стенками и статическими граничными условиями:**  
 а – поверхность после полирования, б – поверхность после шлифования, в – поверхность после шлифования, з – поверхность после токарной обработки

Эксперименты были проведены для  $H = 40 \text{ мкм}$ ,  $p_{in} = 10 \text{ КПа}$ ,  $p_{out} = 0$ ,  $T_{in} = 343 \text{ К}$ ,  $T_w = 373 \text{ К}$ . Характерные поля температур для задачи со статическими граничными условиями показаны на рисунке 3.

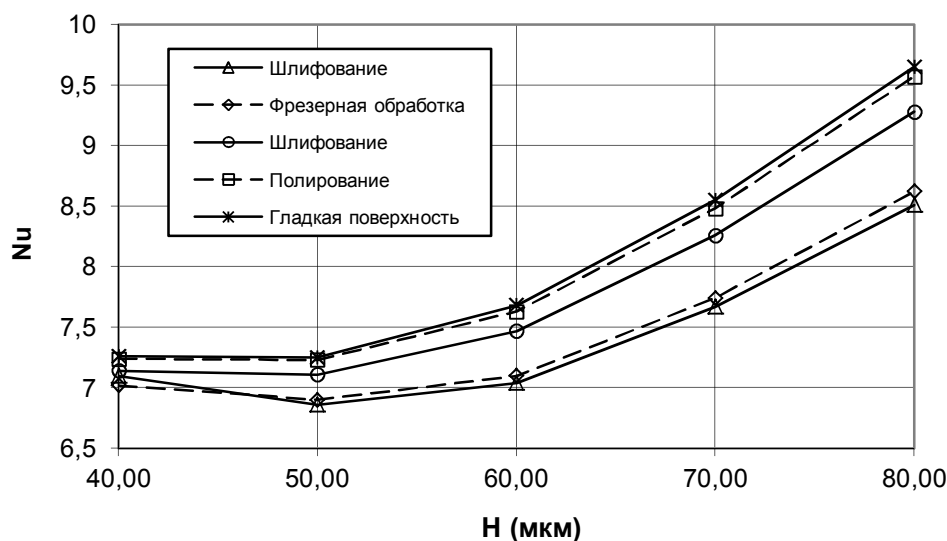


Рисунок 4 – Эволюция числа Нуссельта при увеличении среднего зазора

Графики поперечного сечения полей температур имеют квазипараболическую форму, как и в случае гладкого канала. Так же тепловой поток является развивающимся в области вхождения. Теплоперенос более интенсивен для тех шероховатостей стенок канала, которые имеют большую высоту выступов. Расчетные зависимости числа Нуссельта от ширины канала при различных видах шероховатости стенки показаны на рисунке 4. Расчетные зависимости коэффициента потока от ширины канала при различных видах шероховатости стенки показаны на рисунке 5.

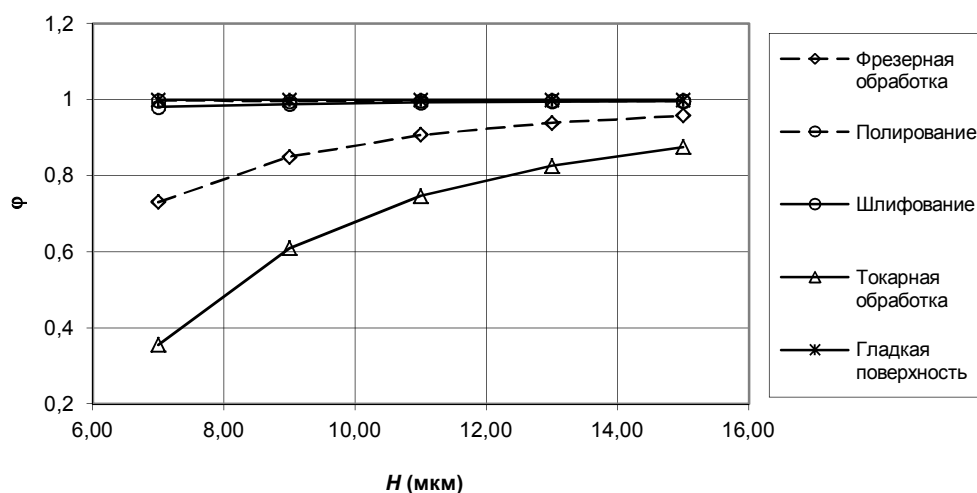


Рисунок 5 – Эволюция коэффициента потока при увеличении среднего зазора

**Выводы.** Предложенная модель может быть использована для прогнозирования течения и теплообмена в потоке сплошной среды в узких двухмерных каналах с шероховатыми стенками. Её использование позволяет подобрать наиболее оптимальные способы и режимы обработки поверхностей стенок каналов еще на этапе проектирования.

Исследования проводились при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания за 2014–2016 г.г., проект 2080.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миносцев, В.Б. Математическое моделирование течения рабочей среды в осесимметричных торцевых уплотнениях с учетом топографии поверхности / В.Б. Миносцев, В.В. Порошин, Д.Ю. Богомолов, В.Ю. Радыгин. // Машиностроение и инженерное образование. – 2007. – № 1(10). – С. 48–52.
2. Порошин, В.В. Численные исследования течения жидкости в герметизируемых соединениях с заданной микропогографией поверхности / В.В. Порошин, Д.Ю. Богомолов, А.А. Сыромятникова // Машиностроение и инженерное образование. – 2010. – № 1. – С. 54–62.
3. Шейпак, А.А. Моделирование течения в подвижных соединениях с шероховатыми стенками на основе вычисления эквивалентного зазора / А.А. Шейпак, В.В. Порошин, Д.Ю. Богомолов, А.А. Сыромятникова // Сборник трудов XV международной научно-технической конференции «Машиностроение и техносфера XXI века». – Севастополь. – 2008. – С. 23–27.
4. Rohsenow, Warren M. Handbook Of Heat Transfer / Warren M. Rohsenow, James R Hartnett, Young I. Cho. // MCGRAW-HILL. – 1998. – 123 p.

**Порошин Валерий Владимирович**

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва.  
Доктор технических наук, ведущий научный сотрудник.  
E-mail: vporoshin@mail.ru

**Богомолов Дмитрий Юрьевич**

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва.  
Кандидат технических наук, доцент.  
E-mail: bogom-ov@mail.ru

V.V. POROSHIN, D.Yu. BOGOMOLOV

## MATHEMATICAL MODELLING OF FLUID HEAT FLUX IN THIN CHANNEL WITH ROUGH WALLS

*The mathematical model of fluid flow and heat flux in thin 2D channel of mechanical systems with moving rough walls in the 2D approach is proposed. The flow factor and Nusselt number comparative analysis for channels with smooth walls and walls having real measured technological surface roughness is described.*

**Keywords:** thin channel, surface roughness, fluid flow, heat flux.

## BIBLIOGRAPHY

1. Minostsev, V.B. Matematicheskoye modelirovaniye techeniya rabochey sredy v osesimmetrichnykh tortsevykh uplotneniyyakh s uchetom topografii poverkhnosti / V.B. Minostsev, V.V. Poroshin, D.YU. Bogomolov, V.YU. Radygin. // Mashinostroyeniye i inzhenernoye obrazovaniye. – 2007. – № 1(10). – S. 48–52.
2. Poroshin, V.V. Chislennyye issledovaniya techeniya zhidkosti v germetiziruyemykh soyedineniyakh s zadannoy mikrotopografiyey poverkhnosti / V.V. Poroshin, D.YU. Bogomolov, A.A. Syromyatnikova // Mashinostroyeniye i inzhenernoye obrazovaniye. – 2010. – № 1. – S. 54–62.
3. Sheypak, A.A. Modelirovaniye techeniya v podvizhnykh soyedineniyakh s sherokhovatyimi stenkami na osnove vychisleniya ekvivalentnogo zazora / A.A. Sheypak, V.V. Poroshin, D.YU. Bogomolov, A.A. Syromyatnikova // Sbornik trudov XV mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Mashinostroyeniye i tekhnosfera XXI veka». – Sevastopol. – 2008. – S. 23–27.
4. Rohsenow, Warren M. Handbook Of Heat Transfer / Warren M. Rohsenow, James R Hartnett, Young I. Cho. // MCGRAW-HILL. – 1998. – 123 p.

**Poroshin Valeriy Vladimirovich**

MAMI Moscow State Technical University (MAMI), Moscow.  
Doctor of Technical Sciences, Senior Researcher.  
E-mail: vporoshin@mail.ru

**Bogomolov Dmitry Yuryevich**

MAMI Moscow State Technical University (MAMI), Moscow.  
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor.  
E-mail: bogom-ov@mail.ru



А.И. БОХОНСКИЙ, Е.С. ЕЛЬКИНА

## МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЕМ НЕЖЕСТКИХ ЗАГОТОВОК ПРИ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ТОКАРНОЙ ОБРАБОТКЕ

*Исследованы модели управления медленными и быстрыми перемещениями (колебаниями) нежестких заготовок при автоматической токарной обработке, предложена САУ деформациями.*

**Ключевые слова:** нежесткая заготовка, медленные и быстрые перемещения, модели управления, деформируемое состояние.

**Введение.** В работах [1–7] отражена история развития теории обработки деталей на металлорежущих станках, указаны пути автоматизации технологических процессов, исследованы сложные физические явления, сопровождающие токарную обработку деталей. Известны методы снижения погрешности размеров и формы обрабатываемых деталей при токарной обработке: автоматическая компенсация погрешности размеров, стабилизация силы резания, управление температурными деформациями и другие.

Среди ряда причин возникновения погрешностей обработки широкого класса нежестких заготовок главной является образование погрешностей формы и размеров деталей в связи с упругими деформациями самой заготовки. Одно из направлений снижения погрешностей нежестких деталей – использование оптимального управления деформированием заготовок в процессе автоматической токарной обработки [8–19].

Практическая реализация управлений деформированием в общем случае связана с разделением движений на медленные и быстрые [18–19].

### **Управление по медленному движению.**

В задачах управления деформированием использовались различные критерии оптимальности (критерии качества): минимум квадрата перемещения заготовки по направлению радиальной составляющей силы резания, обусловленного линейным и угловым перемещением сечения заготовки при ее изгибе и кручении; минимум квадрата общего деформированного состояния заготовки (отклонение от исходного состояния); минимум энергетических затрат на управляемое деформирование. В качестве ограничений выступали условия прочности, жесткости, равенства нулю линейных и угловых перемещений сечения обрабатываемой заготовки с координатой силы резания.

Для описания управляемого деформирования и поиска управлений в виде сосредоточенных сил или пар, комбинаций сил и моментов использовались методы: интегрирование дифференциального управления изогнутой оси, метод начальных параметров, метод Ритца.

Решение задач на условный экстремум деформационного критерия оптимальности сводились к задачам на безусловный экстремум с использованием множителей Лагранжа. В многочисленных экспериментальных исследованиях применялись настраиваемые либо управляемые роликовые опоры или специальные исполнительные устройства для непрерывной передачи управляющего опорного изгибающего момента на обрабатываемую заготовку.

*Целью исследований* является совершенствование моделей управления деформациями нежесткой заготовки с учетом разделения движений на медленные и быстрые. Для описания управляемого деформируемого состояния использовался энергетический метод [20].

Управление по медленному движению иллюстрируется на новом примере с характерным изменением поперечного сечения по длине заготовки. Схема управления деформированием нежесткой заготовки с изменяющимся диаметром поперечного сечения изображена на рисунке 1. На участках I и III диаметры заготовки постоянны, а на участке II диаметр измеряется по линейному закону:

$$d(x) = \frac{d_2 - d_1}{L_2}(x - L_1) + d_1, \quad (1)$$

где  $L_1, L_2$  – длины участков заготовки.

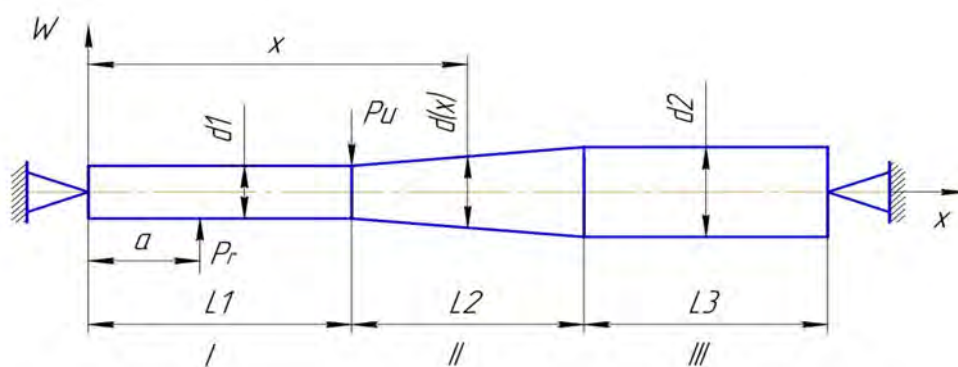


Рисунок 1 – Схема заготовки с тремя участками изменения диаметра

Из зависимости (1) следует: при  $x = L_1$ ,  $d(L_1) = d_1$ , а при  $x = L_1 + L_2$ ,  $d(L_1 + L_2) = d_2$ .

Полная энергия, накапливаемая при управлении деформированием заготовки с использованием сосредоточенной переменной силы, записывается следующим образом:

$$\Theta = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} EI_1 [W''(x)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_1+L_2} EI(x) [W''(x)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} EI(x) [W''(x)]^2 dx - P_r W(a) + P_u W(L_1) = \min, \quad (2)$$

где  $E$  – модуль упругости первого рода;

$I_1, I_2$  – постоянные осевые моменты инерции поперечного сечения заготовки на участках I и III;

$I(x)$  – переменный момент инерции на участке II;

$W''(x)$  – вторая производная от функции прогиба  $W(x)$ ;

$W(a), W(L_1)$  – перемещение заготовки в сечениях с координатами  $x = a$  и  $x = L_1$ ;

$P_r$  – радиальная составляющая силы резания;

$P_u$  – управляющее воздействие в виде сосредоточенной силы, прикладываемой в сечении с координатой  $x = L_1$ .

Моменты инерции поперечных сечений вычисляются по формулам:  $I_1 = \frac{\pi d_1^4}{64}$ ;  $I_2 = \frac{\pi d_2^4}{64}$ ;

$$I(x) = \frac{\pi d^4(x)}{64}.$$

Решение задачи найдено с использованием метода Ритца. Для функции прогиба принят полином:

$$W(x) = \sum_{i=1}^3 b_i x^i, \quad (4)$$

который с учетом условия  $W(L) = 0$ , где  $L = L_1 + L_2 + L_3$ , принимает вид:

$$W(x) = (-b_2 L - b_3 L)x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \quad (5)$$

Коэффициенты  $b_2$  и  $b_3$  определяются после подстановки (5) в (3) с учетом необходимых условий экстремума функции двух переменных:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial b_2} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial b_3} = 0. \quad (6)$$

Применение системы аналитических вычислений позволило выполнить громоздкие преобразования, но задача даже в этом случае остается достаточно трудоемкой. Для иллюстрации алгоритма поиска управления исходная схема упрощена (рисунок 2).

На рисунке 2 изображена схема управления деформированием с двумя участками при  $L_1 = L_2 = L$ ,  $d_2 = 2d_1$ . Полная энергия деформирования заготовки в управляемом состоянии в этом случае записывается так:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \int_0^L EI_1 [W''(x)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_L^{2L} EI(x) [W''(x)]^2 dx - P_r W(a) + P_u W(L) = \min, \quad (7)$$

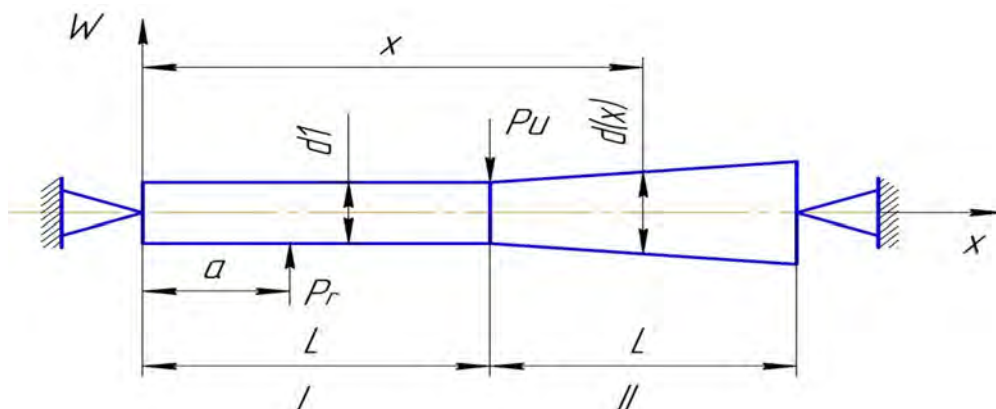


Рисунок 2 – Схема заготовки с двумя участками изменения диаметра

Функция прогиба, как и ранее, принята в виде (4) с последующим преобразованием к виду (5). После вычисления коэффициентов  $b_2$  и  $b_3$  согласно (6) из дополнительного условия  $W(a) = 0$ , играющего роль наиболее простого критерия, найдено выражение для управления:

$$P_u = \frac{2(736L^2 - 802L^2a + 301a^2L - 42a^3)P_r \cdot a}{(519L - 133a)L^3}. \quad (8)$$

Управление (8) для заготовки переменного сечения сравнивалось с управлением в случае заготовки постоянного сечения, у которой общая энергия деформирования равна:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2L} EI_1 [W''(x)]^2 dx - P_r W(a) + P_u^* W(L) = \min.$$

Здесь управление имеет вид:

$$P_u^* = \frac{P_r \cdot a(8L^3 - 8L^2a + 4La^2 - a^3)}{L^4}. \quad (9)$$

Графики управлений  $P_u$  и  $P_u^*$  построены при  $L = 1\text{ м}$ ,  $P_r = 100\text{ Н}$ ; они изображены на рисунке 3.

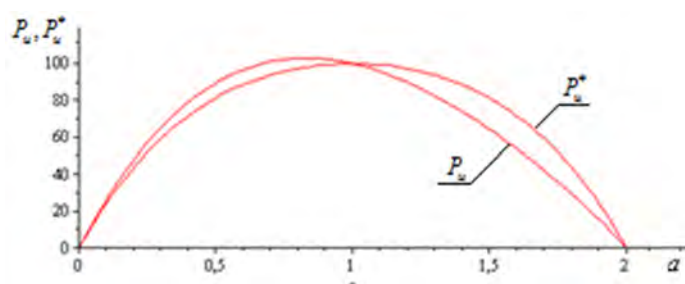


Рисунок 3 – Графики управлений:

$P_u$  – для заготовки переменного поперечного сечения;  $P_u^*$  – для заготовки постоянного поперечного сечения

Из графиков следует, что, без ущерба для деформируемого состояния заготовки переменного сечения, на практике можно использовать управления, найденные для заготовки постоянного сечения.

Метод Ритца при корректном выборе подходящих функций позволяет с высокой точностью находить решения при сложных комбинациях нагружения обрабатываемой нежесткой заготовки управляющими воздействиями в виде сил, моментов и использовании

квадратичных деформационных критериев оптимальности. Квазистатическое положение равновесия изменяется в связи с перемещением силы резания вдоль заготовки.

**Управление деформированием по быстрому движению (колебаниями нежесткой заготовки).**

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний нежесткой заготовки постоянной жесткости с распределенной массой при учете радиальной составляющей силы резания и сосредоточенного компенсирующего воздействия посередине заготовки использовано в виде

$$EI \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} + m_0 \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = P_r(x,t) \cdot \delta(x-a) - F(x,t) \cdot \delta(x-L/2), \quad (10)$$

где  $W(x,t)$  – перемещение произвольного сечения заготовки;

$EI$  – жесткость при изгибе заготовки постоянного сечения;

$m_0$  – распределенная масса;

$\delta(x-a)$  и  $\delta(x-L/2)$  – дельта – функции;

Функция Дирака представлена в виде ряда Фурье по модам колебаний, удовлетворяющим краевым условиям.

Полная динамическая компенсация вынужденных колебаний заготовки достигается, если правая часть уравнения изгибных колебаний (10) равна нулю. При этом непрерывно подавляются вынужденные колебания заготовки, которые обусловлены детерминированной динамической составляющей силы резания.

**Пример САУ для реализации управлений по медленному и быстрому движению.**

Совершенствование системы автоматического управления перемещениями упругих заготовок при токарной обработке основывается на структурной схеме, изображенной на рисунке 4. САУ деформациями продолжает совершенствоваться за счет уточнения характеристик отдельных звеньев.

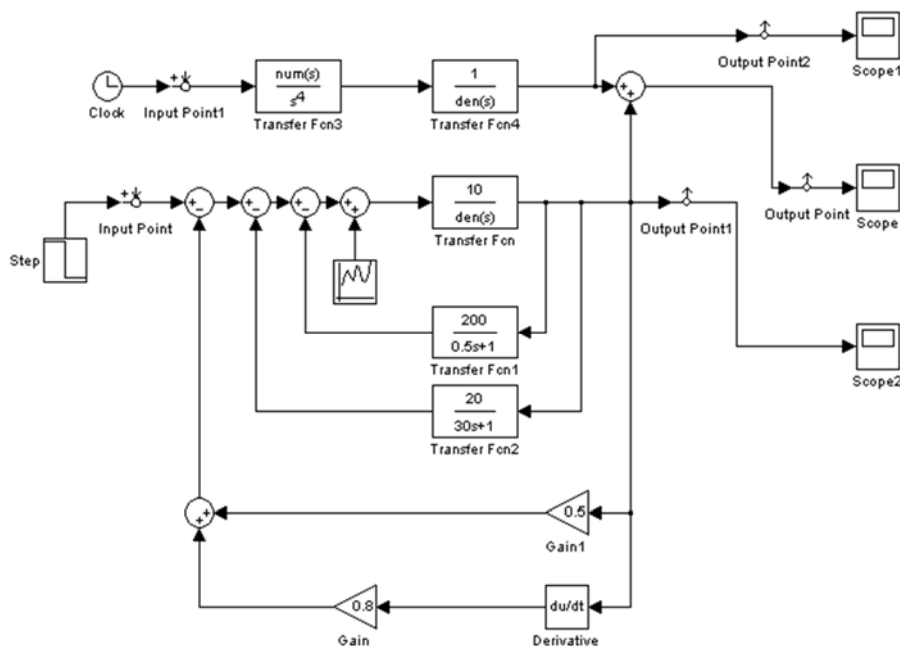


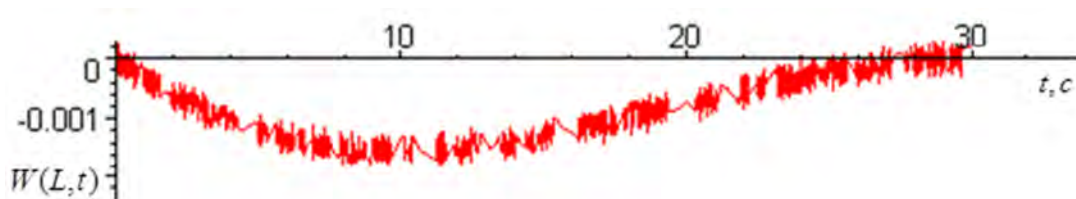
Рисунок 4 – Структурная схема системы управления деформированием заготовки

Управление медленным движением означает непрерывное изменение квазистатического положения равновесия при движении силы резания вдоль заготовки, а управление по быстрому движению – предполагает подавление детерминированных и случайных колебаний, возникающих около квазистатического положения равновесия.

На рисунке 5 показаны колебания среднего сечения заготовки, при котором статическое перемещение с координатой  $a$  отсутствует.

Если управление медленным движением – программное, то для подавления колебаний применим ПИ–регулятор [21], коэффициенты усиления которого находятся в результате

реализации алгоритма аналитического конструирования регулятора при использовании квадратичного критерия качества.



*Рисунок 5 – Перемещение среднего сечения заготовки при управлении деформированием (обработка левой половины заготовки)*

Синтез оптимального регулятора осуществляется с использованием квадратичного критерия в MatLab (функция  $[k, s, e] = \text{lqr}[A, B, Q, R]$ ).

Суммарное управление по медленному и быстрому движению обеспечивает снижение погрешности формы детали и шероховатости ее поверхности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколовский, А.П. Расчет точности обработки на металлорежущих станках / А.П. Соколовский. – Л.: Машгиз, 1952. – 286 с.
2. Подпоркин, В.Г. Обработка нежестких деталей / В.Г. Подпоркин. – М. – Л.: Машгиз, 1959. – 159 с.
3. Корсаков, В.С. Точность механической обработки / В.С. Корсаков. – М.: Машгиз, 1961. – 315 с.
4. Балакшин, Б.С. Адаптивное управление станками / Б.С. Балакшин. – М: Машиностроение, 1973. – 687 с.
5. Маталин, А.А. Точность механической обработки и проектирование технологических процессов / А.А. Маталин. – Л.: Машиностроение, 1970. – 320 с.
6. Базров, Б.М. Адаптивное управление станками / Б.М. Базров. – М.: Знание, 1975. – 59 с.
7. Соломинцев, Ю.М. Адаптивное управление технологическими процессами / Ю.М. Соломинцев, В.Г. Митрофанов. – М.: Машиностроение, 1980. – 536 с.
8. Бохонский, А.И. Оптимальное управление в некоторых задачах механики / А.И. Бохонский. Сборник Сопротивление материалов и теория сооружений. – К: Будівельник, 1982. – № 41. – С. 21–26.
9. Бохонский, А.И. Методические рекомендации для практических занятий по курсу «Сопротивление материалов» на тему: «Управление деформированным состоянием твердых тел» / А.И. Бохонский. – КМУ СПИ, Севастополь, 1983. – 21 с.
10. Бохонский, А.И. Управление перемещением нежестких заготовок с целью повышения точности шлифования / А.И. Бохонский, В.К. Шамлиев // Изв. ВУЗов. «Машиностроение». – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1983. – № 8. – С. 133–136.
11. Бохонский, А.И. Управление перемещениями нежестких заготовок с помощью упругих опор при автоматической токарной обработке / А.И. Бохонский // Изв. ВУЗов. «Машиностроение». – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1985. – № 7. – С. 18–24.
12. Бохонский, А.И. Построение управлений деформациями твердых тел при медленно движущейся внешней нагрузке. / А.И. Бохонский // Изв. ВУЗов. «Машиностроение». – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1989. – № 10. – С. 124–128.
13. Бохонский, А.И. Управление деформированием нежестких деталей при токарной обработке: Монография / А.И. Бохонский, А.Н. Вохмянин. – Севастополь: Изд-во СевГТУ, 1999. – 240 с.
14. Бохонский, А.И. Деформационный критерий качества при автоматической токарной обработке / А.И. Бохонский // Приборостроение. – К. – 1990. – Вып. 42. – С. 77–80.
15. Митрофанов, В.Г. Основы автоматизации машиностроительного производства / В.Г. Митрофанов, Е.Р. Ковальчук, М.Г. Косов. – М.: Высш. шк., 1999. – 312 с.
16. Бохонский, А.И. Управление деформированием нежестких валов с целью снижения погрешностей автоматической токарной обработки. / А.И. Бохонский, А.Н. Вохмянин // Известия вузов «Машиностроение». – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1992. – № 4–6. – С. 129–134.
17. Бохонский, А.И. Управление деформированием нежестких деталей при токарной обработке: Монография / А.И. Бохонский, А.Н. Вохмянин, А.И. Вохмянин. – Севастополь: Издательство СевГТУ, 1999. – 240 с.
18. Бохонский, А.И. Система автоматического управления медленными и быстрыми перемещениями при токарной обработке нежестких заготовок / А.И. Бохонский, Л.А. Шмидт // Машиностроение и техносфера XXI века: Междунар. сб. научных трудов. – Донецк. – 2007. – С. 130 – 133.
19. Бохонский, А.И. Управление деформированием нежестких заготовок при токарной обработке / А.И. Бохонский, Л.А. Шмидт // Прогрессивные технологии и системы машиностроения: Междунар. сб. научных трудов. – Донецк. – 2001. – №16. – С.61–66.
20. Дорф, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.
21. Филин, А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела / А.П. Филин. – М.: Наука, 1975. – Т. 1 – 832 с.

**Бохонский Александр Иванович**  
ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», г. Севастополь  
Доктор технических наук, профессор кафедры технической механики и машиноведения  
E-mail: bohon.alex@mail.ru

**Елькина Елена Сергеевна**  
ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», г. Севастополь  
Аспирант кафедры технической механики и машиноведения  
E-mail: alenenkin@yandex.ru

A.I. BOKHONSKIY, Ye.S. YELKINA

## MODEL OF OPTIMAL CONTROL NON-RIGID DEFORMATION BLANKS WITH AUTOMATIC TURNING

*Control models are investigated by slow and quick travels (swayings) of non-rigid workpieces under the automatic turning, the system of automatic handling by deformations is proposed.*

**Keywords:** non-rigid workpiece; slow and quick swayings; control model; deform state.

### BIBLIOGRAPHY

1. Sokolovskiy, A.P. Raschet tochnosti obrabotki na metallorazhreshchikh stankakh / A.P. Sokolovskiy. – L.: Mashgiz. 1952. – 286 s.
2. Podporkin, V.G. Obrabotka nezhestkikh detalev / V.G. Podporkin. – M. – L.: Mashgiz. 1959. – 159 s.
3. Korsakov, V.S. Tochnost mekhanicheskoy obrabotki / V.S. Korsakov. – M.: Mashgiz. 1961. – 315 s.
4. Balakshin, B.S. Adaptivnoye upravleniye stankami / B.S. Balakshin. – M.: Mashinostroeniye. 1973. – 687 s.
5. Matalin, A.A. Tochnost mekhanicheskoy obrabotki i proyektirovaniye tekhnologicheskikh protsessov / A.A. Matalin. – L.: Mashinostroeniye. 1970. – 320 s.
6. Bazrov, B.M. Adaptivnoye upravleniye stankami / B.M. Bazrov. – M.: Znanie. 1975. – 59 s.
7. Solomintsev, YU.M. Adaptivnoye upravleniye tekhnologicheskimi protsessami / YU.M. Solomintsev, V.G. Mitrofanov. – M.: Mashinostroeniye. 1980. – 536 s.
8. Bokhonskiy, A.I. Optimalnoye upravleniye v nekotorykh zadachakh mekhaniki / A.I. Bokhonskiy. Sbornik Soprotivleniye materialov i teorija sooruzheniy. – K.: Budivelnik. 1982. – № 41. – S. 21–26.
9. Bokhonskiy, A.I. Metodicheskoye rekomendatsii dlya prakticheskikh zanyatiy po kursu «Soprotivleniye materialov» na temu: «Upravleniye deformirovannym sostoyaniyem tverdykh tel» / A.I. Bokhonskiy. – KMU SPI, Sevastopol. 1983. – 21 s.
10. Bokhonskiy, A.I. Upravleniye peremeshcheniyem nezhestkikh zagotovok s tsel'yu povysheniya tochnosti shlifovaniya / A.I. Bokhonskiy, V.K. Shamliyev // Izv. VUZov. «Mashinostroyeniye». – M.: MG TU im. N.E. Bauman. – 1983. – № 8. – S. 133–136.
11. Bokhonskiy, A.I. Upravleniye peremeshcheniyami nezhestkikh zagotovok s pomoshch'yu uprugikh opor pri avtomaticheskoy tokarnoy obrabotke / A.I. Bokhonskiy // Izv. VUZov. «Mashinostroyeniye». – M.: MG TU im. N.E. Bauman. – 1985. – № 7. – S. 18–24.
12. Bokhonskiy, A.I. Postroyeniye upravleniy deformatsiyami tverdykh tel pri medlenno dvizhushcheysya vneshney nagruzke. / A.I. Bokhonskiy // Izv. VUZov. «Mashinostroyeniye». – M.: MG TU im. N.E. Bauman. – 1989. – № 10. – S. 124–128.
13. Bokhonskiy, A.I. Upravleniye deformirovaniyem nezhestkikh detalev pri tokarnoy obrabotke: Monografiya / A.I. Bokhonskiy, A.N. Vokhmvanin. – Sevastopol: Izd-vo SeGTU. 1999. – 240 s.
14. Bokhonskiy, A.I. Deformatsionnyy kriteriy kachestva pri avtomaticheskoy tokarnoy obrabotke / A.I. Bokhonskiy // Priborostroyeniye. – K. – 1990. – Vyd. 42. – S. 77–80.
15. Mitrofanov, V.G. Osnovy avtomatizatsii mashinostroyitel'nogo proizvodstva / V.G. Mitrofanov, Ye.R. Kovalchuk, M.G. Kosov. – M.: Vyssh. shk.. 1999. – 312 s.
16. Bokhonskiy, A.I. Upravleniye deformirovaniyem nezhestkikh valov s tsel'yu snizheniya pogreshnostey avtomaticheskoy tokarnoy obrabotki. / A.I. Bokhonskiy, A.N. Vokhmvanin // Izvestiya vuzov «Mashinostroyeniye». – M.: MG TU im. N.E. Bauman. – 1992. – № 4–6. – S. 129–134.
17. Bokhonskiy, A.I. Upravleniye deformirovaniyem nezhestkikh detalev pri tokarnoy obrabotke: Monografiya / A.I. Bokhonskiy, A.N. Vokhmvanin, A.I. Vokhmvanin. – Sevastopol: Izdatel'stvo SeGTU. 1999. – 240 s.
18. Bokhonskiy, A.I. Sistema avtomaticheskogo upravleniya medlennymi i bystryimi peremeshcheniyami pri tokarnoy obrabotke nezhestkikh zagotovok / A.I. Bokhonskiy, L.A. Shmidt // Mashinostroyeniye i tekhnosfera XXI veka: Mezhdunar. sb. nauchnykh trudov. – Donetsk. – 2007. – S. 130–133.
19. Bokhonskiy, A.I. Upravleniye deformirovaniyem nezhestkikh zagotovok pri tokarnoy obrabotke / A.I. Bokhonskiy, L.A. Shmidt // Progressivnyye tekhnologii i sistemy mashinostroyeniya: Mezhdunar. sb. nauchnykh trudov. – Donetsk. – 2001. – № 16. – S. 61–66.
20. Dorf, R. Sovremennyye sistemy upravleniya / R. Dorf, R. Bishop. – M.: Laboratoriya bazovykh znaniy, 2002. – 832 s.
21. Filin, A.P. Prikladnaya mekhanika tverdogo deformiruyemogo tela / A.P. Filin. – M.: Nauka, 1975. – T. 1 – 832 s.

**Bokhonsky Alexander Ivanovich**  
FGAOU VO «Sevastopol State University», Sevastopol  
Professor of the Department «Technical Mechanics and Machines»  
E-mail: bohon.alex@mail.ru

**Elkina Elena Sergeevna**  
FGAOU VO «Sevastopol State University», Sevastopol  
Aspirant of the Department «Technical Mechanics and Machines»  
E-mail: alenenkin@yandex.ru

# **КОНСТРУИРОВАНИЕ,** **РАСЧЕТЫ, МАТЕРИАЛЫ**

УДК 519.9

А.И. БОХОНСКИЙ, Н.И. ВАРМИНСКАЯ, А.И. РЫЖКОВ

## **КОНСТРУИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДВИЖЕНИЕМ ОБЪЕКТОВ КАК АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ И ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ**

*Предложены и исследованы кососимметричные оптимальные управления перемещением абсолютно твердых и деформируемых объектов. Оптимальность управлений подтверждается существованием минимума реверсионно восстановленного функционала-критерия. Показано, что экстремум функционала может быть выявлен при построении графика зависимости функционала от параметра варьирования функций. Принципиальным отличием решаемых задач является отсутствие заранее задаваемого критерия оптимальности – он появляется в процессе реализации алгоритма поиска управления.*

*Приемлемое время движения упругого объекта выбрано из множества общих корней трансцендентных уравнений, в которые превращаются моментные соотношения для относительного движения упругого объекта. Применение предложенных типов управлений позволяет достичь в конце движения упругого объекта абсолютного покоя, т.е. полностью устранить колебания. Указаны области использования результатов исследований при: оптимальном транспортировании нежестких объектов в автоматизированном производстве, использовании манипуляторов минимальной массы (конечной жесткости), монтаже нежестких крупногабаритных конструкций в космическом пространстве и в других областях техники.*

**Ключевые слова:** переносное и относительное движения, оптимальное управление, уравнение Эйлера, функционал, упругий объект, моментные соотношения.

**Введение.** В [1–5] приведены классические методы теории оптимального управления, примеры синтеза оптимальных управлений и конструирования систем управления с оптимальными регуляторами. В [6] приведены решения актуальных задач оптимального управления объектами современной техники с использованием Matlab и Simulink.

Практические задачи оптимального управления позволяют находить решения альтернативными методами. Для достижения цели движения управления могут быть сконструированы в результате анализа предполагаемого поведения объекта с учетом его свойств. Например, не исключается решение практических задач путем конструирования целенаправленного движения объекта [7–9]. Для подтверждения оптимальности таких управлений привлекалась процедура восстановления функционалов по аналитическим функциям (решение полных обратных задач вариационного исчисления).

Объект участвует в двух движениях: переносном и относительном (колебаниях, вызванных переносным движением). Необходимо исследовать поведение объекта.

Простейший случай. Пусть задана функция  $x(t) = Ce^{-kt}$ , являющаяся решением уравнения  $\ddot{x} + k\dot{x} = 0$ ; для этого уравнения существует функционал  $J = \int_0^T [\dot{x}^2 e^{kt}/2] dt$ , который позволяет оценить диссипацию энергии.

В [7–9] решение полной обратной задачи вариационного исчисления, когда по аналитической функции восстанавливается не только дифференциальное уравнение, но и функционал, названо реверсионным исчислением. На практике возникает необходимость в конструировании управлений, реализующих прежде всего цель движения. Алгоритмы восстановления функционалов в этих работах проиллюстрированы на характерных примерах. Итак, конструируемое движение, создаваемое в соответствии с условиями

достижения цели и предполагаемыми свойствами управления, оптимально в смысле существования реверсионно восстановленного функционала – критерия, принимающего в истинном движении стационарное значение. При таком подходе к решению задач управления интересно найти функционал, который так или иначе существует.

**Цель исследований** – оценка эффективности конструирования управлений движением объектов в соответствии с реверсионным принципом оптимальности (РПО).

Необходимо создать такое переносное ускорение объекта, при котором достигается цель движения объекта и выполняются заданные ограничения.

Известно решение достаточно простой задачи оптимального управления движением объекта как абсолютно твердого тела, приведенное, например, в [3]. Управляемое движение единичной массы (без учета сопротивления) описывается уравнением:

$$\frac{d^2 S_e}{dt^2} = U_e(t), \quad (1)$$

где  $U_e(t)$  – управление (ускорение).

Для квадратичного критерия оптимальности  $J = \int_0^T U_e^2(t) dt$  с учетом условий  $S_e(0) = 0$ ,  $\dot{S}_e(0) = 0$ ;  $S_e(T) = L$ ,  $\dot{S}_e(T) = 0$ ,

где  $T$  – общее время движения, очевидно точное решение уравнения Эйлера  $\frac{d^4 S_e}{dt^4} = 0$ :

$$U_e(t) = \frac{6L}{T^3}(T - 2t), \quad V_e(t) = \frac{6Lt}{T^3}(T - t), \quad S_e(t) = \frac{Lt^2}{T^3}(3T - 2t),$$

где  $L$  – перемещение объекта за время  $T$ .

Критерий  $J$  не является в чистом виде энергетическим, но строгие энергетические критерии приводят к нелинейным уравнениям Эйлера четвертого порядка, которые не имеют точного решения [9].

#### **Процедура конструирования управления переносным движением объекта.**

Для абсолютного движения (рисунок 1) уравнение:

$$\ddot{x} + k^2 x = k^2 S_e(t), \quad (2)$$

где  $x$  – перемещение сосредоточенной массы в абсолютном движении по отношению к неподвижной системе координат  $xOy$ ;

$S_e(t)$  – закон переносного движения.

В относительном движении (по отношению к движущейся поступательно системе координат  $x_r O_r y_r$ ) уравнение движения:

$$\ddot{x}_r + k^2 x_r = -U_e(t), \quad (3)$$

где  $x_r$  – относительное перемещение;

$U_e(t)$  – переносное ускорение.

С учетом условия  $x(t) = S_e(t) + x_r(t)$  или  $\ddot{x}(t) = \ddot{S}_e(t) + \ddot{x}_r(t)$  и вычитая из (2) уравнение (3), получим уравнение, которое описывает только переносное движение:

$$\ddot{S}_e(t) = U_e(t).$$

На простом примере дальше иллюстрируется процедура конструирования управления переносным движением объекта. Пусть управление имеет вид полинома  $U_e(t) = \sum_{i=1}^4 C_i t^{i-1}$ ,

где  $C_i = \text{const}$ .

Для определения констант заданы условия:

$$U_e(0) = a, \quad U_e(T) = -a, \quad \int_0^{T/2} U_e(t) dt + \int_{T/2}^T U_e(t) dt = 0, \quad \dot{U}_e(T/2) = 0,$$



которые по существу отражают свойство косой симметрии конструируемого управления  $U_e(t)$ . Параметр  $a$  определен в результате двукратного интегрирования уравнения (1) с учетом условий:  $S_e(0) = 0$ ,  $\dot{S}_e(0) = V_e(0) = 0$ ,  $S_e(T) = L$ . После преобразований получено:

$$U_e(t) = \frac{a}{T^3}(T-2t)^3, \quad V_e(t) = at - \frac{3at^2}{T} + \frac{4at^3}{T^2} - \frac{2at^4}{T^3},$$

$$S_e(t) = \frac{at^2}{2} - \frac{at^3}{T} + \frac{at^4}{T^2} - \frac{2at^5}{5T^3},$$

где  $a = 10L/T^2$ .

Функция  $U_e(t)$  является решением уравнения Эйлера  $\frac{d^4 U_e(t)}{dt^4} = 0$ , для которого функционал  $J_* = \int_0^T [\ddot{U}_e(t)]^2 dt$ , в данном случае, выступает в роли критерия оптимальности (важен прежде всего как математический образ).

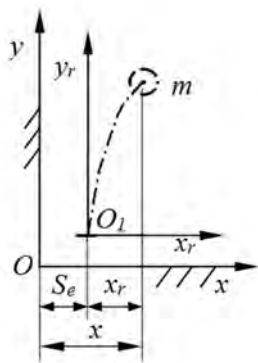


Рисунок 1 – Переносное, относительное и абсолютное движение осциллятора

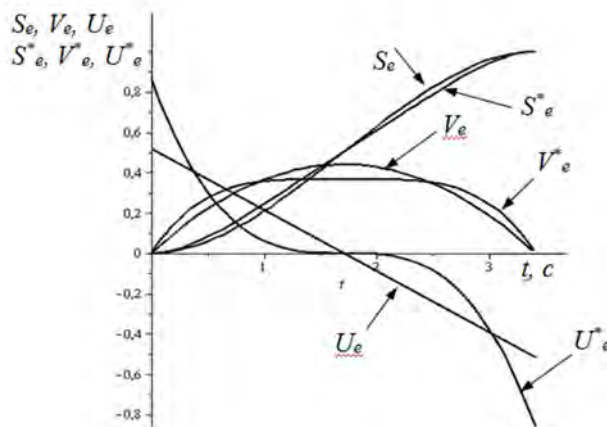


Рисунок 2 – Графики переносного движения объекта

для критериев:  $J = \int_0^T U_e^2(t) dt$ ,  $J_* = \int_0^T [\ddot{U}_e(t)]^2 dt$

При оценке достаточности минимума функционала  $J_*$  вместо допустимых (и удовлетворяющих краевым условиям) функций  $S_e(t)$  в анализе дальше использованы ускорения  $U_e^*(t)$ , которые близки к «скелетной кривой»  $U_e(t)$  и взяты в окрестности  $\varepsilon_1$ :

$$|U_e(t) - U_e^*(t)| \leq \varepsilon_1, \quad \frac{d}{dt}(U_e(t) - U_e^*(b, t)) = 0,$$

где  $b = \text{const}$ .

При этом  $\frac{d^2}{dt^2}(U_e(t) - U_e^*(t)) < 0$ .

В качестве «скелетной кривой», с которой сравнивались варьируемые функции, принята  $U_e(t) = \frac{a}{T^3}(T-2t)^3$ , являющаяся решением уравнения Эйлера, где  $a = 10L/T^2$ .

Графики  $U_e(t)$  и  $U_e^*(t)$  изображены на рисунке 2. Значения параметра  $\delta$  варьирования функций находились как:

$$\delta_i = \int_0^T [S_e(t) - S_e^*(t)] dt.$$

Каждой  $U_e^*(t)$  после интегрирования соответствовала функции  $S_e^*(t)$ . Значения

функционала вычислялись по формуле  $J(\delta_i) = \int_0^T [\ddot{U}_e^i(t)]^2 dt$ . Результаты вычислений приведены в таблице 1.

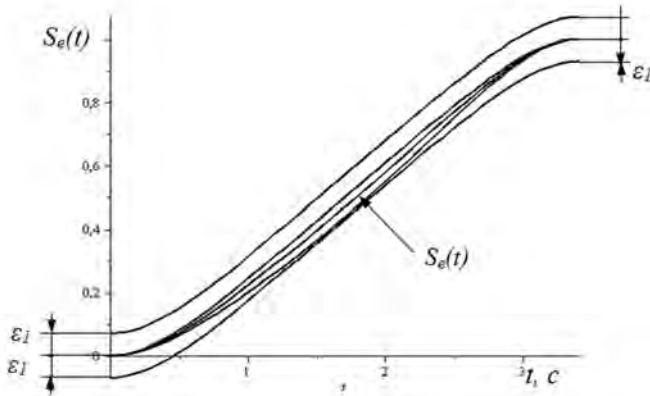


Рисунок 3 – «Скелетная кривая»  $S_e(t)$  и варьируемые кривые в окрестности  $\varepsilon_1$

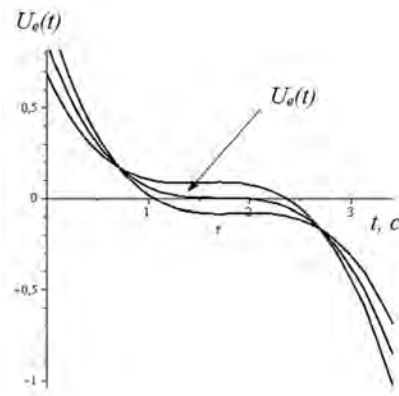


Рисунок 4 – «Скелетная кривая»  $U_e(t)$  и варьируемые в ее окрестности кривые

Таблица 1 – Значения варьируемого параметра  $\delta_i$  и функционала  $J_i(\delta_i)$

$\delta_i$	-0,1137	-0,0568	0	0,0560	0,1137
$J_i(\delta_i)$	3,689	3,604	3,5811	3,608	3,689

Полученная таблично функция  $J_i(\delta_i)$  аппроксимирована по способу наименьших квадратов аналитической функцией:

$$J(\delta) = b\delta^2 + c\delta^4 + J_0, \quad (5)$$

где  $J_0 = 3,5811$ ;  
 $b = 8,3152$ ;  
 $c = -0,000016$ .

Как и следовало ожидать, минимум достигается при  $\delta = 0$ . Функция (5) изображена на рисунке 5.

Совмещенные графики движения для двух типов управлений (при  $L=1$  м) изображены на одном рисунке 2. При таких управлениях (ускорениях) перемещения близки. В таблице 2 приведены результаты вычислений энергетических характеристик найденных управлений.

Отметим, что в данном примере энергетические затраты для достижения цели движения в случае критерия оптимальности  $J_2$  уменьшаются примерно на 30 % (по сравнению с критерием  $J_1$ ).

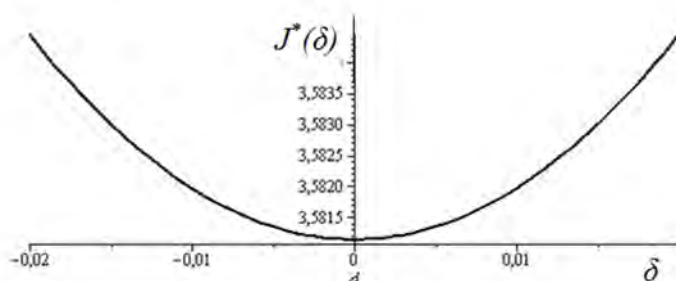


Рисунок 5 – Зависимость реверсионно восстановленного функционала  $J^*(\delta)$  от параметра  $\delta$  вариаций функций

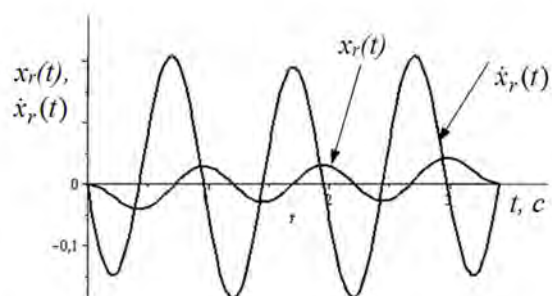


Рисунок 6 – Графики относительного движения  $x_r(t)$ ,  $\dot{x}_r(t)$

### Переносное движение упругого объекта с одной степенью свободы.

Если объект при его быстром перемещении деформируется, то часто необходимо

устранить его колебания к концу движения. Без учета сопротивления дифференциальное уравнение относительного движения (по отношению к осям, движущимся поступательно вместе с упругим объектом) имеет вид:

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + k^2 x_r = -U_e(t),$$

где  $k$  – частота собственных колебаний упругого объекта.

Таблица 2 – Энергетические характеристики управлений

№	Виды энергетических критериев	1-й тип управления (с критерием $J_1 = \int_0^T U_e^2(t) dt$ )	2-й тип управления (с критерием $J_2 = \int_0^T [\ddot{U}_e(t)]^2 dt$ )
1	$A = 2 \int_0^{T/2} (U_e(t) V_e(t)) dt$	0,1935	0,1343
2	$ N  = \int_0^T U_e^2(t) dt$	0,3026	0,3607
3	$I_V = \int_0^{T/2} V_e^2(t) dt$	0,4322	0,3666

Как установлено в [7, 8], общее время движения находится из моментных соотношений, которые означают равенство нулю перемещения и скорости в относительном движении в момент времени  $t = T$  ( $x_r(T) = 0$ ,  $\dot{x}_r(T) = 0$ ).

В случае первого типа управления при  $T/T_1 = n$ ,  $T_1 = 2\pi/k$ , где  $T_1$  – период собственных колебаний упругой системы, моментные соотношения после преобразований принимают вид:

$$\sin(2\pi n) - \cos(2\pi n)\pi n - \pi n = 0, \quad \cos(2\pi n) + \sin(2\pi n)\pi n - 1 = 0. \quad (6)$$

Для второго управления эти соотношения следующие:

$$3 \sin(2\pi n)\pi^2 n^2 - 6 \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n)\pi^3 n^3 + 6 \cos(2\pi n)\pi n - \pi^3 n^3 + 6\pi n = 0, \quad (7)$$

$$3 \cos(2\pi n)\pi^2 n^2 - 6 \cos(2\pi n) + \sin(2\pi n)\pi^3 n^3 - 6 \sin(2\pi n)\pi n - 3\pi^2 n^2 + 6 = 0.$$

Моментные соотношения (6) и (7) имеют соответственно свои общие корни. Если для первого случая управления (при  $T_1 = 1$  с) время движения  $T = 3,47$  с, то для второго управления (здесь, как и ранее  $T_1 = 1$  с) время движения  $T = 3,41$  с.

Графики колебаний упругого объекта ( $x_r(t)$ ,  $\dot{x}_r(t)$ ) в интервале движения ( $T \geq t \geq 0$ , для первого управления) изображены на рисунке 6. В конце движения наступает абсолютный покой ( $\dot{S}_e(T) = 0$ ,  $S_e(T) = L$ ;  $x_r(T) = 0$ ,  $\dot{x}_r(T) = 0$ ).

Сконструированное управление позволяет в связи с существованием множества корней уравнений (6) и (7) выбрать время переносного движения с учетом реальных свойств электроприводов для реализации такого движения.

#### Выводы:

1. Конструирование целенаправленного движения с использованием полинома для перемещения объекта предполагает обоснованный выбор степени полинома, и условий, определяющих цель и характер движения.

Хотя критерий  $J_1 = 2 \int_0^{T/2} (U_e(t) V_e(t))^2 dt$  более естественный по сравнению с нормой мощности  $J_2 = \int_0^T [U_e(t)]^2 dt$ , но уравнение Эйлера нелинейное высокого порядка и не имеет точного решения [9].

Под «кососимметричным» управлением движением объекта на интервале  $T \geq t \geq 0$  подразумевается функция ускорения  $U_e(t)$ , подчиненная условиям:

$$\int_0^{T/2} U_e(t) dt = - \int_{T/2}^T U_e(t) dt, \quad |U_e(0)| = |U_e(T)|.$$

Этой функции  $U_e(t)$  соответствует уравнение  $F_{U_e} - \frac{d}{dt} F_{\dot{U}_e} + \frac{d^2}{dt^2} F_{\ddot{U}_e} + \dots = 0$  для восстановленного функционала – критерия  $\int_0^T F(U_e, \dot{U}_e, \ddot{U}_e, \dots) dt$ , принимающего за приемлемое минимально возможное время  $T$ , определяемое из моментных соотношений в относительном движении упругого объекта, стационарное значение.

Оптимальных управлений в смысле достижения поставленной цели движения фактически существенно больше, чем тех, которые находятся известными методами теории оптимального управления.

Кососимметричные управления (ускорения) обеспечивают перемещение за приемлемое минимальное время упругих объектов в состояние абсолютного либо относительного покоя без использования дополнительных средств подавления колебаний. Конструирование управления состоит в выборе такого  $U_e(t)$ , при котором не только достигается цель движения и моментные соотношения в относительном движении упругого объекта.

## 2. Области возможного использования результатов исследования.

Кососимметричные управления применимы в сборочном производстве: для повышения производительности процесса установки листов ДСП; при укладке листов трансформаторного железа в тару; для устранения колебаний элементов при монтаже печатных плат; при загрузке станка с использованием манипулятора; при установке без колебаний крупногабаритных шпилек (монтаж реакторов АЭС); для автоматизации упаковки бутылок в тару.

Не исключается возможность использования кососимметричных управлений вращением длинных стволов артиллерийских установок, при монтаже нежестких крупногабаритных конструкций в космическом пространстве и управлении вращением космического объекта с солнечными батареями, а также при использовании манипуляторов минимальной массы, для которых характерны рассмотренные управления движением. В литейном производстве оптимальные управления необходимы для устранения расплескивания металла при транспортировании ковша.

Процедура решения полных обратных задач вариационного исчисления («реверсионное исчисление») в обозримом будущем найдет применение в различных областях при моделировании процессов и явлений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Физматиз, 1961. – 392 с.
2. Солодовников, В.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования / В.В. Солодовников, В.Н. Плотников, А.В. Яковлев. – М.: Машиностроение, 1985. – 536 с.
3. Теория автоматического управления / Под ред. А.В. Нетушила. – М.: Высшая школа, 1972. – Т. II. – 432 с.
4. Абдуллаев, Н.Д. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов / Н.Д. Абдуллаев, Ю.П. Петров. – Л.: Энергоатомиздат, 1985. – 240 с.
5. Черноусько, Ф.Л. Управление колебаниями / Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Б.Н. Соколов. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
6. Дорф, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп; Пер. с англ. Б.И. Копылова. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.
7. Бохонский, А.И. Вариационное и реверсионное исчисления в механике / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская; Под общ. ред. А.И. Бохонского. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2012. – 212 с.
8. Бохонский, А.И. Актуальные задачи вариационного исчисления / А.И. Бохонский. – Deutschland: Palmarium Academic Publishing, 2013. – 78 с.
9. Бохонский, А.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, М.И. Мозолевский; Под общ. ред. А.И. Бохонского. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2007. – 296 с.

**Бохонский Александр Иванович**  
ФГАОУ ВО «Севастопольский  
государственный университет»,  
г. Севастополь  
доктор технических наук,  
профессор кафедры технической  
механики и машиноведения  
299053, г. Севастополь,  
ул. Университетская, 33  
Тел.: +78692435161  
E-mail: bohon.alex@mail.ru

**Варминская Наталья Ивановна**  
ФГАОУ ВО «Севастопольский  
государственный университет»,  
г. Севастополь  
кандидат технических наук, доцент  
кафедры технической механики и  
машиноведения  
299053, г. Севастополь,  
ул. Университетская, 33  
Тел.: +78692435161  
E-mail: nvarminska@gmail.com

**Рыжков Александр Игоревич**  
ФГАОУ ВО «Севастопольский  
государственный университет»,  
г. Севастополь  
аспирант кафедры технической  
механики и машиноведения  
299053, г. Севастополь,  
ул. Университетская, 33  
Тел.: +78692435161  
E-mail: vader2206@gmail.com

A.I. BOKHONSKY, N.I. VARMINSKA, A.I. RYZKOV

## **DESIGNING OF MOTIONS OPTIMAL CONTROLS OF OBJECTS AS AN ABSOLUTELY RIGID AND DEFORMABLE BODIES**

*The skew-symmetric motion controls of the absolutely rigid and deformable solids are found and investigated. The control optimality is confirmed by the existence of minimum of the restored functional-criterion. It is shown that the functional extremum can be identified by the relation of the functional on the functions variation parameter. The principal difference of the examined tasks is the absence of the predetermined optimality criterion – it appears in the process of implementing the controls searching algorithm.*

*Acceptable motion time of the elastic object is selected from the set of common roots of transcendental equations, which are converted from the moment ratios for the relative motion of the elastic object. Application of the proposed types of controls allows to achieve absolute quiescence at the end of the motion of the elastic object, thus completely eliminate vibrations. The use of research results is specified in: optimal transportation of non-rigid objects in automated production, the use of manipulators with minimum mass (finite stiffness), the mounting of non-rigid large-scale structures in space and other technology areas.*

**Keywords:** translational and relative motions, optimal control, Euler's equation, functional, elastic object, moment ratios.

## **BIBLIOGRAPHY**

1. Pontryagin, L.S. Matematicheskaya teoriya optimalnykh processov / L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskij, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko. – M.: Fizmatiz, 1961. – 392 s.
2. Solodovnikov, V.V. Osnovy teorii i ehlementy sistem avtomaticheskogo regulirovaniya / V.V. Solodovnikov, V.N. Plotnikov, A.V. Yakovlev. – M.: Mashinostroenie, 1985. – 536 s.
3. Teoriya avtomaticheskogo upravleniya / Pod red. A.V. Netushila. – M.: Vysshaya shkola, 1972. – T. II. – 432 s.
4. Abdullaev, N.D. Teoriya i metody proektirovaniya optimalnykh regulyatorov / N.D. Abdullaev, Yu.P. Petrov. – L.: Ehnergoatomizdat, 1985. – 240 s.
5. Chernousko, F.L. Upravlenie kolebaniyami / F.L. Chernousko, L.D. Akulenko, B.N. Sokolov. – M.: Nauka, 1980. – 384 s.
6. Dorf, R. Sovremennye sistemy upravleniya / R. Dorf, R. Bishop; Per. s angl. B.I. Kopylova. – M.: Laboratoriya bazovykh znaniy, 2002. – 832 s.
7. Bokhonsky, A.I. Variacionnoe i reversionnoe ischisleniya v mekhanike / A.I. Bokhonsky, N.I. Varminska; Pod obshch. red. A.I. Bokhonskogo. – Sevastopol: Izd-vo SevNTU, 2012. – 212 s.
8. Bokhonsky, A.I. Aktualnye zadachi variacionnogo ischisleniya / A.I. Bokhonsky. – Deutschland: Palmarium Academic Publishing, 2013. – 78 p.
9. Bokhonsky, A.I. Optimalnoe upravlenie perenosnym dvizheniem deformiruemykh obektov: teoriya i tekhnicheskie prilozheniya / A.I. Bokhonsky, N.I. Varminska, M.I. Mozolevsky; Pod obshch. red. A.I. Bokhonskogo. – Sevastopol: Izd-vo SevNTU, 2007. – 296 s.

**Bokhonsky Alexander Ivanovich**  
Sevastopol State University,  
Doctor of Techn. Sciences, Professor  
of the Department «Technical  
Mechanics and Science of  
Machines»,  
Sevastopol, Universitetskaya str., 33  
Tel. +78692435161  
E-mail: bohon.alex@mail.ru

**Varminska Natalia Ivanovna**  
Sevastopol State University,  
PhD, Associate Professor of the  
Department «Technical Mechanics  
and Science of Machines»,  
Sevastopol, Universitetskaya str., 33  
Tel. +78692435161  
E-mail: nvarminska@gmail.com

**Ryzkov Alexander Igorevich**  
Sevastopol State University,  
Postgraduate of the Department  
«Technical Mechanics and Science of  
Machines»,  
Sevastopol, Universitetskaya str., 33  
Tel. +78692435161  
E-mail: vader2206@gmail.com

## КОЛИЧЕСТВО КОНТУРОВ И ВЗАИМНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАСПОЛОЖЕНИЯ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ В СУДОВЫХ СИСТЕМАХ ОХЛАЖДЕНИЯ

*Представлены результаты анализа систем охлаждения с центральным теплообменным аппаратом.*

**Ключевые слова:** судовая система охлаждения, центральный теплообменный аппарат, утилизация тепла.

**Введение.** Большую часть теплоты судового оборудования судовых энергетических установок (СЭУ) отводится к забортной воде. Наибольшей простотой и эффективностью эксплуатации отличаются традиционные объединенные системы охлаждения забортной воды (ОСОЗВ), в которых все оборудование на ходу судна охлаждается главным насосом забортной воды (1+резервный), а на стоянке – стояночным (1+резервный) с двумя кингстонными ящиками.

**Постановка цели и задач исследования.** Модернизация может быть направлена на упрощение ОСОЗВ. Предпосылками к дальнейшему объединению являются: рефустановки, системы кондиционирования и рефустановки провизионных камер с автономными насосами, т.к. они работают одновременно с дизель-генераторами (ДГ), обеспечивающими их электроэнергией; опреснительные установки (ОУ) тоже могут быть переведены с автономных насосов на объединенные; конденсаторы утилизационных турбогенераторов (УТГ) работают только на ходу одновременно с главным двигателем (ГД), кроме того можно использовать самопроточную систему не только для конденсаторов УТГ, а при больших расходах забортной воды на ходу можно перевести ее на самопроточное охлаждение водоводяных холодильников (ВВХ) [3].

**Решение задачи.** Схемы включения теплообменных аппаратов (ТОА) в СОЗВ зависят от тепловых потенциалов охлаждаемых сред (температурный напор должен быть минимум 10–12 °С и охлаждаемые жидкости движутся по противотоку к забортной воде) и отличаются большим разнообразием:

- чаще всего в ВОД, СОД и также в МОД В&W – последовательно: холодильники надувочного воздуха (ХНВ), маслоохладители (МО) и ВВХ;
- в МОД В&W – последовательно–параллельно (МО, ХНВ, МО распределителя – параллельно), а далее ВВХ последовательно (рисунок 1, а и 2);
- в МОД «Зульцер» – последовательно–параллельно (МО, ХНВ и холодильникам охлаждения поршней (ХОП) – параллельно), далее ВВХ (рисунок 1, б); или (МО и ХОП последовательно, ХНВ – параллельно к ним, а далее ВВХ последовательно; или (МО, далее включены ХНВ и ХОП параллельно, а за ними последовательно ВВХ);
- в двигателях MAN B&W типа K,L,S,-MS нет системы охлаждения форсунок.

Однако, система охлаждения забортной водой требует к себе гораздо большего внимания по обслуживанию и ремонту, трубопроводов, механизмов и агрегатов (поддержание плотности и чистка ТОА, замена противокоррозийной защиты – цинковых протекторов), морская вода содержит множество микроорганизмов (это приводит к внутреннему обрастанию балярусами, двухстворчатыми малюсками, полихетами, мшанкой, оболочниками, морскими уточками в океане), заносу солями жёсткости при нагреве забортной воды выше 55 °С. Поэтому судовые системы охлаждения забортной воды являются наименее надёжными или требуют для изготовления дорогостоящих красно-медных и медно-никелевых сплавов, так как на стальных оцинкованных трубопроводах через год после начала эксплуатации появляются свищи.

Проектанты СЭУ, по-возможности, стараются сократить протяжённость трубопроводов забортной воды, особенно это относится к многоагрегатным СЭУ с периодическим переключением агрегатов, когда в них не только очень активно обрастают внутренние поверхности системы забортной воды и на седло открытого клапана или клинкета может прирасти балянус или другой малюск и теряется возможность отключить агрегат. Особенно внутреннее обрастание осложняет эксплуатацию систем охлаждения

технических средств освоения шельфа, когда, например, противопожарные цистерны, расположенные на буровой платформе, за 1 год зарастают на 70...80% объёма.

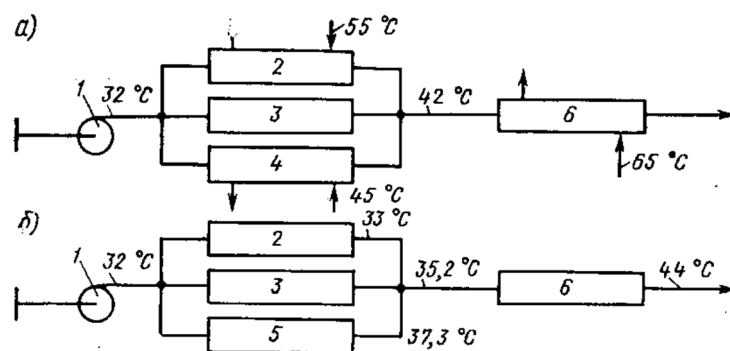


Рисунок 1 – Схема включения теплообменных аппаратов: а – двигатели B&W; б – двигатели Sulzer  
1 – ГНЗВ; 2 – МО ГД; 3 – ХНВ; 4 – МО распределителя; 5 – ХОП; 6 – ВВХ ГД

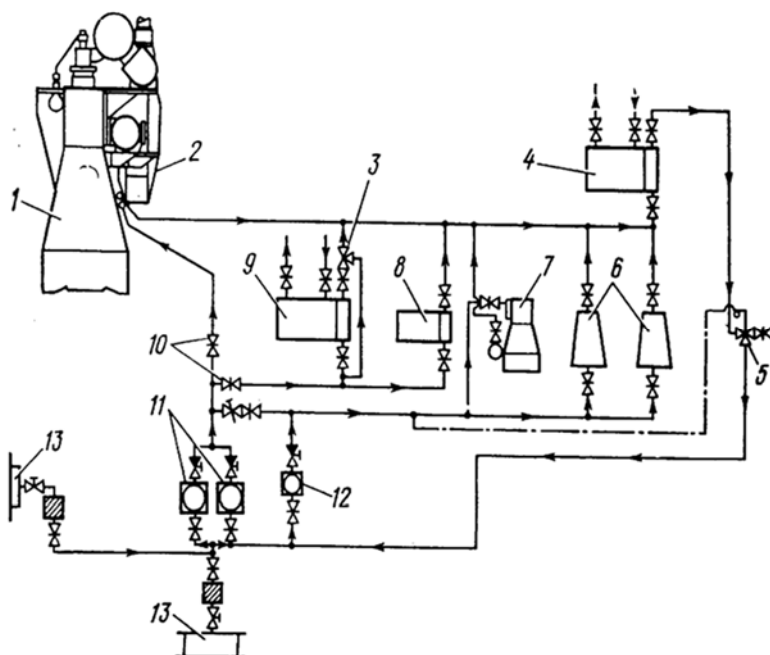


Рисунок 2 – Система охлаждения забортной воды двигателей B&W:

1 – ГД; 2 – ХНВ ГД; 3 – трехходовой термостатический клапан; 4 – ВВХ; 5 – регулятор температуры забортной воды; 6 – воздушные компрессоры; 7 – ДГ; 8 – МО распределительного вала; 9 – МО; 10 – клапаны с градуированной шкалой; 11 – ГНЗВ; 12 – стояночный НЗВ; 13 – кингстон

Поэтому на тяжёлых морских плавкранах сделана попытка вообще исключить систему забортной воды, заменив её передачей теплоты через обшивку судна. На плавкранах «Судоподъём 1 – 2» используется одноконтурная замкнутая система охлаждения (ЗСО), когда пресная вода ДВС охлаждается в днищевых ТОА (ДТОА) (большой температурный напор обеспечивает незначительные размеры этих ДТОА). На плавкране «Слава Севастополя» для охлаждения крановых ДВС мощностью 500 кВт потребовалась площадь ДТОА– 2х100 м<sup>2</sup>, так как использовалась 2-х контурная ЗСО (пресная вода из ДТОА прокачивалась в цистерну, а из неё разбиралась по автономным вторым контурам охлаждаемого оборудования).

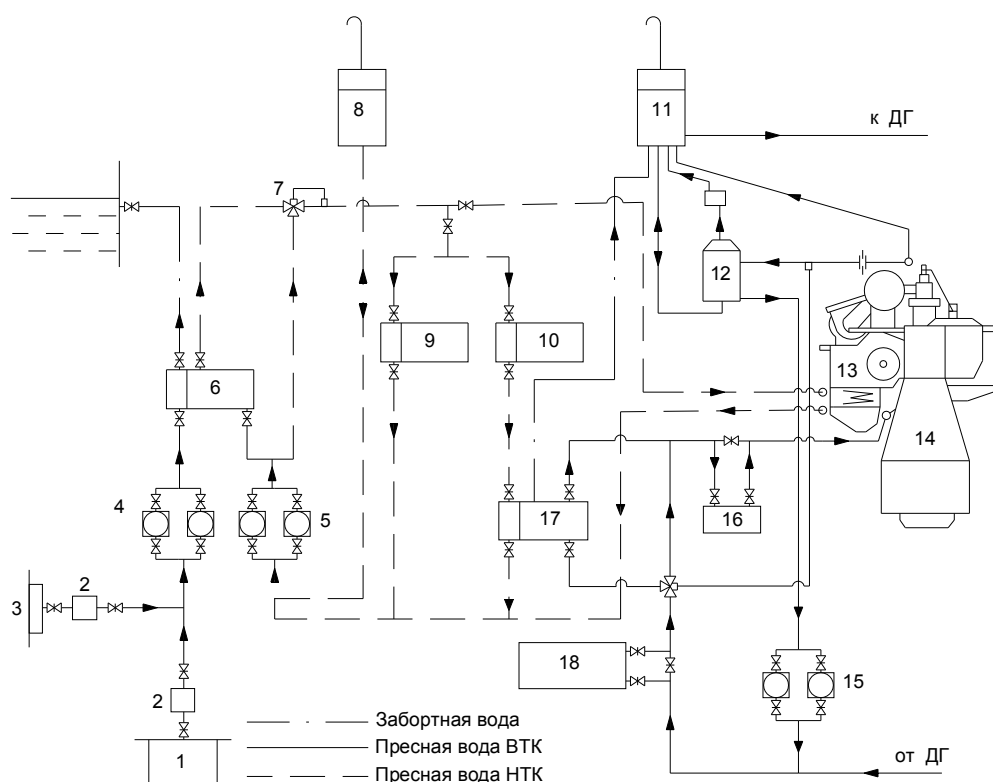
С точки зрения охраны окружающей среды и соблюдения правил Международной Конвенции МАРПОЛ 73/78 по предотвращению загрязнения окружающей среды на море многоконтурная система охлаждения гораздо надежнее в эксплуатации, чем только контур с забортной водой, а расход забортной воды должен быть минимальным, т.е. схема включения ТОА должна быть последовательной. С теоретической точки зрения при этом снизятся температурные напоры и возрастут площади теплообмена и стоимость ТОА и напор

насосов заборной воды (НЗВ), но при меньших расходах мощность НЗВ может не увеличиться. Но, как показали исследования, проведенные В.В. Масловым [2], при параллельном включении ТОА в ОСОЗВ их площади охлаждения и стоимость увеличивается, так как через отдельные ТОА идёт малый расход заборной воды, а при последовательном включении идёт полный поток.

На многих современных судах используют централизованные системы охлаждения (ЦСО) замкнутого второго, а на некоторых судах и третьего контуров с применением центральных теплообменных аппаратов (ЦТОА с пластинами из титана или нержавеющей стали).

Контур пресной воды подразделяются на низко температурный (НТК) и высоко температурный (ВТК), что позволяет в разы увеличить срок безаварийной службы систем охлаждения СЭУ, и обеспечивает существенное сокращение объёма затрат на техническое обслуживание и ремонт коротких, большого диаметра систем заборной воды.

Шведская фирма «Alfa-Laval» разработала ЦСО с пластинчатым ЦТОА. На рисунке 3 изображена двух контурная ЦСО с пластинчатым ЦТОА и показана схема циркуляции пресной воды в двух контурах ЦСО.



**Рисунок 3 – Централизованная система охлаждения дизеля:**

1, 3 – донный и бортовой кингстоны; 2 – фильтры; 4, 5, 15 – насосы; 6 – ЦТОА; 7 – термостат; 8, 11 – напорная и расширительная цистерны; 9, 10, 13 – охладители масла распределителя, дизеля, наддувочного воздуха; 12 – цистерна деаэрации; 14 – ГД; 16 – подогреватель; 17 – холодильник пресной воды; 18 – опреснительная установка

Для полупогружной буровой установки «Шельф» и некоторых проектов самоподъёмных буровых платформ ЦКБ «Коралл» разработало трёхконтурные системы охлаждения, в которых короткая система охлаждения заборной воды большого диаметра расположена в понтонах (состоит из приёмного и отливного трубопровода большого диаметра, арматуры, НЗВ и кожухотрубных ЦТОА); на платформу вместо заборной воды подаётся пресная вода второго контура, а на каждом агрегате сохранены ТОА автономных третьих контуров пресной воды. Разумеется, в ТОА каждого контура должен быть температурный напор, а максимальная начальная температура заборной воды для стран СНГ принимается до 32 °С [6]. Поэтому, чтобы использовать серийные ТОА для ППБУ «Шельф» был использован глубинный забор заборной воды из термостабильных слоёв моря, в которых круглогодично сохраняется температура 7...10 °С.



ЦСО способна собирать все потоки ВЭР оборудования СЭУ (рисунок 3), в зависимости от потенциала и использовать для последующей утилизации.

В ЦСО возможны различные варианты включения ЦТОА: а) единого ЦТОА, б) ЦТОА ВТК охлаждается нагретой заборной водой после ЦТОА НТК (эта схема не обеспечивает утилизацию теплоты НТК и увеличивает длину контура заборной воды – снижая её надёжность), в) с охлаждением ЦТОА ВТК полным потоком нагретой пресной воды НТК (третий контур) – повышает надёжность ЗСО за счёт ЦТОА ВТК пресной воды, г) с охлаждением ЦТОА ВТК частичным потоком нагретой пресной воды НТК (третий контур позволяет поднять потенциал ВТК и эффективность утилизации). Поэтому ЦСО является интегратором потоков ВЭР [5]. Учитывая тепловые балансы ВЭР современных высокоэкономичных ДВС с высокой степенью сжатия циклового воздуха холодильника надувочного воздуха (ХНВ) следует разделить на высокотемпературную секцию и включить её после охлаждения ДГ в ВТК, а низкотемпературную оставить в НТК; с целью повышения потенциала ВЭР все потоки теплоты ВЭР следует ранжировать по потенциалу теплоты последовательно.

Каждый контур СО отличается:– величиной охлаждения жидкости  $\Delta t_{ij}=t_2^i-t_1^i$  (пресная вода);

- величиной подогрева жидкости  $j \quad \Delta t_{ij}=t_2^j-t_1^j$  (заборная вода);
- температурным напором  $\Delta t_{ij}^{\max}=t_1^i-t_1^j$ ;
- глубиной охлаждения  $\Delta t_{ij}=t_2^i-t_1^j$ .

По физическим свойствам жидкостей существуют ограничения:

по заборной воде:

- минимальная начальная температура  $t_1^j \geq 3^\circ\text{C}$  (замерзание);
- максимальная начальная температура  $t_1^j \leq 32^\circ\text{C}$  [7];
- максимальная температура нагрева  $t_2^j \leq 55^\circ\text{C}$  (угроза выпадение солей жёсткости);

по пресной воде:

- при использовании в контуре расширительного бачка –  $t_1^{\max} < 100^\circ\text{C}$ ;
- при высокотемпературном охлаждении –  $t_1^{\max} < t_s$  (температуры насыщения при давлении в контуре).

Каждый контур требует в ЦТОА температурный напор. Именно поэтому в трехконтурной ЦСО ППБУ “Шельф” потребовался глубинный прием заборной воды.

Пластинчатые ТОА требуют гораздо меньшие температурные напоры, чем кожухотрубные ТОА. Известно, что охлаждение в пластинчатом ТОА при противотоке снижает температуру охлаждаемой жидкости на 1–2°C выше чем начальная температура охлаждающей жидкости.

Из теории надёжности известно, что надёжность ЦСО равна произведению вероятностей безотказной работы каждого контура.

Как известно [7], увеличение надёжности элементов ЦСО и кратности резервирования увеличивают вероятность безотказной работы ЭУ.

$$P_{\text{ЭУ}}(t)=[1-((1-P_1(t))^m/n_p!)^{n_p}], \quad (1)$$

где  $P_1(t)$  – вероятность безотказной работы элемента;

$m$  – общее число работающих параллельно элементов  $(1+n_{\text{рез}})$ ;

$n_p$  – число последовательно включенных элементов ЭУ.

**Выводы.** В ЗСО резко увеличивается  $P_{\text{созв}}(t)$ , подавляющая часть ТОА в НТК включена параллельно и только для увеличения эффективности утилизации теплоты ТОА ВТК включены последовательно (по мере роста потенциала охлаждающей среды), поэтому при эксплуатации ЗСО отмечается увеличение  $P_{\text{зсо}}$ .

В мощных МОД для уменьшения стоимости и сохранения ресурса ВВХ их разбивают на 2 ТОА (50%+50% или 30%+70%) и включают параллельно, что также увеличивает надёжность системы за счёт резервирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Камкин, С.В. Эксплуатация судовых дизельных энергетических установок: Учебник для вузов / С.В. Камкин, И.В. Возницкий, В.Ф. Большаков и др. – М.: Транспорт, 1996. – 432 с.
2. Маслов, В.В. Судовые системы малооборотных дизелей / В.В. Маслов. – Л.: Судостроение, 1968. – 334 с.
3. Маслов, В.В. Совершенствование эксплуатации систем судовых дизелей (Библиотека судомеханика) / В.В. Маслов. – М.: Транспорт, 1984. – 253 с.

4. Овсянников, М.К. Судовые дизельные установки: справочник / М.К. Овсянников, В.А. Петухов. – Л.: Судостроение, 1986. – 424 с.
5. Литошенко, В.Н. Системы охлаждения с центральным теплообменным аппаратом как интегратором потоков теплоты судового оборудования для последующей её утилизации / В.Н. Литошенко, В.А. Долгов. Материалы V Всеукраинской СНТК «Совершенствование проектирования и эксплуатации морских судов и сооружений», 1–4 декабря 2010 г. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2010. – 3 с.
6. ОСТ 5.5056–81 – Системы корабельные – расчётные параметры воздуха и забортной воды. – М.: Машиностроение, 1981. – 3 с.
7. Решетов, Д.Н. Надёжность машин. / Д.Н. Решетов, А.С. Иванов, В.З. Фадеев. – М.: Высшая школа, 1988. – 238 с.
8. Литошенко, В.Н. Проектирование и модернизация судовых энергетических установок: учебное пособие с грифом Министерства образования и науки Украины / В.Н. Литошенко. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2012. – 172 с.
9. Литошенко, В.Н. Совмещение характеристик судовой системы охлаждения с центральным теплообменным аппаратом с теплоутилизационным контуром вторичной теплоты энергетического оборудования / В.Н. Литошенко, А.Р. Аблаев, В.А. Долгов // ВІСНИК СевНТУ, випуск 132/2012, збірник наукових праць, Серія Механіка, енергетика, екологія. – Севастополь, Изд-во СевНТУ. – 2012. – С. 111–114.

**Аблаев Алим Рустемович**  
 ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», г. Севастополь  
 кандидат технических наук, доцент кафедры  
 энергоустановок морских судов и сооружений  
 299053, г. Севастополь, ул. Университетская, 33  
 Тел.: +79788100564  
 E-mail: alim\_ablaev@mail.ru

**Аблаев Ремзи Рустемович**  
 ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», г. Севастополь  
 старший преподаватель кафедры экономики  
 предприятий  
 299053, г. Севастополь, ул. Университетская, 33  
 Тел.: +79788019141  
 E-mail: ablaev.expert@mail.ru

A.R. ABLAEV, R.R. ABLAEV

## NUMBER OF CIRCUITS AND MUTUALLY SEQUENTIALLY ARRANGED HEAT EXCHANGERS IN THE SHIPS COOLING SYSTEM

*The results of the analysis of the cooling systems with a central heat exchanger.*

**Keywords:** ship cooling system, central heat exchanger, heat recovery.

### BIBLIOGRAPHY

1. Kamkin, S.V. Ekspluatatsiya sudovykh dizelnykh energeticheskikh ustanovok: Uchebnik dlya vuzov / S.V. Kamkin, I.V. Voznitskiy, V.F. Bolshakov i dr. – М.: Transport. 1996. – 432 с.
2. Maslov, V.V. Sudovyie sistemy malooborotnykh dizelev / V.V. Maslov. – Л.: Sudostroyeniye, 1968. – 334 с.
3. Maslov, V.V. Sovershenstvovaniye ekspluatatsii sistem sudovykh dizelev (Biblioteka sudomekhanika) / V.V. Maslov. – М.: Transport. 1984. – 253 с.
4. Ovsyannikov, M.K. Sudovyie dizelnyie ustanovki: spravochnik / M.K. Ovsyannikov, V.A. Petukhov. – Л.: Sudostroyeniye, 1986. – 424 с.
5. Litoshenko, V.N. Sistemy okhlazhdeniya s tsentralnym teploobmennym apparatom kak integratorom potokov teploty sudovogo oborudovaniya dlya posleduyushchey veyo utilizatsii / V.N. Litoshenko, V.A. Dolgov. Materialy V Vseukrainskov SNTK «Sovershenstvovaniye provektirovaniya i ekspluatatsii morskikh sudov i sooruzheniy», 1–4 dekabrya 2010 g. – Sevastopol: Izd-vo SevNTU, 2010. – 3 s.
6. OST 5.5056–81 – Sistemy korabelnyie – raschotnyie parametry vozdukha i zabortnoy vody. – М.: Mashinostroyeniye, 1981. – 3 с.
7. Reshetov, D.N. Nadezhnost mashin. / D.N. Reshetov, A.S. Ivanov, V.Z. Fadeyev. – М.: Vysshaya shkola, 1988. – 238 с.
8. Litoshenko, V.N. Provektirovaniye i modernizatsiya sudovykh energeticheskikh ustanovok: uchebnove posobiye s grifom Ministerstva obrazovaniya i nauki Ukrainy / V.N. Litoshenko. – Sevastopol: Izd-vo SevNTU, 2012. – 172 s.
9. Litoshenko, V.N. Sovmeshcheniye kharakteristik sudovoy sistemv okhlazhdeniya s tsentralnym teploobmennym apparatom s teploutilizatsionnym konturom vtorichnoy teploty energeticheskogo oborudovaniya / V.N. Litoshenko, A.R. Ablayev, V.A. Dolgov // VІSNIK SevNTU, vipusk 132/2012, zbіrnik naukovikh prats, Seriya Mekhanika, yenergetika, ekologiya. – Sevastopol, Izd-vo SevNTU. – 2012. – S. 111–114.

**Ablaev Alim Rustemovich**  
 Sevastopol State University,  
 Ph.D., Associate Professor of the Department «Ship power  
 plants and structures»,  
 Sevastopol, Universitetskaya, 33  
 Tel. +79788100564  
 E-mail: alim\_ablaev@mail.ru

**Ablaev Remzi Rustemovich**  
 Sevastopol State University,  
 senior lecturer of the Department «Business  
 economics»,  
 Sevastopol, Universitetskaya, 33  
 Tel. +79788019141  
 E-mail: ablaev.expert@mail.ru

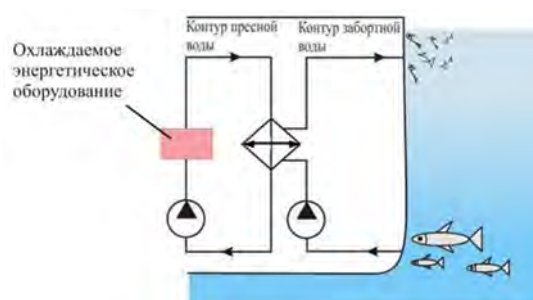
К.Ю. ФЕДОРОВСКИЙ, Н.К. ФЕДОРОВСКАЯ, В.А. ТИМОФЕЕВ

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ЭКОЛОГИЧЕСКИ БЕЗОПАСНЫХ СИСТЕМАХ ОХЛАЖДЕНИЯ ЭНЕРГОУСТАНОВОК МОРСКИХ ОБЪЕКТОВ

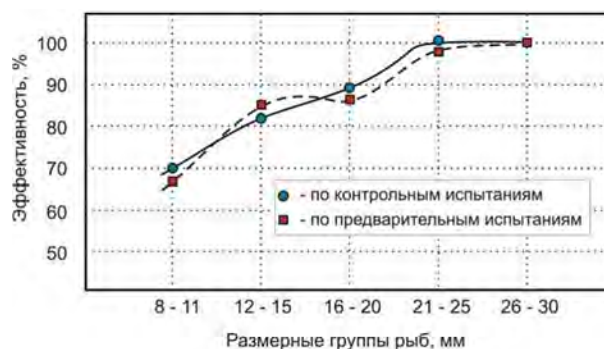
*Представлены результаты экспериментальных исследований процессов теплопередачи в экологически безопасных замкнутых системах охлаждения, исключающих прием морской воды. Получены уравнения подобия, описывающие теплоотдачу в общивочном теплообменном аппарате, обеспечивающем теплоотвод системы охлаждения в морскую воду.*

**Ключевые слова:** экологический ущерб, энергоустановка, система охлаждения, теплоотдача, теплообменный аппарат.

**Введение.** В настоящее время происходит интенсивный рост морских перевозок и освоение ресурсов морского шельфа. С этой целью используются разнообразные морские объекты (суда, морские платформы и т.д.), имеющие энергетические установки. Такие установки требуют отвода теплоты, что обеспечивается системой охлаждения [1, 2]. В настоящее время наибольшее распространение получили разомкнутые системы охлаждения, предусматривающие потребление заборной морской воды (рисунок 1). Для некоторых объектов, например ледостойкая платформа ЛСП–1, потребление воды может достигать тысяч кубометров в час.



**Рисунок 1** – Принципиальная схема разомкнутой двухконтурной системы охлаждения энергетического оборудования



**Рисунок 2** – Эффективность сетчатых рыбозащитных устройств [6] в зависимости от размера рыб

К сожалению, разомкнутые системы охлаждения наносят существенный ущерб рыбным запасам морей. На входе в систему устанавливают сетчатые фильтры, размеры отверстий в которых колеблются обычно пределах от 1 до 4,5 мм. В морской воде содержится планктон, размеры которого измеряется микронами и более [3]. Следует отметить, что планктон является основой пищевой цепочки морей и океанов. Большинство рыбных икринок имеют размер 1...2 мм. Поэтому более мелкие планктон, икринки и рыбная молодь, попадая в систему охлаждения и пройдя через фильтр, арматуру, насосы и теплообменники практически полностью погибают [4, 5]. Сетчатые фильтры оказываются также малоэффективными и для рыб большего размера (рисунок 2) [6–8].

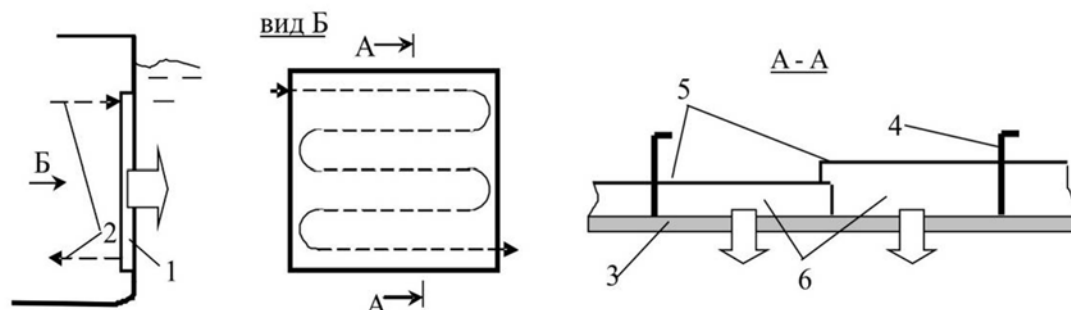
По оценкам специалистов ФГБУН «Институт морских биологических исследований им. А.О. Ковалевского» РАН морская буровая платформа проекта 10170 с суммарной мощностью энергоустановки 5000 кВт, потребляющая 400...800 м<sup>3</sup>/час охлаждающей морской воды уничтожает примерно 200 т промысловых видов рыб за год.

Разомкнутые системы охлаждения характеризуются низкой надежностью эксплуатации при нахождении судна в загрязненной морской акватории. При этом система загрязняется механическими примесями, что приводит к нарушению циркуляции охлаждающей воды и необходимости остановки энергоустановки.

Указанных недостатков лишены замкнутые системы охлаждения, исключающие необходимость приема морской воды [9, 10]. Такие системы позволяют так же повысить

энергоэффективность [1] судов и других морских объектов, что в настоящее время является весьма актуальным в свете решений Международной морской организации.

Теплоотвод от циркулирующей по замкнутому контуру охлаждаемой пресной воды осуществляется в обшивочном теплообменном аппарате (ОТОА), схема которого показана на рисунке 3. Аппарат 1 обычно выполняется на внутренней стороне судовой обшивки 3 и представляет собой лабиринтный канал, образованный элементами набора 4 корпуса судна и дополнительно наваренными листами 5. Как правило, зазор в канале 6 составляет 12...30 мм.



**Рисунок 3 – Схема размещения ОТОА на судне:**

1 – ОТОА; 2 – подвод и отвод охлаждаемого теплоносителя; 3 – обшивка корпуса судна; 4 – элементы набора корпуса; 5 – дополнительные листы; 6 – канал прохода охлаждаемого теплоносителя

Лабиринтный характер течения охлаждаемой воды вдоль судовой обшивки создает специфические граничные условия на внутренней и наружной поверхностях обшивки. Это не может не сказаться на количественных характеристиках процессов теплоотдачи. В силу указанных причин требуется проведение специальных исследований для определения зависимостей для разработки методики расчета ОТОА. При этом следует иметь в виду, что при нахождении неподвижного судна в неподвижной морской воде теплоотдача от обшивки корпуса осуществляется при свободной конвекции. По сравнению со случаем движения судна, когда теплоотдача осуществляется при вынужденной конвекции, указанная теплоотдача существенно ниже. Таким образом, нахождение судна в неподвижной относительно судна воде является наихудшим случаем и потому рассматривается в качестве основного расчетного.

**Цель исследования** – определение особенностей происходящих процессов в ОТОА замкнутых систем охлаждения и зависимостей, описывающих теплопередачу в данном типе теплообменников в наихудших условиях работы, связанных с нахождением судна в неподвижной воде.

**Задачи исследования.** Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Определение особенностей происходящих процессов;
2. Проведение экспериментальных исследований процессов теплопередачи;
3. Анализ и обобщающая обработка полученных экспериментальных данных.

**Объект исследования** – процессы переноса замкнутой системой охлаждения теплоты, отводимой от судовой энергетической установки.

**Экспериментальное исследование.** Для проведения экспериментальных исследований были созданы модели ОТОА, обеспечивающие визуальные и теплотехнические исследования.

В случае проведения визуальных исследований соответствующие стенки ОТОА были выполнены прозрачными. Для визуализации течения охлаждаемой воды в лабиринтном канале, в неё добавлялись детергент, серебрин и тушь.

Теплотехнические исследования проводились на экспериментальной модели ОТОА, показанной на рисунке 4. Вдоль теплопередающей стенки 1 по лабиринтному каналу 3 обеспечивалось движение охлаждаемой воды. Размеры теплопередающей стенки составляли 1х1 м., а её толщина – 10 мм. Тыльная стенка канала 3 была тщательно теплоизолирована толстым слоем резины 6. Через патрубки 11 осуществлялся подвод и отвод охлаждаемой воды. В ходе экспериментов изменялись температура пресной воды  $t_{ж}$  в пределах от 25° до 100 °С и скорость воды  $v$  в лабиринтном канале в пределах 0,2...2,9 м/с. На внутренней и наружной поверхностях теплопередающей стенки было закреплено по 16 термопар, с помощью которых определялась температура поверхностей..

Вся конструкция размещалась в бассейне с неподвижной морской водой. Была предусмотрена возможность изменения ориентации теплопередающей поверхности от вертикального (угол наклона  $\varphi = 0$ ) до горизонтального (теплоотдача вниз  $\varphi = -90^\circ$ ) положения.

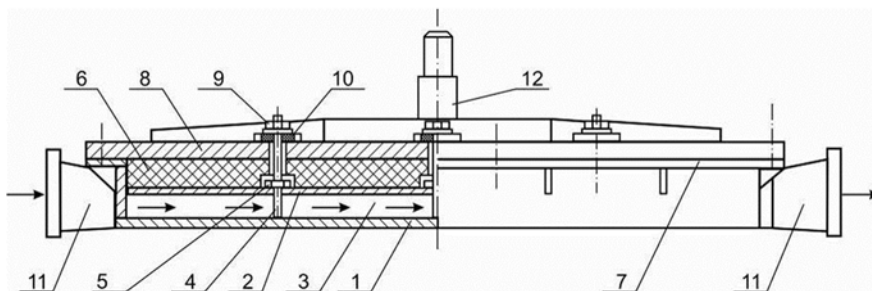


Рисунок 4 – Общий вид экспериментальной модели ОТОА (наружная теплоизоляция не показана):

1 – теплопередающая стенка; 2 – вставка с направляющими; 3 – лабиринтный канал прохода пресной воды; 4 – шпилька стяжная; 5 – гайка; 6 – резина; 7 – фланец; 8 – крышка аппарата; 9 – гайка; 10 – уплотняющая резиновая прокладка; 11 – патрубок

Визуальные исследования выявили достаточно интенсивную периодическую турбулизацию потока охлаждаемой воды на поворотах лабиринтного канала (рисунок 5). Интенсивность этого процесса возрастала с увеличением скорости движения воды. Такая картина течения формирует на поверхности участки с различной плотностью теплового потока и температурой.

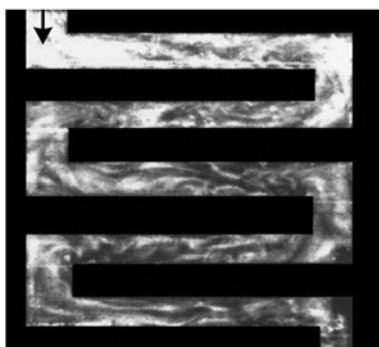


Рисунок 5 – Визуализация течения жидкости в лабиринтном канале ОТОА

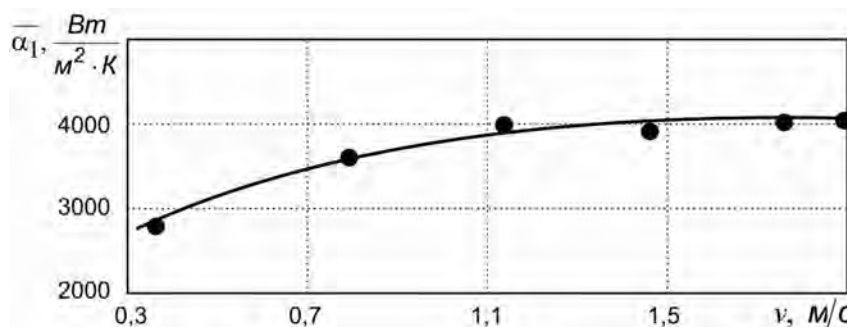


Рисунок 6 – Зависимость коэффициента теплоотдачи  $\alpha_1$  от скорости движения пресной воды в лабиринтном канале  $v$

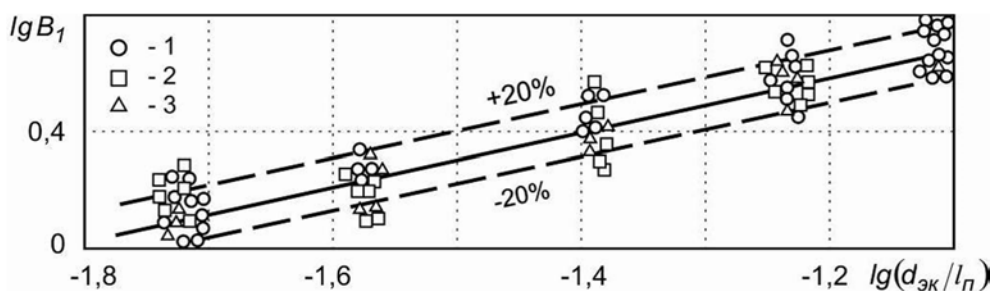


Рисунок 7 – Зависимость  $lg B_1$  от  $lg(d_{эк}/l_n)$ :

1 –  $t_{\text{ae}} = 80^\circ\text{C}$ ; 2 –  $46^\circ\text{C}$ ; 3 –  $60^\circ\text{C}$

На рисунке 6 показана зависимость коэффициента теплоотдачи  $\alpha_1$  в лабиринтном канале от скорости  $v$  воды.

Обобщающая обработка многочисленных экспериментальных данных представлена на рисунке 7. При этом под величиной  $B_1$  понимается следующее:

$$B_1 = \frac{\overline{Nu}_1}{Re^{0,4} Pr_{\text{ae}}^{0,4} (Pr_{\text{ae}} / Pr_{\text{cl}})^{0,25} (t_{\text{ae}} / t_{\text{cl}})^{-3,0}}$$

Уравнение подобия, соответствующее данной обработке, имеет вид:

$$\overline{Nu}_1 = 46 Re^{0,4} Pr_{\text{ж}}^{0,4} \left( \frac{Pr_{\text{ж}}}{Pr_{\text{ст}}} \right)^{0,25} \left( \frac{d_{\text{эк}}}{l_{\text{п}}} \right)^{0,9} \left( \frac{t_{\text{ж}}}{t_{\text{ст}}} \right)^{-3,0}, \quad (1)$$

где:  $Nu$  – число Нуссельта;  
 $Re$  – число Рейнольдса;  
 $Pr$  – число Прандтля;  
 $d_{\text{эк}}$  – эквивалентный диаметр канала;  
 $l_{\text{п}}$  – длина прямого участка канала.

Индексы: ж – жидкость, ст – стенка.

Зависимость справедлива при  $8000 < Re < 330000$ ;  $2,1 < Pr_{\text{ж}} < 3,9$ ;  $1,9 \cdot 10^{-2} < d_{\text{эк}}/l_{\text{п}} < 7,8 \cdot 10^{-2}$ ;  $0,8 < Pr_{\text{ж}}/Pr_{\text{ст}} < 0,94$ ;  $1,0 < t_{\text{ж}}/t_{\text{ст}} < 1,2$ .

Ранее отмечалось, что теплоотдача неподвижной забортной морской воде осуществляется при свободной конвекции. Одним из факторов, определяющих протекание процесса является ориентация поверхности. На рисунке 8 показана визуализация пристенного течения жидкости при вертикальном расположении поверхности ( $\varphi=0$ ), что соответствует вертикальному борту судна. Наглядно видно, что увеличение температурного напора  $\Delta t$  между поверхностью и морской водой интенсифицирует течение жидкости.

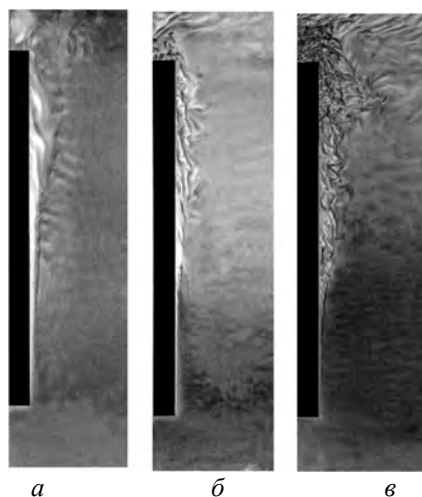


Рисунок 8 – Визуализация течения жидкости вдоль одиночной вертикальной теплоотдающей поверхности при различных температурных напорах  $\Delta t$ :  
 а –  $\Delta t = 5$  °C; б –  $\Delta t = 15$  °C; в –  $\Delta t = 25$  °C

В случае, когда теплоотдающая поверхность ориентирована вниз ( $\varphi = -90^\circ$ ), что соответствует горизонтальному днищу судна, картина течения меняется. Схематично она представлена на рисунке 9, а. Холодная морская вода подтекает с боков, движется в середину, поднимается к поверхности и уходит вдоль неё наружу. Визуализация такого процесса была выполнена авторами на воздухе с использованием прибора Теплера. Исследования проводились на модели ОТОА с размером поверхности 0,6х0,2 м. Наглядно видно, что сформированный прогретого слой воздуха (рисунок 9, б) соответствует представленной на рисунке 9, а схеме процесса.

Как показали визуальные исследования, интенсивность процесса в значительной степени определяется температурным напором  $\Delta t$  между температурой стенки  $t_{\text{ст}2}$  и температурой морской воды  $t_3$ .



Рисунок 9 – Схема течения воды вдоль горизонтальной теплоотдающей поверхности а и визуализация прогретого слоя б

На рисунке 10 показана соответствующая зависимость для коэффициента теплоотдачи заборной воде  $\alpha_1$ . При этом скорость охлаждаемой пресной воды в лабиринтном канале менялась в пределах 0,3...1,9 м/с. Влияние данного фактора не обнаруживается.

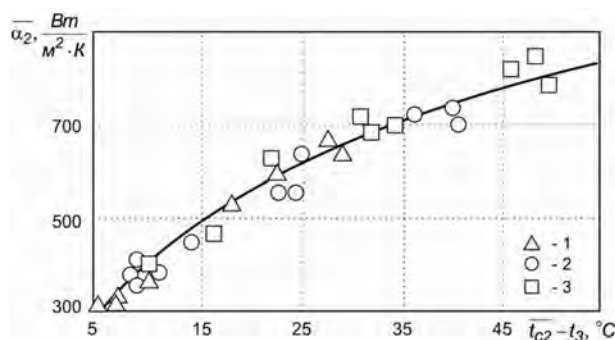


Рисунок 10 – Зависимость коэффициента теплоотдачи  $\alpha_2$  от температурного напора  $t_{c2} - t_3$ :  
 $\varphi = 0$ ; 1 –  $v = 0,3...33,5$  м/с; 2 –  $1,1...1,2$  м/с; 3 –  $1,8...1,9$  м/с

На рисунке 11 представлена обобщающая обработка экспериментальных данных для вертикального и горизонтального расположения теплоотдающей поверхности.

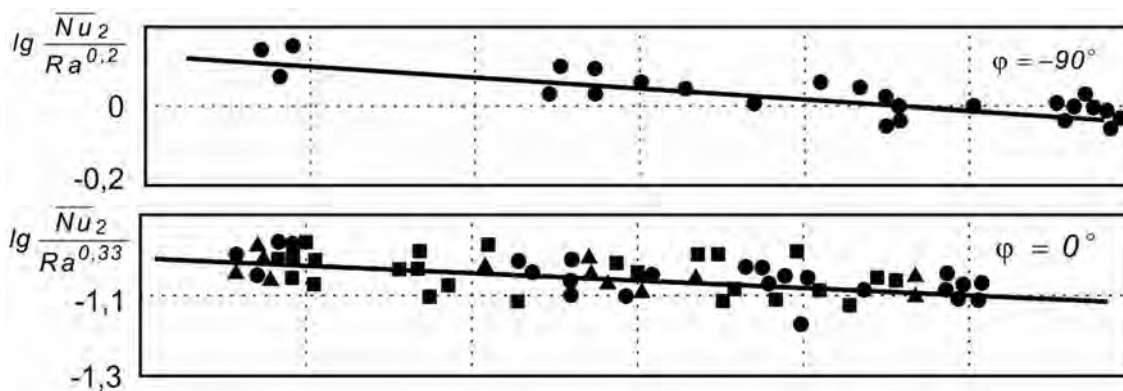


Рисунок 11 – Зависимость  $\lg(\overline{Nu}_2 / Ra^n)$  от  $\lg(Pr_3 / Pr_{c2})$

В конечном счете, определены уравнения подобия, описывающие теплоотдачу:

$$\text{при } \varphi = 0 \quad \overline{Nu}_2 = 0,1 Ra^{0,33} \left( \frac{Pr_3}{Pr_{c2}} \right)^{-0,09} \quad (2)$$

$$\text{при } \varphi = -90 \quad \overline{Nu}_2 = 0,4 Ra^{0,2} \left( \frac{Pr_3}{Pr_{c2}} \right)^{-0,09} \quad (3)$$

Сопоставление зависимостей (1)...(3) с известными [11], например для прямых каналов и изотермических поверхностей, указывает на наличие различий, объясняемых имеющейся спецификой происходящих процессов.

С использованием полученных зависимостей была разработана методика теплотехнического расчета обшивочных теплообменных аппаратов. Она была применена при создании замкнутой системы охлаждения самоходного плавкрана проекта 15201 грузоподъемностью 500т (рисунок 12). ОТОА плавкрана состоял из двух расположенных на днище частей, площадью по 50м<sup>2</sup> каждая. При изготовлении такого аппарата было использовано обычное судостроительного предприятия технологическое оборудование.

В ходе сдаточных испытаний были определены реально достигнутые коэффициенты теплопередачи и сопоставлены с расчетными (рисунок 13). Наглядно видно хорошее согласование полученных результатов, что однозначно подтверждает достоверность разработанной методики и создает условия для более широкого внедрения замкнутых систем охлаждения в практику судостроения.





Рисунок 12 – Самоходный морской плавкран проекта 15201 грузоподъемностью 500 т

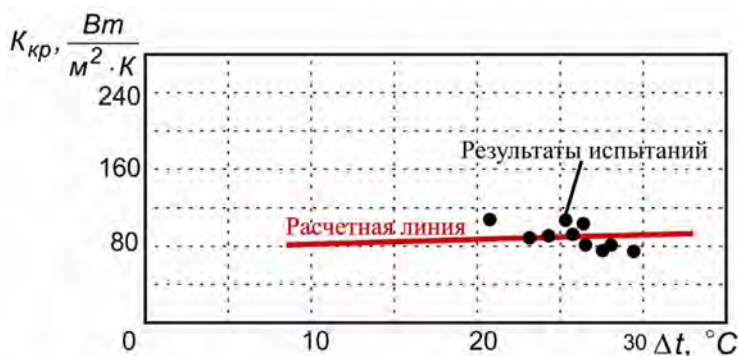


Рисунок 13 – Результаты натурных испытаний ОТОА плавкрана проекта 15201: зависимость коэффициента теплопередачи  $K_{кр}$  от температурного напора  $\Delta t$

**Выводы.** Широко используемые в настоящее время разомкнутые системы охлаждения энергоустановок морских объектов наносят существенный ущерб рыбным запасам морей и внутренних водоемов. Кроме того, данные системы ненадежны при эксплуатации судов в условиях загрязненной акватории. Этих недостатков лишены замкнутые системы охлаждения, исключая необходимость приема морской воды. Основным элементом таких систем является ОТОА, процессы в котором имеют особенности, влияющие на эффективность теплопередачи. Проведенные исследования позволили для имеющихся условий определить соответствующие обобщающих уравнений подобия. Эти уравнения были положены в основу разработанной методики теплотехнического расчета ОТОА, с использованием которой были определены требуемые параметры такого аппарата для самоходного плавкрана проекта 15201 грузоподъемностью 500 т. Проведенные натурные испытания дали хорошее согласование полученных данных с расчетными значениями. Это подтверждает достоверность разработанной методики и создает условия более широкому внедрению в практику экологически безопасных систем охлаждения энергоустановок морских объектов.

Поскольку наихудший режим работы ОТОА связан с теплоотдачей морской воде при свободной конвекции, то дальнейшие исследования следует направить на поиск и разработку метода интенсификации данного процесса. Это обеспечит снижение требуемой площади такого теплообменника и в целом массогабаритных показателей замкнутой системы охлаждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шурпак, В.К. Учет особенностей систем охлаждения при оценке энергетической эффективности судов / В.К. Шурпак // Научно-технический сборник российского морского регистра судоходства. – 2014. – № 37. – С. 51–55.
2. Румб, В.К. Судовые энергетические установки. Судовые дизельные установки / В.К. Румб, Г.В. Яковлев и др. – СПб.: СПбГМТУ, 2007. – 622 с.
3. Мир животных. Зоопланктон Черного моря: [Электронный ресурс] URL: <http://www.zooco.com/strany/str-01-10-21.html> (Дата обращения: 06.12.15 г.).
4. Звягинцев, А.Ю. Морские техноэкосистемы энергетических станций / А.Ю. Звягинцев, А.В. Мощенко. – Владивосток: Дальнаука, 2010. – 343 с.
5. Предварительные материалы по оценке воздействия на окружающую среду эксплуатации энергоблока 2 и 3 Калининской АЭС на мощности реакторной установки 104% от номинальной. – ООО «Гидротехпроект» Тверь, 2013. – 333 с.
6. Ващинников, А.Е. Новые направления в разработке сетчатых рыбозащитных / А.Е. Ващинников, А.А. Васильев, К.В. Илюшин, В.Д. Шульгин // Поведение рыб. Материалы докладов 4-й Всероссийской конференции с международным участием. 19–21 октября 2010, Борок, Россия. – Акварос. – 2010. – С. 9–13.
7. Гарбаренко, О.К. Оснащение водозаборов морских нефтегазодобывающих платформ рыбозащитными устройствами / О.К. Гарбаренко, И.В. Каплин [Электронный ресурс] URL: <http://helion-ltd.ru/s-m-part-2/3713-2009-10-14-18-33-05> (Дата обращения: 31 янв. 2016 г.).
8. Гарбаренко, О.К. Технические решения рыбоохранных мероприятий ОАО «ЦКБ «Коралл» / О.К. Гарбаренко, И.В. Каплин // Нефть и газ арктического шельфа – 2008: Материалы международной конференции. Мурманск, 12–14 ноября. Мурманск: ММБИ КНЦ РАН. – 2008. – С. 82–87.
9. Федоровский, К.Ю. Высоконадежные экологически безопасные системы охлаждения энергоустановок морских технических средств / / К.Ю. Федоровский, Н.К. Федоровская // Proceedings of Azerbaijan State Marine Academy. – 2015. – № 2. – С. 159–164.
10. Федоровский, К.Ю. Повышение эффективности систем охлаждения судовых двигателей / К.Ю. Федоровский // Двигатели внутреннего сгорания. – 2007. – № 1. – С. 109–113.



11. Федоровский, К.Ю. Теплопередача / К.Ю. Федоровский. – Севастополь, СевНТУ, 2012. – 302 с.

**Федоровский Константин Юрьевич**  
ФГАОУ ВО «Севастопольский  
государственный университет»,  
г. Севастополь,  
Доктор технических наук,  
профессор, заведующий кафедры  
«Энергоустановки морских судов  
и сооружений»  
E-mail: fedkonst@rambler.ru

**Федоровская Надежда Константиновна**  
ФГАОУ ВО «Севастопольский  
государственный университет»,  
г. Севастополь,  
Сотрудник тематической лаборатории  
«Эффективные энергоустановки и  
технологии»  
E-mail: n.fedorovskaya14@mail.ru

**Тимофеев Вячеслав Алексеевич**  
ФГАОУ ВО «Севастопольский  
государственный университет»,  
г. Севастополь,  
Старший преподаватель кафедры  
«Энергоустановки морских  
судов и сооружений»  
E-mail: sevastim@mail.ru

---

K.Yu. FEDOROVSKY, N.K. FEDOROVSKIY, V.A. TIMOFEEV

## INVESTIGATION OF HEAT TRANSFER IN AN ENVIRONMENTALLY FRIENDLY COOLING SYSTEM POWER PLANTS OFFSHORE FACILITIES

*Experimental results studies of heat transfer processes in the environmentally friendly closed cooling systems, precluding reception of seawater. Obtained equations, describing the heat in a heat exchange unit that provides cooling heat transfer in sea water.*

**Keywords:** environmental damage, power plant, cooling system, heat transfer, heat exchanger.

### BIBLIOGRAPHY

1. Shurpyak, V.K. Uchet osobennostev sistem okhlazhdeniya pri otsenke energeticheskoy effektivnosti sudov / V.K. Shurpyak // Nauchno–tekhnicheskiy sbornik rossiyskogo morskogo registra sudokhodstva. – 2014. – № 37. – S. 51–55.
2. Rumb, V.K. Sudovyye energeticheskiye ustanovki. Sudovyye dizelnyye ustanovki / V.K. Rumb, G.V. Yakovlev i dr. – SPb.: SPbGMTU, 2007. – 622 s.
3. Mir zhivotnykh. Zooplankton Chernogo morya: [Elektronnyy resurs] URL: <http://www.zoeco.com/strany/str-01-10-21.html> (Data obrashcheniya: 06.12.15 g.).
4. Zvyagintsev, A.YU. Morskiye tekhnookosistemy energeticheskikh stantsiy / A.YU. Zvyagintsev, A.V. Moshchenko. – Vladivostok: Dalnauka, 2010. – 343 s.
5. Predvaritelnyye materialy po otsenke vozdeystviya na okruzhayushchuyu sredu ekspluatatsii energobloka 2 i 3 Kalininskoy AES na moshchnosti reaktornoy ustanovki 104% ot nominalnoy. – OOO «Gidrotekhproyekt» Tver, 2013. – 333 s.
6. Vashchinnikov, A.Ye. Novyye napravleniya v razrabotke setchatykh rvbozashchitnykh / A.Ye. Vashchinnikov, A.A. Vasiliev, K.V. Ilyushin, V.D. Shulgin // Povedeniye rvb. Materialy dokladov 4–y Vserossiyskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiyem. 19–21 oktyabrya 2010, Borok, Rossiya. – Akvaros. – 2010. – S. 9–13.
7. Garbarenko, O.K. Osnashcheniye vodozaborov morskikh nefgazodobvayushchikh platform rvbozashchitnymi ustroystvami / O.K. Garbarenko, I.V. Kaplin [Elektronnyy resurs] URL: <http://helion-ltd.ru/s-m-part-2/3713-2009-10-14-18-33-05> (Data obrashcheniya: 31 yanv. 2016 g.).
8. Garbarenko, O.K. Tekhnicheskoye resheniye rvbookhrannnykh meroprivatov OAO «TSKB «Korall» / O.K. Garbarenko, I.V. Kaplin // Neft i gaz arkticheskogo shelfa – 2008: Materialy mezhdunarodnoy konferentsii. Murmansk, 12–14 novabrya. Murmansk: MMBI KNTS RAN. – 2008. – S. 82–87.
9. Fedorovskiy, K.YU. Vysokonadezhnyye ekologicheski bezopasnyye sistemy okhlazhdeniya energoustanovok morskikh tekhnicheskikh sredstv / / K.YU. Fedorovskiy, N.K. Fedorovskaya // Proceedings of Azerbaijan State Marine Academy. – 2015. – № 2. – S. 159–164.
10. Fedorovskiy, K.YU. Povyseniye effektivnosti sistem okhlazhdeniya sudovykh dvigateley / K.YU. Fedorovskiy // Dvigateli vnutrennego sgoraniya. – 2007. – № 1. – S. 109–113.
11. Fedorovskiy, K.YU. Teploperedacha / K.YU. Fedorovskiy. – Sevastopol, SevNTU, 2012. – 302 s.

**Fedorovskiy Konstantin Yuryevich**  
FGAOU IN «Sevastopol National  
Technical University»  
Sevastopol,  
Doctor of Technical Sciences,  
professor, head of department  
«Power plants of ships and  
structures»  
E-mail: fedkonst @ rambler.ru

**Fedorovskaya Nadezhda Konstantinovna**  
FGAOU IN «Sevastopol National  
Technical University»  
Sevastopol,  
Employee thematic laboratories  
«Effective power plants and  
technologies»  
E-mail: n.fedorovskaya14@mail.ru

**Timofeyev Vyacheslav Alekseyevich**  
FGAOU IN «Sevastopol National  
Technical University», Sevastopol,  
Senior lecturer in «Power plants of  
ships and structures»  
E-mail: sevastim@mail.ru

## УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КАСКАДНЫХ СОЛНЕЧНЫХ ВОДОНАГРЕВАТЕЛЬНЫХ УСТАНОВОК

*Исследована задача необходимых и достаточных условий существования каскадных солнечных водонагревательных установок.*

**Ключевые слова:** необходимые и достаточные условия, солнечные водонагревательные установки, каскадные установки.

**Введение.** Энергетическая проблема является ключевой среди технических, экономических и социальных проблем общества. Обеспечение потребностей в энергии в современном мире вызывает необходимость глубокой перестройки в топливно–энергетическом комплексе, как в сфере получения, так и в сфере потребления энергии.

Одним из важных направлений этой перестройки является экономия органического топлива за счет использования возобновляемых источников энергии, в том числе солнечной энергии [1].

По оценкам аналитиков объем рынка солнечной энергетики за 10 лет с 2008 по 2018 гг. увеличится более чем в 2,5 раза, а мощность вырастет более чем в 5 раз. При этом этот рынок за последние 5 лет растет на 39% в год. Солнечные батареи давно стали основным источником электропитания на космических аппаратах. Уже созданы солнечные батареи для питания кардиостимуляторов (размером тоньше волоса) и другой биомедицинской техники, подзарядки различных гаджетов. Большие перспективы их использования в гибридных приводах автомобилей, беспилотных летательных аппаратов и многих других приложениях [2, 3].

Наибольшей степенью «технической готовности» характеризуется направление, связанное с преобразованием солнечной энергии в теплоту невысокого потенциала, достаточного для горячего водоснабжения, отопления или охлаждения воздуха в жилых, общественных и производственных помещениях.

Солнечные водонагревательные установки (СВУ) хорошо зарекомендовали себя в зонах от 50° с.ш. до 50° ю.ш.

Анализ проектов и строительства СВУ показал, что структура капитальных затрат выглядит следующим образом:

- солнечные коллекторы – 40...67 %;
- металлоконструкции и трубопроводы – 15...27 %;
- бак–аккумулятор – 9...38 %;
- прочие расходы – 4...6 %.

Из этой структуры следует, что приоритетным направлением снижения капитальных затрат на системы солнечного теплоснабжения является совершенствование и снижение стоимости солнечных коллекторов.

Тепловая эффективность солнечных коллекторов тем выше, чем меньше средняя температура жидкости. Зависимость эта для разных типов коллекторов различна – при низких температурах более эффективны простые, а значит более дешевые коллекторы, при высоких – наоборот.

Одним из перспективных способов повышения экономичности солнечных установок является ступенчатое повышение температуры теплоносителя. При этом на первых ступенях теплоноситель нагревается в солнечных коллекторах простейших конструкций, на последующих – в более совершенных коллекторах либо в традиционных генераторах теплоты.

Многообразие схемных решений каскадных установок с использованием солнечного излучения можно свести к трем основным типам:

- солнечные коллекторы – солнечные коллекторы;
- солнечные коллекторы – традиционные источники теплоты;
- солнечные коллекторы – тепловые насосы.

В этой статье будут рассмотрены каскадные установки первого типа.

В каскадных установках первого типа наиболее целесообразно применять солнечные коллекторы без прозрачной, а иногда и без тыльной тепловой изоляции (абсорберы). При правильной оптимизации такая установка будет меньше чем одноступенчатая на 8...12 %, а по стоимости на 15...20 %.

Трехкаскадная установка для горячего водоснабжения, отопления и технологических нужд разработана в Японии (рисунок 1). Первая ступень состоит из абсорберов и нагревает теплоноситель до температуры 35...40 °С, вторая – из одностекольных солнечных коллекторов, нагревающих до 60...65 °С, третью ступень составляют коллекторы с двойным остеклением и селективным поглотителем, в которых теплоноситель может быть догрет до 120...130 °С.

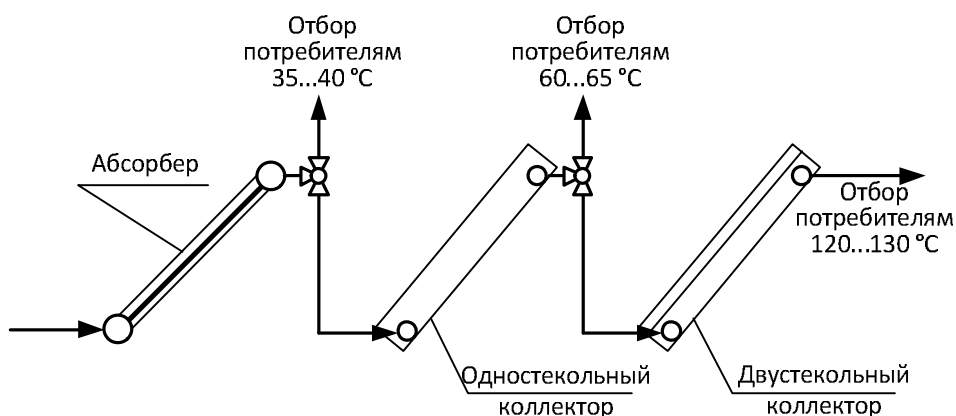


Рисунок 1 – Трехкаскадная установка для горячего водоснабжения, отопления и технологических нужд

**Рассмотрим условия существования двухкаскадной системы.** Для начала необходимо сформулировать условия, при которых может быть создана двухкаскадная установка, более эффективная, чем обычная (состоящая из одного типа солнечных коллекторов).

Пусть существуют два типа солнечных коллекторов (СК) и для них выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} (F'\eta_0)_1 &> (F'\eta_0)_2; \\ (F'U_L)_1 &> (F'U_L)_2. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $F'U_L$  – произведение коэффициента эффективности поглощающей панели на коэффициент тепловых потерь СК, Вт/(м<sup>2</sup> К);

$F'\eta_0$  – произведение коэффициента эффективности поглощающей панели на оптический КПД СК;

индекс 1 относится, например, к неостекленным СК, индекс 2, например, – к остекленным СК.

Допустим условия (1) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} (F'\eta_0)_1 &\leq (F'\eta_0)_2; \\ (F'U_L)_1 &> (F'U_L)_2. \end{aligned} \quad (1a)$$

Тогда применение СК первого типа теряет всякий смысл, кроме, может быть, экономического.

Допустим условия (1) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} (F'\eta_0)_1 &> (F'\eta_0)_2; \\ (F'U_L)_1 &\leq (F'U_L)_2. \end{aligned} \quad (1б)$$

Тогда применение СК второго типа теряет всякий смысл.

Таким образом, условия (1) являются необходимыми и для создания двухкаскадной солнечной водонагревательной установки (СВУ).

С другой стороны, могут существовать режимы работы СВУ, при которых даже при выполнении условий (1) двухкаскадная установка не может быть создана. Например, при низком значении конечной температуры ( $t_0$ ). В этом случае более высокие оптические свойства СК первого типа дают больше преимущества, чем более низкий коэффициент тепловых потерь СК второго типа. Поэтому необходимо определить условия, при которых двухкаскадная установка будет существовать, или, проще говоря, достаточные условия существования двух каскадных СВУ. Для этого можно воспользоваться результатами теплотехнической оптимизации, представленными в работе [4]. По данным [4] оптимальная доля неостекленных СК в двухкаскадной СВУ определяется по формуле:

$$z_{*opt} = -\frac{1}{NTU_1} \ln \frac{1 - \theta_{12}}{\theta_{12}(KU_{12} - 1)}, \quad (2)$$

где  $\theta_{12} = \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}$ ;  $KU_{12} = \frac{(F'U_L)_1}{(F'U_L)_2}$ ;

$$NTU_1 = \frac{(F'U_L)_1 A}{Gc_p};$$

$$\Delta T_1 = T_1 - t_i, \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$\Delta T_2 = T_2 - t_i, \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$T_1 = t_a + \frac{(F'\eta_0)_1}{(F'U_L)_1} I, \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$T_2 = t_a + \frac{(F'\eta_0)_2}{(F'U_L)_2} I, \text{ } ^\circ\text{C};$$

$t_a$  – температура окружающего воздуха,  $^\circ\text{C}$ ;

$I$  – плотность потока суммарной солнечной радиации в плоскости СК,  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ;

$A$  – общая площадь поверхности всех типов СК СВУ,  $\text{м}^2$ ;

$t_i$  – температура воды на входе в СК СВУ,  $^\circ\text{C}$ ;

$G$  – расход воды через СВУ,  $\text{кг}/\text{с}$ ;

$c_p$  – теплоемкость воды при постоянном давлении,  $\text{Дж}/(\text{кг K})$ .

Очевидно, что для существования двухкаскадной СВУ необходимо, чтобы  $z_{*opt}$  находилась в диапазоне от 0 до 1, т.е., чтобы выполнялось неравенство:

$$0 < z_{*opt} < 1. \quad (3)$$

Таким образом, условие (3) является достаточным условием существования двухкаскадной СВУ. Анализируя условия (1) и (3), можно отметить, что необходимые условия определяются конструктивными параметрами СК – оптический КПД и коэффициент тепловых потерь, в то время как, достаточные условия – как конструктивными, так и режимными. К режимным можно отнести величину  $NTU_1$ , куда входит расход  $G$ , который, в итоге, определяет конечную температуру  $t_0$ .

На рисунке 2 показано, что изменение удельного расхода соды через СК,  $g = G/A$ , сильно влияет как на величину  $z_{*opt}$ , так и на температурный перепад вдоль СК  $\delta t = t_0 - t_i$ . Следует отметить, что при больших удельных расходах воды через СВУ (это характерно для малых температурных перепадов, меньше  $30\text{ }^\circ\text{C}$ ) необходимость в остекленных СК отпадает. В тоже время при очень маленьких  $g$  доля неостекленных СК заметно снижается, однако не исчезает совсем, это связано с тем, что температура окружающего воздуха обычно выше температуры воды на входе в СВУ.

**Рассмотрим условия существования трехкаскадной системы.** Для начала необходимо сформулировать условия, при которых трехкаскадная установка может быть создана.

Пусть существуют три типа солнечных коллекторов (СК) и для них выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned}(F'\eta_0)_1 &> (F'\eta_0)_2 > (F'\eta_0)_3; \\ (F'U_L)_1 &> (F'U_L)_2 > (F'U_L)_3.\end{aligned}\quad (4)$$

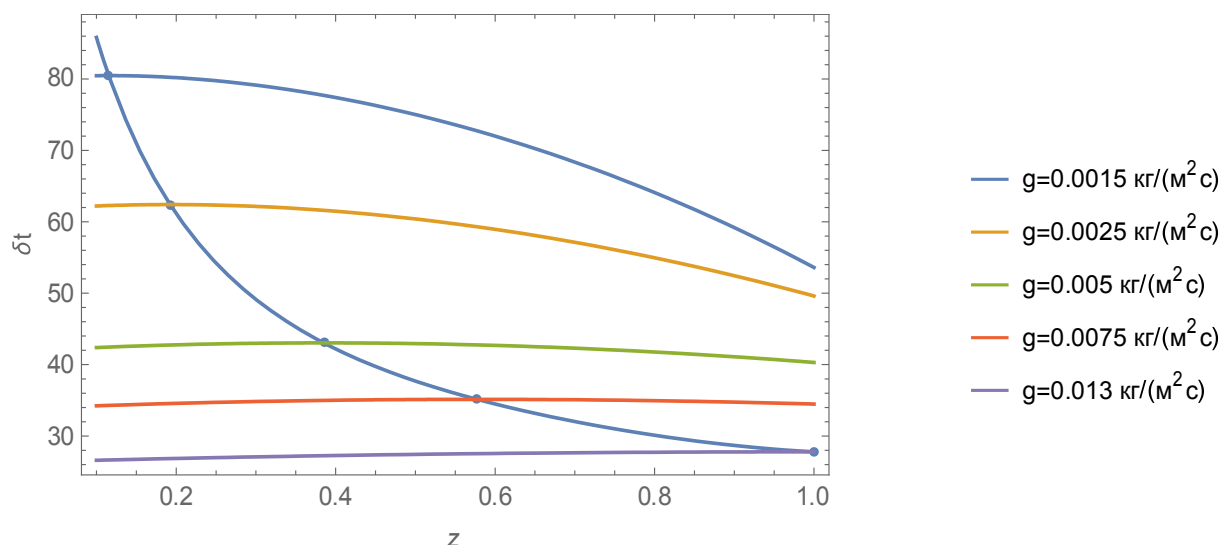


Рисунок 2 – Зависимость перепада температур от удельного расхода и доли неостекленных СК в составе СВУ

В выражении (4) индекс 1 относится, например, к неостекленным СК, индекс 2 – к остекленным СК с одним слоем прозрачной изоляции, индекс 3 – к остекленным СК с двумя слоями прозрачной изоляции.

Проводя рассуждения аналогичные для двухкаскадных СВУ, можно сделать вывод, что условия (4) являются необходимыми для создания трехкаскадной солнечной водонагревательной установки (СВУ)

Если условия (4) выполняются, то для этих трех типов СК, при выполнении достаточных условий, можно составить трехкаскадную солнечную водонагревательную установку (СВУ).

Достаточные условия для существования трехкаскадной СВУ можно сформулировать следующим образом:

- во-первых, необходимо выполнения условий (1) и (3) для двухкаскадных установок;
- во-вторых, режимные параметры должны быть такими, чтобы площадь неостекленных СК была больше нуля.

Для того чтобы выразить математически, описанные выше достаточные условия воспользуемся результатами теплотехнической оптимизации, представленными в работе [4].

Введем некоторые обозначения:

$$z_{*1} = \frac{A_1}{A}; z_{*2} = \frac{A_1 + A_2}{A}; NTU_3 = \frac{(F'U_L)_3 A}{Gc_p},$$

где  $A_1, A_2, A$  – площади СК первого, второго типов и общая площадь СВУ соответственно

По данным [1] оптимальная доля неостекленных СК в трехкаскадной СВУ определяется по формуле:

$$z_{*1opt} = -\frac{1}{NTU_1} \ln \frac{1 - \theta_{12}}{\theta_{12}(KU_{12} - 1)}, \quad (5)$$

а оптимальная доля СК первого и второго типов будет, соответственно [4], равняться:

$$z_{*2opt} = -\frac{1}{NTU_2} \ln \frac{1 - \theta_{23}}{\theta_{23}(KU_{23} - 1)KU_{12}\theta_{12} \left[ \frac{1 - \theta_{12}}{\theta_{12}(KU_{12} - 1)} \right]^{1 - \frac{1}{KU_{12}}}}, \quad (6)$$

где  $\theta_{23} = \frac{\Delta T_2}{\Delta T_3};$

$$KU_{23} = \frac{(F'U_L)_2}{(F'U_L)_3};$$

$$\Delta T_3 = T_3 - t_i, \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$T_3 = t_a + \frac{(F'\eta_0)_3}{(F'U_L)_3} I.$$

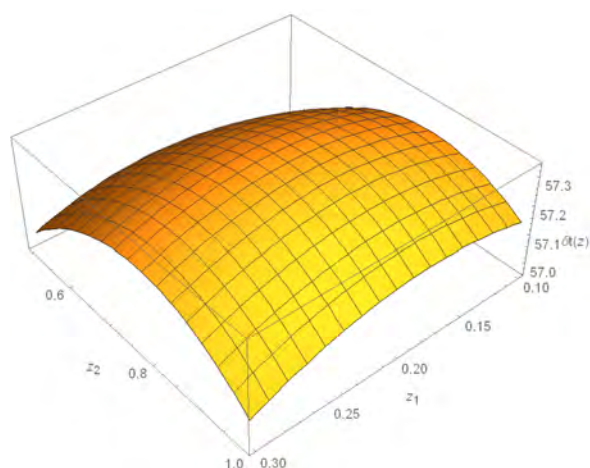
Оптимальная доля СК с двумя слоями прозрачной изоляции в составе трехкаскадной СВУ будет равна  $1 - z_{*2opt}$ . Соответственно для существования трехкаскадной СВУ конструктивные параметры СК и режимные параметры СВУ должны быть подобраны таким образом чтобы выполнялось неравенство:

$$1 - z_{*2opt} > 0, \text{ или } z_{*2opt} < 1. \quad (7)$$

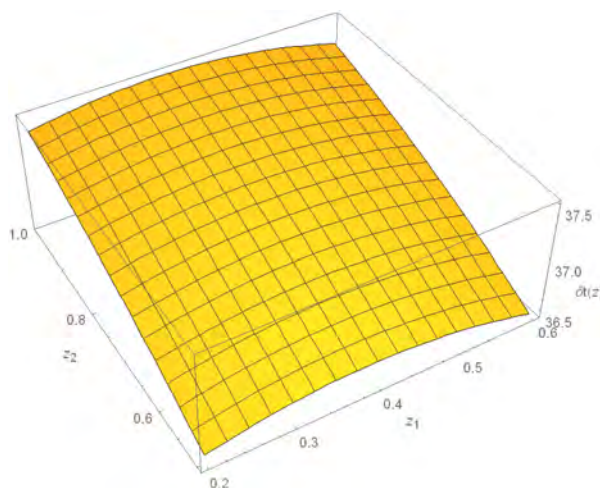
Условие (7) с учетом выражений (5) и (6) можно назвать достаточным условием для существования трехкаскадной СВУ.

Аналогично двухкаскадной системе, основным фактором, влияющим на существование трехкаскадной, является режим работы СВУ т.е. расход теплоносителя  $G$ , определяющий его конечную температуру.

При достаточно небольшой конечной температуре применение трехкаскадных установок не оптимально, даже при соблюдении требуемых конструктивных параметров (4). Например, при средних параметрах температуры воздуха, солнечного излучения и скорости ветра ( $I = 744 \text{ Вт/м}^2$ ;  $t_a = 22,5 \text{ } ^\circ\text{C}$ ;  $u_a = 1 \text{ м/с}$ ) по Крыму для июня месяца [5] при  $t_i = 15 \text{ } ^\circ\text{C}$ ;  $g = 0,002 \text{ кг/(м}^2 \text{ с)}$  оптимальные значения долей СК разного типа  $((F'\eta_0)_1 = 0,9$ ;  $(F'\eta_0)_2 = 0,8$ ;  $(F'\eta_0)_3 = 0,7$ ;  $(F'U_L)_1 = 9,6$ ;  $(F'U_L)_2 = 5,1$ ;  $(F'U_L)_3 = 3,5$ ) для трехкаскадной установки составят  $z_{*1opt} = 0,2$ ;  $z_{*2opt} = 0,8$ , а при  $g = 0,0035 \text{ кг/(м}^2 \text{ с)}$  –  $z_{*1opt} = 0,38$ ;  $z_{*2opt} = 1,0$ . Результаты оптимизации изображены на рисунках 3 и 4.



**Рисунок 3 – Результаты оптимизации трехкаскадной систем при средних параметрах окружающей среды по Крыму при  $g = 0,002 \text{ кг/(м}^2 \text{ с)}$**



**Рисунок 4 – Результаты оптимизации трехкаскадной системы при средних параметрах окружающей среды по Крыму при  $g = 0,0035 \text{ кг/(м}^2 \text{ с)}$**

Рисунки 3 и 4 наглядно демонстрируют, что режимный параметр  $g$  оказывает решающее воздействие на «каскадность» СВУ. Чем ниже удельный расход нагреваемой воды через СК, тем больше каскадов целесообразно иметь в составе СВУ.

**Заключение.** Рассмотренный в статье материал позволяет сделать вывод для создания каскадных СВУ нужно иметь не только определенное соотношение конструктивных параметров СК, входящих в состав СВУ (1) или (4), которые являются необходимыми условиями, но и подходящее соотношение режимных и конструктивных параметров, указанных в неравенствах (3) или (7), которые являются достаточными условиями для создания двух– или трехкаскадных систем соответственно. Кроме того, установлено, что при прочих равных условиях удельный расход нагреваемой воды через СК однозначно

определяет количество каскадов для СВУ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исследования эффективности солнечной энергетики в Крымском Федеральном Округе /М.М. Амирханов, Е.А. Наумов, И.Н. Стаценко, А.В. Дологлонян, В.Ю. Бурлаченко, Н.И. Терентьева, В.А. Сафонов, Ю.Л. Рапакский, В.Л. Власьев, С.Д. Иванов, В.А. Куликов, Е.С. Исаев, Д.Н. Гречуха, А.И. Черноусенко, С.Г. Каратаев, С.А. Набатников / Россия: тенденции и перспективы развития. Ежегодник. Вып. 11. Ч. 1. Отв. ред. В.И. Герасимов, Д.В. Ефременко. – М.: РАН. ИНИОН. Отд. науч. сотрудничества. – 2016. – С. 317–322.
2. Казанцев Т.В. Аналитический анонс российского и мирового рынка солнечной энергетики [Электронный ресурс] URL: <http://www.asmarketing.ru/marketingovyie-issledovaniya/rossiyskiy-i-mirovoy-rynok-solnechnoy-energetiki.html>. Дата обращения: 10.06.2016.
3. Степанова Е.Ю. Рынок солнечной энергетики в России: состояние и перспективы / Е.Ю. Степанова // Энерго- и ресурсосбережение – XXI век: Сборник материалов X международной научно-практической Интернет-конференции 01 марта – 30 июня. – Орел: Госуниверситет-УНПК. – 2012. – С. 303–307.
4. Дологлонян А.В. Теплотехническая оптимизация каскадных солнечных водонагревательных установок / А.В. Дологлонян // Материалы международной научно-технической конференции «Динамика надежность и долговечность механических и биомеханических систем», г. Севастополь, 10–14 сентября 2012 г. – Севастополь: СевНТУ. – 2012. – С. 361–369.
5. Справочник по климату СССР. Вып. 10. – Ч. 1. – Л.: Гидрометиздат, 1996. – 125 с.

**Дологлонян Андрей Вартазарович**  
ФГБНУ Институт природно-технических систем  
Российской Федерации, г. Севастополь  
Кандидат технических наук, старший научный  
сотрудник  
E-mail: [dologlonyan@hotmail.com](mailto:dologlonyan@hotmail.com)

**Сухов Андрей Константинович**  
ФГБНУ Институт природно-технических систем  
Российской Федерации, г. Севастополь  
Доктор технических наук, главный научный  
сотрудник  
E-mail: [dologlonyan@hotmail.com](mailto:dologlonyan@hotmail.com)

---

A.V. DOLOGLONYAN, A.K. SUHOV

## LIVING CONDITIONS OF CASCADE SOLAR WATER-HEATING INSTALLATIONS

*The problem of necessary and sufficient living conditions of cascade solar water-heating plants is investigated.*

**Keywords:** *necessary and sufficient conditions, solar water-heating plants, cascade plants.*

## BIBLIOGRAPHY

1. Issledovaniya effektivnosti solnechnoy energetiki v Krymskom Federalnom Okruge /M.M. Amirkhanov, Ye.A. Naumov, I.N. Statsenko, A.V. Dologlonyan, V.YU. Burlachenko, N.I. Terentyeva, V.A. Safonov, YU.L. Rapatskiy, V.L. Vlashev, S.D. Ivanov, V.A. Kulikov, Ye.S. Isayev, D.N. Grechukha, A.I. Chernousenko, S.G. Karatayev, S.A. Nabatnikov / Rossiya: tendentsii i perspektivy razvitiya. Yezhegodnik. Vyp. 11. CH. 1. Otv. red. V.I. Gerasimov, D.V. Yefremenko. – M.: RAN. INION. Otd. nauch. sotrudnichestva. – 2016. – С. 317–322.
2. Kazantsev T.V. Analiticheskiy anons rossiyskogo i mirovogo rynka solnechnoy energetiki [Elektronnyy resurs] URL: <http://www.asmarketing.ru/marketingovyie-issledovaniya/rossiyskiy-i-mirovoy-rynok-solnechnoy-energetiki.html>. Data obrashcheniya: 10.06.2016.
3. Stepanova Ye.YU. Rynok solnechnoy energetiki v Rossii: sostoyaniye i perspektivy / Ye.YU. Stepanova // Energo- i resursosberezheniye – XXI vek: Sbornik materialov KH mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy Internet-konferentsii 01 marta – 30 iyunya. – Orel: Gosuniversitet-UNPK. – 2012. – S. 303–307.
4. Dologlonyan A.V. Teplotekhnicheskaya optimizatsiya kaskadnykh solnechnykh vodonagrevatelnykh ustanovok / A.V. Dologlonyan // Materialy mezhdunarodnoy nauchno-tekhnikeskoy konferentsii «Dinamika nadezhnost i dolgovechnost mekhanicheskikh i biomekhanicheskikh sistem», g. Sevastopol, 10–14 sentyabrya 2012 g. – Sevastopol: SevNTU. – 2012. – S. 361–369.
5. Spravochnik po klimatu SSSR. Vyp. 10. – CH. 1. – L.: Gidrometizdat, 1996. – 125 s.

**Dologlonyan Andrey Vartazarovich**  
FSBSI Institute of nature-technical problems of  
Russian Federation, Sevastopol  
Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher  
E-mail: [dologlonyan@hotmail.com](mailto:dologlonyan@hotmail.com)

**Suhov Andrey Konstantinovich**  
FSBSI Institute of nature-technical problems of  
Russian Federation, Sevastopol  
Doctor of Technical Sciences, Chief Researcher  
E-mail: [dologlonyan@hotmail.com](mailto:dologlonyan@hotmail.com)

## РАБОТА СОЛНЕЧНОГО КОЛЛЕКТОРА В «НОЧНОМ РЕЖИМЕ»

*Разработана методика расчета солнечных коллекторов при работе в «ночном режиме».*

**Ключевые слова:** солнечные коллекторы, «ночной режим».

**Введение.** Потребление энергии в мире непрерывно увеличивается. Это связано с ростом численности населения, индустриализацией экономик, автоматизацией и роботизацией производств, ростом автомобилизации многих стран и энерговооруженности сельского хозяйства, повышением жизненного уровня людей, расширением мировой информационно-коммуникационной инфраструктуры, которая уже сейчас «съедает» 10% вырабатываемой электрической энергии. Повышение конкурентоспособности национальных экономик правительства многих развитых стран видят в энергосбережении, повышении энергоэффективности, в поиске новых нетрадиционных источников возобновляемой энергии, которые никогда не закончатся, в том числе и солнечной. По мнению Ж.И. Алферова, если бы в последнюю было вложено хотя бы 15% тех средств, которые вложены в атомную энергетику, то сегодня нам не были бы нужны АЭС. Уже сейчас солнечная энергия используется в космических программах, приборостроении, авиационной и автомобильной отраслях, бытовой технике и приборах. С ростом КПД солнечных панелей, а он в экспериментальных образцах достиг уже 44,7%, область применения расширяется [1, 2].

Но в настоящее время наибольший практический интерес представляют системы солнечного теплоснабжения [3–8].

В современной литературе, например, в [9], подробно расписана методика расчета солнечного коллектора (СК), предназначенного для нагрева теплоносителя. Обычно период работы СК составляет 9 часов в день с 8 до 17.00, в вечернее и ночное время СК бездействует. Наиболее производительным для работы СК является летний период, однако в этот период большим спросом пользуется не только горячая вода, но и холод для систем комфортного кондиционирования. Для получения холода в составе солнечной водонагревательной установки (СВУ) можно использовать работу СК в «ночном режиме», в этом режиме температура воды может понижаться ниже температуры окружающего воздуха. Холод, полученный СВУ при работе СК в «ночном режиме» необходимо аккумулировать в отдельном баке-аккумуляторе холода. Для определения размеров бака-аккумулятора холода необходима методика расчета СК в «ночном режиме». Целью данной статьи является разработка методики расчета СК в «ночном режиме».

### Методика расчета плоского солнечного коллектора в «ночном режиме».

Эффект охлаждения теплоносителя в ночном режиме работы солнечного коллектора достигается за счет того, что температура небосвода ( $T_s$ ) ниже температуры окружающего воздуха ( $T_a$ ). Температура небосвода определяется по формуле [9]:

$$T_s = 0,0552T_a^{1,5}. \quad (1)$$

Если считать «излучение небосвода» полностью рассеянным и отрицательным, то его количество, падающее на наклонную поверхность, определяется по выражению [9]:

$$I_s = \frac{1}{2}(1 + \cos(s))\sigma(T_s^4 - T_{pg}^4), \quad (2)$$

где  $s$  – угол наклона СК к горизонту, рад;

$T_{pg}$  – температура облучаемой поверхности СК, К.

Оптическим КПД СК  $\eta_0$  при работе в ночном режиме в этом случае будет степень черноты облучаемой поверхности.

Для СК без прозрачной изоляции методика расчета мало отличается от традиционной поскольку облучаемой поверхностью является пластина СК. Единственным



отличием является отсутствие радиационной составляющей в расчете коэффициента теплоотдачи от прозрачной изоляции в окружающую среду, поскольку эта составляющая входит в «излучение небосвода».

Учитывая вышесказанное, для СК без прозрачной изоляции конвективные потери в окружающую среду будут равны:

$$Q_c = \alpha_c (T_p - T_a) A, \quad (3)$$

где  $\alpha_c$  – коэффициент теплоотдачи от пластины СК к окружающему воздуху, Вт/(м<sup>2</sup> К);  
 $T_p$  – температура пластины СК, К;  $A$  – площадь пластины СК, м<sup>2</sup>.

Для плоской наклонной пластины имеются следующие выражения для расчета коэффициента теплоотдачи [9]:

$$\alpha_c = 5,7 + 3,8u_a, \quad (4)$$

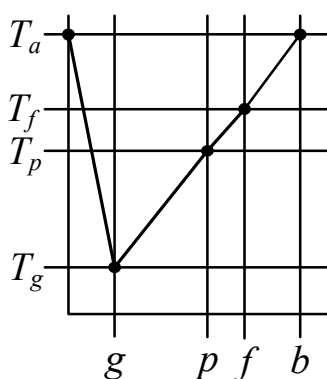
где  $u_a$  – скорость ветра, м/с. Либо если  $u_a = 0$ :

$$\alpha_c = 0,496 \frac{\lambda_a}{b} \sqrt[4]{Gr_b}, \quad (4a)$$

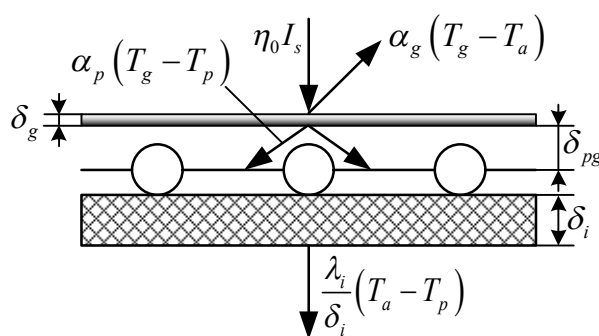
где  $\lambda_a$  – коэффициент теплопроводности воздуха, Вт/(м К);  
 $b$  – ширина пластины СК, м;

$Gr_b$  – число Грасгофа для воздуха (характерный размер – ширина пластины, характерная температура – среднее арифметическое между температурой прозрачной изоляции (стекла)  $T_g$  и температурой окружающего воздуха).

Для «ночного режима» работы СК с одним слоем прозрачной изоляции облучаемой поверхностью является прозрачная изоляция, и она будет обладать наименьшей температурой. На основании сказанного распределение температур по глубине СК будет выглядеть, как представлено на рисунке 1.



**Рисунок 1 – Распределение температуры по глубине СК с одним слоем прозрачной изоляции при «ночном режиме работы»:**  
 $g$  – поверхность прозрачной изоляции,  $p$  – поверхность пластины СК,  $f$  – «поверхность» жидкости СК,  $b$  – задняя поверхность СК



**Рисунок 2 – Распределение потерь холода в окружающую среду**

В соответствии с рисунком 1 можно сказать, что потери холода в окружающую среду будут состоять из суммы следующих потерь (рисунок 2):

- от прозрачной изоляции в окружающую среду;
- от пластины СК в окружающую среду.

Холод, переданный от прозрачной изоляции к пластине СК (рисунок 4) можно считать полезным.

В соответствии с вышесказанным выразим общие потери холода по формуле:

$$Q_L = Q_t + Q_b; \quad (5)$$

$$Q_t = \alpha_g (T_g - T_a) A; \quad (6)$$

$$Q_b = \frac{\lambda_i}{\delta_i} (T_p - T_a) A, \quad (7)$$

где  $\lambda_i$  – теплопроводность слоя нижней изоляции СК, Вт/(м К);

$\delta_i$  – толщина слоя нижней изоляции СК, м.

Полезный холод находится по выражению:

$$Q_u = \alpha_p (T_g - T_p) A. \quad (8)$$

Учитывая (6) и (7) (5) примет вид:

$$Q_L = \alpha_g (T_g - T_a) A + \frac{\lambda_i}{\delta_i} (T_p - T_a) A = \left( \alpha_g + \frac{\lambda_i}{\delta_i} \frac{T_p - T_a}{T_g - T_a} \right) (T_g - T_a) A. \quad (9)$$

Из (9) следует, что:

$$U_L = \alpha_g + \frac{\lambda_i}{\delta_i} \frac{T_p - T_a}{T_g - T_a} \quad (10)$$

Учитывая, что  $(T_g - T_a) > (T_p - T_a)$  (рисунок 3) и при наличии достаточно качественной изоляции  $\alpha_g + \frac{\lambda_i}{\delta_i}$ , то можно допустить, что:

$$U_L \approx \alpha_g. \quad (11)$$

Тогда полезный холод можно определить по формуле:

$$Q_u = \eta_0 I_s A - U_L (T_g - T_a) A. \quad (12)$$

Сравнивая (12) и (8) можно получить выражение, связывающее температуры пластины и прозрачной изоляции:

$$T_g = \frac{\eta_0 I_s + U_L T_a + \alpha_p T_p}{U_L + \alpha_p}. \quad (13)$$

Рассмотрим вопросы эффективности поглощающей панели СК в ночном режиме, полагая потери через заднюю стенку СК малыми, (11). Баланс тепловой энергии для элемента ребра при работе СК в ночном режиме представлен на рисунке 3.

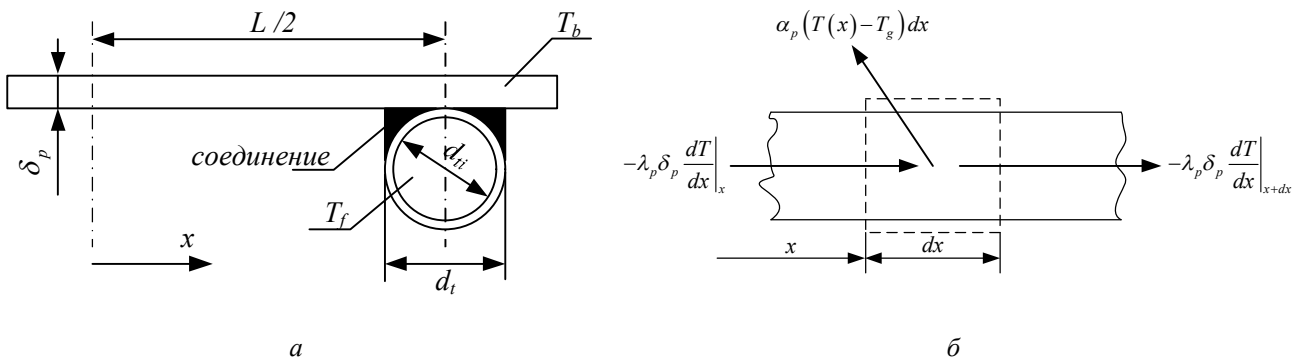


Рисунок 3 – Баланс энергии для элемента ребра при работе СК в «ночном режиме»

Выделим элемент ребра единичной длины в направлении потока теплоносителя, ширина которого равна  $dx$  (рисунок 3, б). Уравнение баланса энергии для этого элемента в соответствии с законом Фурье имеет вид:

$$-\alpha_p (T - T_g) dx + \left[ \left( -\lambda_p \delta_p \frac{dT}{dx} \right) \Big|_x - \left( -\lambda_p \delta_p \frac{dT}{dx} \right) \Big|_{x+dx} \right] = 0. \quad (14)$$

Поделим обе части (14) на  $dx$ , и устремив  $dx$  к нулю, получим:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{\alpha_p}{\lambda_p \delta_p} (T - T_g). \quad (15)$$

Граничные условия:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0; T|_{x=\frac{L-d_t}{2}} = T_b.$$

Введем обозначения:  $m^2 = \frac{\alpha_p}{\lambda_p \delta_p}$ ,  $\psi = (T - T_g)$ , тогда уравнение (15) примет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - m^2\psi = 0. \quad (16)$$

Соответственно граничные условия будут выглядеть:

$$\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=0} = 0; \psi|_{x=\frac{L-d_t}{2}} = T_b - T_g. \quad (17)$$

Общее решение (16) с условиями (17), широко известно в литературе [9, 10] и будет иметь вид:

$$\frac{T - T_g}{T_b - T_g} = \frac{\cosh(mx)}{\cosh\left(m \frac{L-d_t}{2}\right)} \quad (18)$$

Поток тепла на единицу длины трубы, переносимый теплопроводностью к трубе через основание ребра, в соответствии с законом Фурье равен:

$$q_{op1} = -\lambda_p \delta_p \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=\frac{L-d_t}{2}} = -\lambda_p \delta_p \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=\frac{L-d_t}{2}} = -m \lambda_p \delta_p (T_b - T_g) \tanh\left(m \frac{L-d_t}{2}\right),$$

или, учитывая, что теплота подводится к трубе с двух сторон, то  $q_{op} = 2 q_{op1}$ , или

$$q_{op} = -(L - d_t) m^2 \lambda_p \delta_p (T_b - T_g) \frac{\tanh\left(m \frac{L-d_t}{2}\right)}{m \frac{L-d_t}{2}}. \quad (18)$$

Используя понятие эффективности ребра (18) можно переписать:

$$q_{op} = -(L - d_t) m^2 \lambda_p \delta_p (T_b - T_g) F, \quad (19)$$

где  $F = \frac{\tanh\left(m \frac{L-d_t}{2}\right)}{m \frac{L-d_t}{2}}$  – функция эффективности ребра.

Поглощенная СК полезная энергия также включает в себя энергию, поглощенную непосредственно над трубой и равную:

$$q_t = -d_t \alpha_p (T_b - T_g). \quad (20)$$

Таким образом, поглощенная полезная энергия на единицу длины в направлении потока жидкости равна:

$$q_u = q_{op} + q_t = -(L - d_t) m^2 \lambda_p \delta_p (T_b - T_g) F - d_t \alpha_p (T_b - T_g), \text{ или} \\ q_u = -[(L - d_t) F + d_t] \alpha_p (T_b - T_g). \quad (21)$$

В конечном итоге это тепло передается жидкости. Сопротивление переносу тепла к жидкости складывается из сопротивления соединения листа с трубой и сопротивления переносу тепла от стенки трубы к жидкости. Полезная энергия и оба эти сопротивления связаны соотношением:

$$q_u = \frac{T_b - T_f}{\frac{1}{\alpha_f \pi d_{ii}} + \frac{\delta_{pt}}{\lambda_{pt} \gamma}}, \quad (22)$$

где  $T_f$  – температура теплоносителя в СК, К;

$\alpha_f$  – коэффициент теплоотдачи от стенки трубы к теплоносителю, Вт/(м<sup>2</sup> К);

$\delta_{pt}$  – средняя толщина соединения листа с трубой (можно принять равной толщине пластины СК или толщине стенки трубы), м;

$\gamma$  – длина соединения листа с трубой (можно принять равной внешнему диаметру трубы), м.

Исключим из рассмотрения температуру  $T_b$  и получим выражение для полезной энергии. Для этого решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} q_u = \frac{T_b - T_f}{\frac{1}{\alpha_f \pi d_{ii}} + \frac{\delta_{pt}}{\lambda_{pt} \gamma}}; \\ q_u = -[(L - d_t) F + d_t] \alpha_p (T_b - T_g). \end{cases} \quad (23)$$

Выражение для полезной энергии на единицу длины будет выглядеть следующим образом:

$$q_u = -F' \alpha_p (T_f - T_g) L, \quad (24)$$

где 
$$F' = \frac{1}{\alpha_p} \left( \frac{1}{\alpha_p \left[ \left(1 - \frac{d_t}{L}\right) F + \frac{d_t}{L} \right]} + \frac{L}{\alpha_f \pi d_{ii}} + \frac{L}{\frac{\lambda_{pt}}{\delta_{pt}} \gamma} \right)^{-1}. \quad (25)$$

Сравним (13) и (24):  $Q_u = \eta_0 I_s A - U_L (T_g - T_a) A = -F' \alpha_p (T_f - T_g) A$ , и выразим отсюда  $T_g$ :

$$T_g = \frac{\eta_0 I_s + U_L T_a + F' \alpha_p T_f}{F' \alpha_p + U_L}. \quad (26)$$

Подставим (26) в (24), получим:

$$q_u = \frac{F' \alpha_p}{F' \alpha_p + U_L} [\eta_0 I_s - U_L (T_f - T_a)] L. \quad (27)$$

Введем обозначения:

$$T = T_a + \eta_0 \frac{I_s}{U_L} \text{ и } U_F = \frac{U_L F' \alpha_p}{F' \alpha_p + U_L} = \left( \frac{1}{U_L} + \frac{1}{F' \alpha_p} \right)^{-1}. \quad (28)$$

Подставим (28) в (27), и получим выражение для полезной энергии, связанное со средней температурой жидкости:

$$q_u = U_F (T - T_f) L. \quad (29)$$

Полезный холод, кроме формул (8) и (12), по выражению для процесса охлаждения теплоносителя:

$$Q_u = G C_p (T_o - T_i), \quad (30)$$

где  $G$  – расход теплоносителя, кг/с;

$C_p$  – удельная массовая изобарная теплоемкость теплоносителя, Дж/(кг К);

$T_o$  – конечная температура на выходе из СК, К;

$T_i$  – начальная температура на входе в СК, К.

Используя (28), (29) и (30) выразим конечную температуру через характеристики СК:

$$dQ_u = G C_p dT_f(z) = U_F (T - T_f(z)) L n_t dz, \quad (31)$$

где  $z$  – координата длины СК, м;

$n_t$  – количество трубок в СК.

Преобразуем (31) к дифференциальному уравнению:

$$\frac{dT_f(z)}{T - T_f(z)} = \frac{U_F L n_t}{G C_p} dz. \quad (32)$$

Соответственно граничные условия будут выглядеть:

$$T_f(0) = T_i; T_f(z_{\max}) = T_o. \quad (33)$$

Решением (32) с условиями (33) будет выражение:

$$T_o = T_i + (T - T_i) \left[ 1 - \exp \left( - \frac{U_F L n_t}{G C_p} z_{\max} \right) \right]. \quad (34)$$

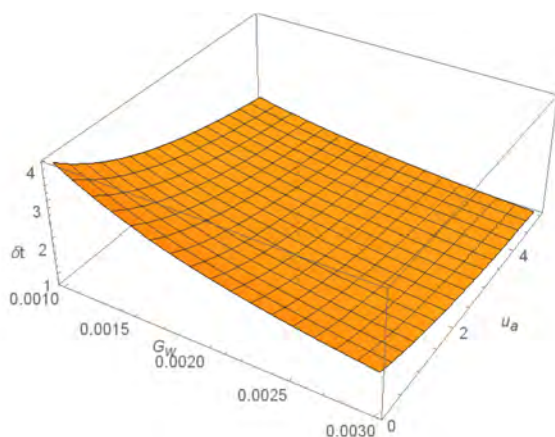
Зависимость температуры теплоносителя от координаты  $z$  можно получить аналогично (34):

$$T_f(z) = T_i + (T - T_i) \left[ 1 - \exp \left( - \frac{U_F L n_t}{G C_p} z \right) \right]$$

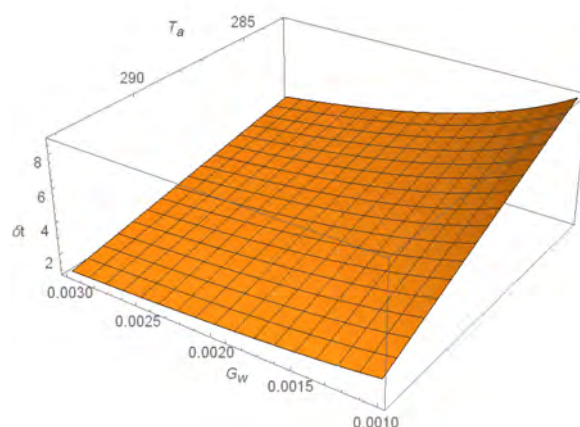
Сравнивая выражения (24), (30) и (34) и учитывая, что  $L n_t z = A(z)$ , можно получить зависимость средней температуры теплоносителя СК от его параметров:

$$T_f = T - \frac{G C_p}{U_F A} (T - T_i) \left[ 1 - \exp \left( - \frac{U_F A}{G C_p} \right) \right].$$

Результаты расчетов по формуле (34) представлены на рисунке 4.



*Рисунок 4, а – Зависимость перепада температур в СК при работе в «ночном режиме» от скорости ветра и расхода теплоносителя при  $T_a = 288 \text{ K}$*



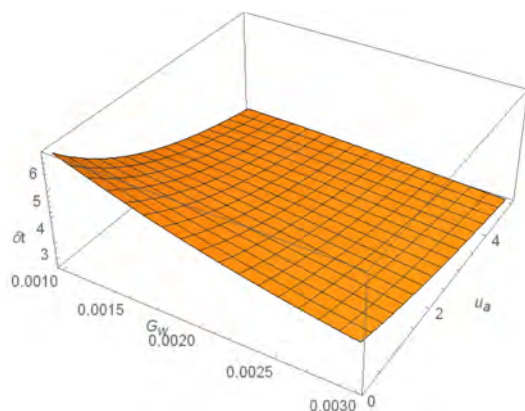
*Рисунок 4, б – Зависимость перепада температур в СК при работе в «ночном режиме» от температуры окружающей среды и расхода теплоносителя при  $u_a = 0 \text{ м/с}$*

Аналогичные результаты для неостекленного коллектора представлены на рисунке 5.

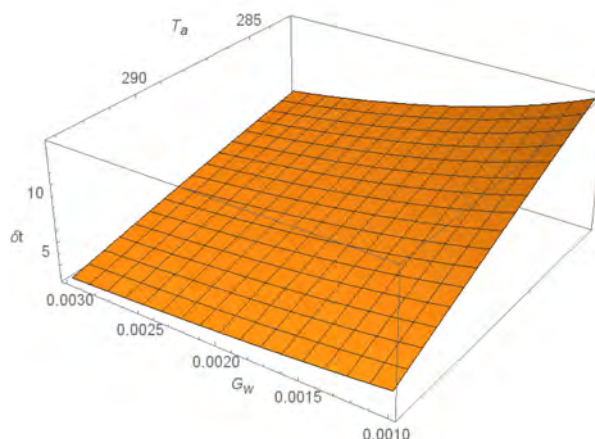
**Заключение.** В заключении можно сказать, что эффективность охлаждения теплоносителя в СК при работе в «ночном режиме» возрастает при снижении температуры и скорости окружающего воздуха, это продемонстрировано на рисунках 4 и 5. Также заметно, что эффективность охлаждения неостекленного СК выше, чем СК прозрачной изоляцией, поскольку степень черноты пластины (0,95...0,98) больше аналогичной величины у прозрачной изоляции ( $\cong 0,88$ ), т.к. у СК с прозрачной изоляцией «облучаемой» поверхностью является сама прозрачная изоляция, кроме того, присутствует дополнительное термическое сопротивление между прозрачной изоляцией и пластиной СК.

Таким образом, предложенная в статье методика позволяет рассчитывать работу СК с прозрачной изоляцией и без оной в «ночном режиме».

Работа СК в «ночном режиме» обеспечивает охлаждение теплоносителя на 2...12 °С ниже температуры окружающего воздуха и может быть применена как для комфортного кондиционирования потребителя, так и для расширения температурного диапазона работы энергетической установки по циклу Ренкина и, следовательно, повышения ее эффективности.



**Рисунок 5, а – Зависимость перепада температур в СК при работе в «ночном режиме» от скорости ветра и расхода теплоносителя при  $T_a = 288$  К**



**Рисунок 5, б – Зависимость перепада температур в СК при работе в «ночном режиме» от температуры окружающей среды и расхода теплоносителя при  $u_a = 0$  м/с**

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исследования эффективности солнечной энергетики в Крымском Федеральном Округе /М.М. Амирханов, Е.А. Наумов, И.Н. Стаценко, А.В. Дологлонян, В.Ю. Бурлаченко, Н.И. Терентьева, В.А. Сафонов, Ю.Л. Рапакский, В.Л. Власьев, С.Д. Иванов, В.А. Куликов, Е.С. Исаев, Д.Н. Гречуха, А.И. Черноусенко, С.Г. Каратаев, С.А. Набатников / Россия: тенденции и перспективы развития. Ежегодник. Вып. 11. Ч. 1. Отв. ред. В.И. Герасимов, Д.В. Ефременко. – М.: РАН. ИНИОН. Отд. науч. сотрудничества. – 2016. – С. 317–322.
2. Степанова, Е.Ю. Развитие возобновляемых источников энергии в условиях низких цен на углеводороды / Е.Ю. Степанова // Энерго– и ресурсосбережение–XXI век: Сборник материалов XIV международной научно–практической Интернет–конференции 15 марта – 30 июня. – Орел: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2016. – Режим доступа: <http://oreluniver.ru/science/confs/2016/ee/publ>. – Дата обращения: 10.06.2016.
3. Дологлонян, А.В. Теплотехническая оптимизация каскадных солнечных водонагревательных установок / А.В. Дологлонян // Материалы международной научно–технической конференции «Динамика надежность и долговечность механических и биомеханических систем», г. Севастополь, 10–14 сентября 2013 г. – Севастополь: СевНТУ. – 2012. – С. 361 – 369.
4. Методика определения дневной теплопроизводительности солнечных коллекторов: отчет о НИР (заключ.) / ТЦ «Крымэкология»; Руководитель В.В. Макаров; А.В. Дологлонян. – Шифр темы; КРЭК 205/ЗГР №0192U028800; Инв. № 205/3. – Севастополь, 1992. – 48 с.
5. Разработка чертежей стенда, программы и методики теплотехнических испытаний экспериментальных образцов солнечных коллекторов. Проведение испытаний и сравнение их по эффективности: отчет о НИР (заключ.) / ТЦ «Крымэкология»; Руководитель В.В. Макаров; А.В. Дологлонян, О.Л. Хуриленко. – Шифр темы; КРЭК 216/З ГР №0194U001152; Инв. № 216/3. – Севастополь, 1993. – 64 с.
6. Дологлонян, А.В. Теплотехническая оптимизация двухкаскадных солнечных водонагревательных установок по распределенным параметрам / А.В. Дологлонян, А.К. Сухов //Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2015. – № 4 (312). – С. 48–54.
7. Дологлонян, А.В. Теплотехническая оптимизация каскадных солнечных водонагревательных установок / А.В. Дологлонян // Вісник СевНТУ. – 2012. – № 133. – С. 361–369.
8. Дологлонян, А.В. Элементы технико–экономической оптимизации каскадных солнечных водонагревательных установок / А.В. Дологлонян //Вісник СевНТУ. – 2013. – № 137. – С. 346–350.
9. Даффи, Дж. А. Тепловые процессы с использованием солнечной энергии / Дж.А. Даффи, У.А. Бекман. – М.: Мир, 1977. – 420 с.
10. Исаченко, В.П. Теплопередача / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. – М.: Энергоиздат, 1981. – 416 с.

**Дологлонян Андрей Вартазарович**  
ФГБНУ Институт природно-технических систем  
Российской Федерации, г. Севастополь  
Кандидат технических наук, старший научный  
сотрудник  
E-mail: dologlonyan@hotmail.com

**Сухов Андрей Константинович**  
ФГБНУ Институт природно-технических систем  
Российской Федерации, г. Севастополь  
Доктор технических наук, главный научный  
сотрудник  
E-mail: dologlonyan@hotmail.com

---

A.V. DOLOGLONYAN, A.K. SUHOV

## **WORK OF THE SOLAR COLLECTOR IN «THE NIGHT MODE»**

*The method of calculation of solar collectors during the work in «the night mode» is developed.*

**Keywords:** solar collectors, the night mode.

### **BIBLIOGRAPHY**

1. Issledovaniya effektivnosti solnechnoy energetiki v Krymskom Federalnom Okruge /M.M. Amirkhanov, Ye.A. Naumov, I.N. Statsenko, A.V. Dologlonyan, V.YU. Burlachenko, N.I. Terentyeva, V.A. Safonov, YU.L. Rapatskiy, V.L. Vlashev, S.D. Ivanov, V.A. Kulikov, Ye.S. Isayev, D.N. Grechukha, A.I. Chernousenko, S.G. Karatayev, S.A. Nabatnikov / Rossiya: tendentsii i perspektivy razvitiya. Yezhegodnik. Vyp. 11. CH. 1. Otv. red. V.I. Gerasimov, D.V. Yefremenko. – M.: RAN. INION. Otd. nauch. sotrudnichestva. – 2016. – С. 317–322.
2. Stepanova, Ye.YU. Razvitiye vozobnovlyayemykh istochnikov energii v usloviyakh nizkikh tsen na uglevodorody / Ye.YU. Stepanova // Energo– i resursoberezheniye–XXI vek: Sbornik materialov KHIV mezhdunarodnoy nauchno–prakticheskoy Internet–konferentsii 15 marta – 30 iyunya. – Orel: OGU imeni I.S. Turgeneva, 2016. – Rezhim dostupa: <http://oreluniver.ru/science/confs/2016/ee/publ>. – Data obrashcheniya: 10.06.2016.
3. Dologlonyan, A.V. Teplotekhnicheskaya optimizatsiya kaskadnykh solnechnykh vodonagrevatelnykh ustanovok / A.V. Dologlonyan // Materialy mezhdunarodnoy nauchno–tekhnicheskoy konferentsii «Dinamika nadezhnost i dolgovechnost mekhanicheskikh i biomekhanicheskikh sistem», g. Sevastopol, 10–14 sentyabrya 2013 g. – Sevastopol: SevNTU. – 2012. – S. 361 – 369.
4. Metodika opredeleniya dnevnoy teploproduktivnosti solnechnykh kollektorov: otchet o NIR (zaklyuch.) / TTS «Krymekologiya»; Rukovoditel V.V. Makarov; A.V. Dologlonyan. – Shifr temy; KREK 205/3GR №0192U028800; Inv. № 205/3. – Sevastopol, 1992. – 48 s.
5. Razrabotka chertezhey stenda, programmy i metodiki teplotekhnicheskikh ispytaniy eksperimentalnykh obraztsov solnechnykh kollektorov. Provedeniye ispytaniy i sravneniye ikh po effektivnosti: otchet o NIR (zaklyuch.) / TTS «Krymekologiya»; Rukovoditel V.V. Makarov; A.V. Dologlonyan, O.L. Khurilenko. – Shifr temy; KREK 216/3 GR №0194U001152; Inv. № 216/3. – Sevastopol, 1993. – 64 s.
6. Dologlonyan, A.V. Teplotekhnicheskaya optimizatsiya dvukhkaskadnykh solnechnykh vodonagrevatelnykh ustanovok po raspredelennym parametram / A.V. Dologlonyan, A.K. Sukhov //Fundamentalnyye i prikladnyye problemy tekhniki i tekhnologii. – 2015. – № 4 (312). – S. 48–54.
7. Dologlonyan, A.V. Teplotekhnicheskaya optimizatsiya kaskadnykh solnechnykh vodonagrevatelnykh ustanovok / A.V. Dologlonyan // Visnik SevNTU. – 2012. – № 133. – S. 361–369.
8. Dologlonyan, A.V. Elementy tekhniko–ekonomicheskoy optimizatsii kaskadnykh solnechnykh vodonagrevatelnykh ustanovok / A.V. Dologlonyan //Visnik SevNTU. – 2013. – № 137. – S. 346–350.
9. Daffi, Dzh. A. Teplovyie protsessy s ispolzovaniyem solnechnoy energii / Dzh.A. Daffi, U.A. Bekman. – M.: Mir, 1977. – 420 s.
10. Isachenko, V.P. Teploperedacha / V.P. Isachenko, V.A. Osipova, A.S. Sukomel. – M.: Energoizdat, 1981. – 416 s.

**Dologlonyan Andrey Vartazarovich**  
FSBSI Institute of nature–technical problems of  
Russian Federation, Sevastopol  
Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher  
E-mail: dologlonyan@hotmail.com

**Suhov Andrey Konstantinovich**  
FSBSI Institute of nature–technical problems of  
Russian Federation, Sevastopol  
Doctor of Technical Sciences, Chief Researcher  
E-mail: dologlonyan@hotmail.com



А.А. ШАТУЛЬСКИЙ, М.Б. ЛОТОНИНА

## ПОВЫШЕНИЕ СТАБИЛЬНОСТИ СТРУКТУРЫ И СВОЙСТВ МОНОКРИСТАЛЛИТНЫХ ОТЛИВОК ИЗ НИКЕЛЕВЫХ ЖАРОПРОЧНЫХ СПЛАВОВ

*Рассмотрено влияние технологических факторов монокристаллитного литья на формирование литой микроструктуры. Предложена методика выбора параметров литья, обеспечивающих получение заданных свойств отливки.*

**Ключевые слова:** монокристаллитное литье, никелевые жаропрочные сплавы, параметры литья, эксплуатационные свойства.

В настоящее время наиболее ответственные детали газотурбинных двигателей изготавливаются методом монокристаллитного литья из никелевых жаропрочных сплавов. Однако, как показывает производственный опыт в лопатках, макроструктура которых отвечает всем требованиям технических условий, наблюдается значительный разброс механических и эксплуатационных характеристик, что позволяет говорить о том, что не менее важными факторами, определяющими конечные свойства отливок являются параметры литой микроструктуры, к которым прежде всего, можно отнести: расстояние между осями дендрита,  $\lambda$  и размер эвтектической  $\gamma/\gamma'$ -фазы,  $d_{\gamma/\gamma'}$  (рисунок 1).

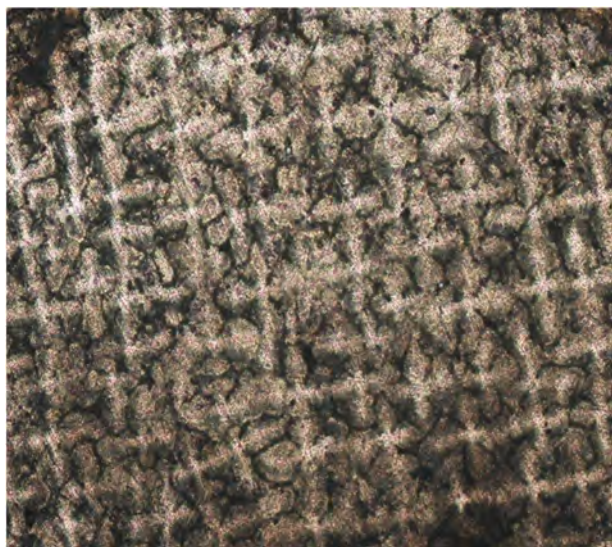


Рисунок 1 – Литая микроструктура ( $\lambda$ ) и ( $d_{\gamma/\gamma'}$ ) сплава ЖС32

К сожалению, как показал анализ литературных источников и производственных данных, надежные экспериментальные и теоретические данные о влиянии технологических режимов литья (температурного градиента,  $G$ , и скорости кристаллизации,  $R$ ), химического состава и теплофизических свойств сплава (интервал кристаллизации,  $\Delta T$ , температуры критических точек сплава,  $T_L$  и  $T_S$ ) на степень дисперсности формирующейся в процессе затвердевания литой микроструктуры для современных жаропрочных сплавов, в частности для промышленных сплавов, например ЖС32–ВИ, практически отсутствуют. Поэтому исследования, посвященные изучению влияния технологических факторов литья на структуру и свойства никелевых сплавов, являются несомненно актуальными.

В данной работе на промышленном оборудовании, используемом для получения монокристаллических отливок методом высокоскоростной направленной кристаллизации, был проведен анализ влияния технологических режимов литья (температурный градиент,  $G$ , и скорость кристаллизации,  $R$ ), химического состава (суммарное содержание легирующих



элементов) на параметры литой микроструктуры ( $\lambda$  – расстояние между осями дендрита и  $d_{\gamma/\gamma'}$  – размер эвтектической  $\gamma/\gamma'$ -фазы), а также определена зависимость влияния параметров микроструктуры на кратковременную и длительную прочность ( $\sigma_6$ ,  $\tau_{260}^{975^\circ\text{C}}$ ) сплава ЖС32–ВИ.

В ходе прямых натурных экспериментов величина температурного градиента изменялась в интервале от 10 до 200 °C/см с шагом 10 °C/см, скорость опускания формы в ванну с жидкометаллическим охладителем составляла 5, 10 и 20 мм/мин, что обуславливалось возможностями используемого промышленного оборудования. Параметры микроструктуры определялись металлографически, температурные градиенты определяли методом дифференциальной термопары, механические свойства сплава определяли на образцах, отлитых по вышеуказанным технологическим режимам.

Обобщая полученные экспериментальные данные были получены регрессионные уравнения (1 и 2), описывающие зависимость параметров микроструктуры  $\lambda$  и  $d_{\gamma/\gamma'}$  сплава ЖС32–ВИ от основных параметров литья: величины температурного градиента ( $G$ ), и скорости погружения формы в расплав–теплоноситель ( $R$ ) и уравнения, (3 и 4) описывающие влияние параметров микроструктуры на эксплуатационные характеристики материала отливок:

$$\lambda = 106,194 - 21,006 \cdot R + 4,4514 \cdot G + 0,5006 \cdot R^2 - 0,02834 \cdot G^2 + 0,0089 \cdot RG \quad (1)$$

$$d_{\gamma/\gamma'} = 1,0632 \cdot G - 3,1517 \cdot R + 0,0912 \cdot R^2 - 0,0058 \cdot G^2 - 2,7453 \quad (2)$$

$$\sigma_6 = 0,00598 \cdot \lambda^2 - 0,6228 \cdot d_{\gamma/\gamma'}^2 - 2,96 \cdot \lambda + 26,18 \cdot d_{\gamma/\gamma'} + 1209,55 \quad (3)$$

$$\tau_{260}^{975^\circ\text{C}} = 231,93 + 0,002 \cdot \lambda^2 - 0,016 \cdot d_{\gamma/\gamma'}^2 - 0,824 \cdot \lambda + 1,44 \cdot d_{\gamma/\gamma'} \quad (4)$$

Регрессионные модели (1) и (2) были получены в следующем диапазоне значений входных параметров:  $G = (10 - 200)$  °C/см;  $R = (5 - 20)$  мм/мин.

Регрессионные модели (3) и (4) были получены в следующем интервале исходных параметров:  $\lambda = (150 - 350)$  мкм;  $d_{\gamma/\gamma'} = (10 - 25)$  мкм.

Адекватность полученных моделей была подтверждена в ходе прямого эксперимента на сплаве ЖС32 в ходе производственного опробования (таблица 1).

При реализации данной методики необходимо было провести оценку теплоотводящей способности различных жидкометаллических охладителей. Моделирование процесса кристаллизации проводилось для отливки типа «лопатка» из сплава ЖС32–ВИ для двух типов охладителя (алюминий, олово) и двух состояний теплоносителя в ванне (неподвижное и перемешивание расплава в ванне).

Таблица 1 – Результаты опробования методики расчета параметров литья

№ п/п	Параметры литья		Параметры структуры				Свойства сплава			
	G, °C/мм	R мм/мин	$\lambda$ , мкм		$d_{\gamma/\gamma'}$ , мкм		$\sigma_6$ , МПа		$\tau_{260}^{975^\circ\text{C}}$ , ч	
			опыт.	расч.	Опыт.	расч.	опыт.	расч.	опыт.	расч.
1	80–100	5	189,5	186,2	31,64	27,74	1062,5	1063,7	171,72	171,55
2	80–100	5	185,2	186,2	33,99	27,74	1060,0	1063,7	165,50	171,55
3	80–100	10	130,8	152,5	21,85	24,77	1105,0	1098,4	173,00	169,49
4	80–100	10	129,1	152,5	21,4	24,77	1090,0	1110,7	172,40	170,75
5	80–100	20	68,5	106,4	18,85	21,53	1213,2	1208,4	179,24	179,93
6	80–100	20	72,2	106,4	15,08	21,53	1210,0	1195,6	182,50	183,88
Суммарная погрешность $\varepsilon$ , %			23,7		12,56		0,67		0,801	

Таким образом, была установлена значимая статистическая связь между параметрами микроструктуры  $\lambda$  и  $d_{\gamma/\gamma'}$  и технологическими режимами ВЧНК ( $G$  и  $R$ ), а также между

параметрами микроструктуры  $\lambda$  и  $d_{\gamma/\gamma'}$  и эксплуатационными свойствами материала отливки ( $\sigma_B$ ,  $\tau_{260}^{975^\circ\text{C}}$ ).

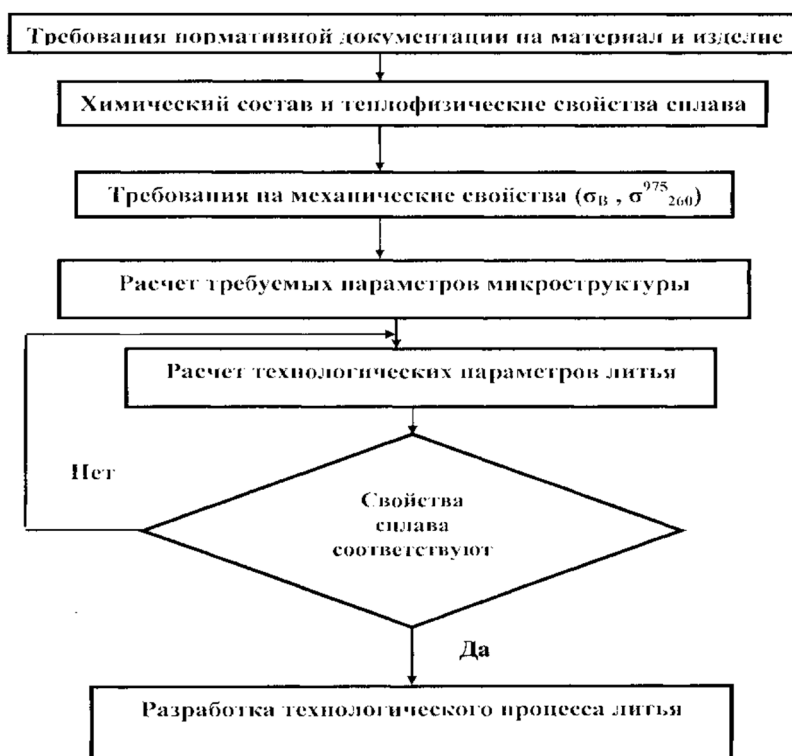


Рисунок 2 – Алгоритм выбора технологических параметров направленной кристаллизации с целью обеспечения требуемых параметров микроструктуры и свойств сплава

На базе разработанных моделей был составлен алгоритм, позволяющий получить требуемые механические и эксплуатационные свойства сплава ЖС32 на основе формирования оптимальных параметров микроструктуры при выборе соответствующих технологических режимов литья (рисунок 2).

Задача расчета скорости кристаллизации решалась методом конечных разностей, для этого отливку по высоте разделили на ряд слоев высотой  $\Delta h_i$  каждый (рисунок 3).

Допуская, что в пределах каждого слоя тело однородно, его физические свойства постоянны, температуры на границах слоев изменяются от  $T_S$  до  $T_L$ , а перенос теплоты в отливке осуществляется только теплопроводностью, было составлено балансовое уравнение вида:

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2,$$

где  $\Delta Q_1$  – количество теплоты, которое выделяется в кристаллизующемся узле, Дж;  
 $\Delta Q_2$  – количество теплоты, которое отводится от кристаллизующегося слоя отливки, Дж.

Определяя составляющие балансового уравнения, после преобразований решаем его относительно скорости кристаллизации произвольно выбранного слоя отливки:

$$R_i = \frac{\Delta h_i}{\Delta \tau_i}, \text{ при}$$

$$\Delta \tau_i = \frac{F_i \cdot C_{\text{эф}} \cdot \rho_{\text{жс}} \cdot (t_L - t_S)}{\lambda_{\phi} \cdot P_{i\phi} \cdot \frac{1}{\delta_{\phi}} \cdot (t_S - t_{\phi 2}) + \lambda_n \cdot P_{i\phi} \cdot \frac{1}{L_n} \cdot (t_{\phi 2} - t_n) + P_{i\phi} \cdot \alpha \cdot (t_n - t_{\text{жс}})}$$

где  $F_i$  – площадь сечения  $i$ -го слоя отливки,  $\text{м}^2$ ;  
 $P_{i\phi}$  – периметр сечения формы  $i$ -го слоя отливки,  $\text{м}$ ;  
 $C_{\text{эф}}$  – эффективная теплоемкость кристаллизующегося слоя отливки,  $\text{Дж/кг}\cdot\text{К}$ ;  
 $\rho_{\text{ж}}$  – плотность жидкого металла отливки,  $\text{кг/м}^3$ ;  
 $t_L$  и  $t_S$  – температуры ликвидус и солидус сплава,  $\text{К}$ ;  
 $t_{\phi 2}$  и  $t_n$  – температура наружной поверхности формы и на границе «парогазовая рубашка – жидкометаллический охладитель»,  $\text{К}$ ;  
 $\lambda_{\phi}$  и  $\lambda_n$  – теплопроводность материала формы и парогазовой рубашки,  $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ ;  
 $\delta_{\phi}$  – приведенная толщина формы,  $\text{м}$ ;  
 $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи от литейной формы в теплоноситель,  $\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$ ;  
 $L_n$  – длина свободного пробега молекул газа (приблизительно равна толщине «парогазовой рубашки»,  $\text{см}$ ;  
 $\Delta h_i$  – толщина слоя отливки,  $\text{м}$ .

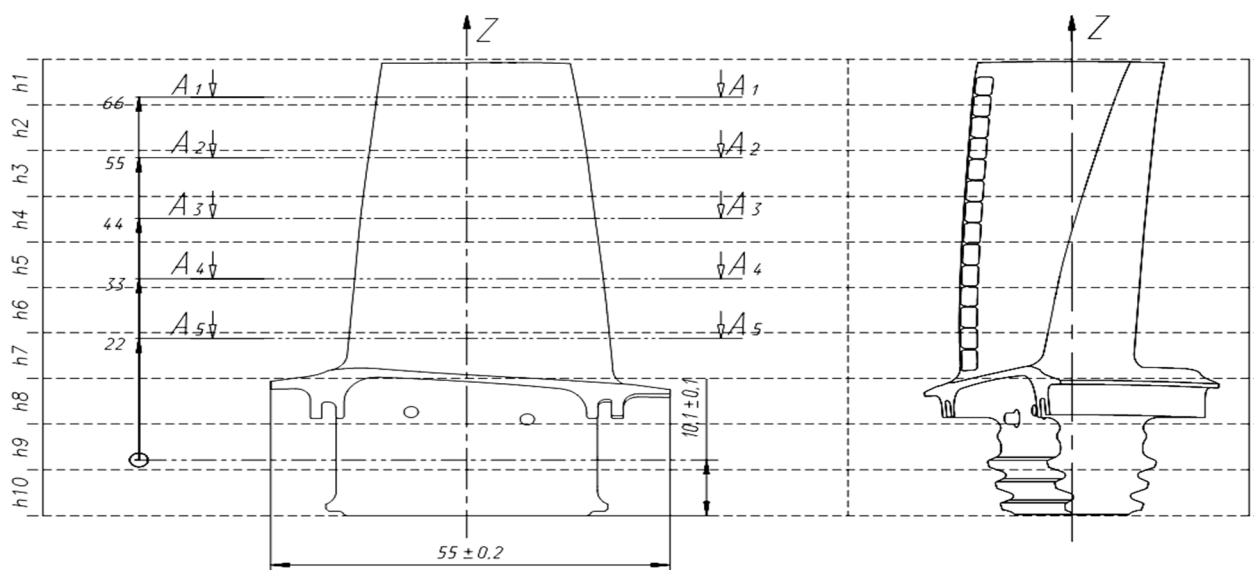


Рисунок 3 – Схема расчета скорости кристаллизации отливки

Значения коэффициента теплоотдачи ( $\alpha$ ) на поверхности формы, при разных скоростях опускания формы в кристаллизатор (5 мм/мин, 10 мм/мин, 20 мм/мин), при различных скоростях перемешивания охлаждающей жидкости (1 об/мин, 10 об/мин, 50 об/мин, 100 об/мин), а также для различных охлаждающих расплавов (алюминий, олово), рассчитывали по уравнениям подобия [1].

Расчеты и анализ полученных данных показали что:

- принудительное перемешивание жидкометаллического охладителя в охлаждающей ванне установки высокоскоростной направленной кристаллизации по сравнению обычным неподвижным состоянием позволяет заметно (на 30–40%) повысить скорость кристаллизации отливки за счет увеличения температурных градиентов, и, следовательно, обеспечить получение более дисперсной микроструктуры и повышение свойств сплава.

- расчет скорости кристаллизации отливки показал, что для обеспечения более качественных структур материала отливки необходимо обеспечивать варьировать скорость погружения формы по высоте литейной формы.

- замена расплава алюминия на расплав олова, в качестве жидкометаллического охладителя, для интенсификации процессов кристаллизации, несмотря на более низкую температуру расплава, не дает необходимого эффекта, вследствие более низких теплофизических свойств расплавленного олова;

**Выводы.** На основании обобщения экспериментальных и производственных данных разработаны математические модели, позволяющие прогнозировать параметры микроструктуры и свойства никелевого жаропрочного сплава ЖС32 в зависимости от

режимов направленной кристаллизации (G, R) и химического состава сплава на стадии технологической подготовки производства.

1. Разработан алгоритм определения режимов направленной кристаллизации в зависимости от параметров микроструктуры и требуемых механических и эксплуатационных свойств отливки.

2. Разработана методика расчета скорости кристаллизации отливки, получаемой методом ВСНК, для различных видов и состояний охлаждающей жидкости, которая позволяет определить скорость погружения литейной формы в жидкометаллический охладитель для получения требуемой степени дисперсности литой микроструктуры изготавливаемой отливки, что может служить основой для внесения изменений в конструкцию применяемых плавно-заливочных установок.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шатульский, А.А. Разработка методики оценки скорости затвердевания отливки при высокоскоростной направленной кристаллизации / А.А. Шатульский, А.С. Равочкин // Вестник РГАТУ. – 2011. – № 2(21). – С.78–83.

**Шатульский Александр Анатольевич**  
ФГБОУ ВО Рыбинский государственный  
авиационный технический университет имени П.А.  
Соловьева,  
Доктор технических наук, профессор, заведующий  
кафедрой МЛС  
E-mail: shatulsky@rgata.ru

**Лотонина Мария Борисовна**  
ФГБОУ ВО Рыбинский государственный  
авиационный технический университет имени П.А.  
Соловьева,  
Кандидат технических наук, ведущий специалист  
E-mail: shatulsky@rgata.ru

---

A.A. SHATULSKY, M.B. LOTONINA

### IMPROVING THE STABILITY OF STRUCTURE AND PROPERTIES OF CASTING MONOCRYSTALLITE NICKEL SUPERALLOY

*In this work we consider influence of single-crystal casting technological factors on cast microstructure formation. We suggest cast parameters selecting procedure, providing obtaining of present properties of castings.*

**Keywords:** single-crystal cast, Nickel-based high-temperature alloys, service properties.

### BIBLIOGRAPHY

1. Shatulskiy, A.A. Razrabotka metodiki otsenki skorosti zatverdevaniya otlivki pri vysokoskorostnoy napravlennoy kristallizatsii / A.A. Shatulskiy, A.S. Ravochkin // Vestnik RGATU. – 2011. – № 2(21). – S.78–83.

**Shatulsky Aleksandr Anatolyevich**  
FGBOU IN Rybinsk State Aviation Technical University,  
P.A. Solovyov  
Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the MLS  
E-mail: shatulsky@rgata.ru

**Lotonina Maria Borisovna**  
FGBOU IN Rybinsk State Aviation Technical University,  
P.A. Solovyov  
Candidate of Technical Sciences, a leading specialist.  
E-mail: shatulsky@rgata.ru

К.Ю. ФЕДОРОВСКИЙ, Н.К. ФЕДОРОВСКАЯ

## ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ ОХЛАЖДЕНИЯ ЭНЕРГОУСТАНОВОК СУДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИМПАКТНЫХ СТРУЙ

*Представлены результаты экспериментальных исследований по обеспечению теплоотдачи на внутренней поверхности судовой обшивки за счет использования импактных струй. С учетом имеющихся конструктивных особенностей выполнено моделирование и исследование течения и теплоотдачи затопленных струй, натекающих на плоскую поверхность и радиально растекающихся после этого. Проведенные визуальные исследования выявили различные режимы радиального течения пристенной струи. Определены критические числа Рейнольдса и соответствующие обобщающие уравнения подобия, описывающие теплоотдачу.*

**Ключевые слова:** теплоотдача, импактная струя, режимы течения, коэффициент теплоотдачи, экологический ущерб.

### Обозначения:

$d$  – внутренний диаметр сопла;

$h$  – зазор между кромкой сопла (стенкой экрана) и поверхностью;

$R$  – радиус вписанной окружности теплообменной поверхности;

$W$  – расход жидкости.

Числа подобия:

$Nu$  – Число Нуссельта;

$Pr$  – число Прандтля;

$Re$  – число Рейнольдса.

Греческие символы:

$\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;

$\xi$  – коэффициент местного сопротивления;

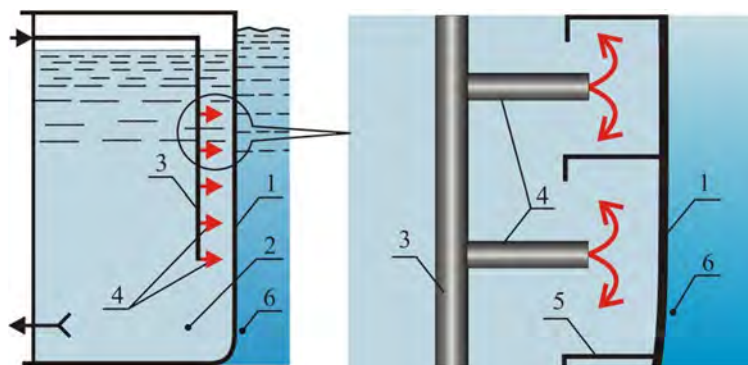
индексы:

$s$  – поверхность;

$d$  – диаметр;

$h$  – зазор.

**Введение.** Широко распространенные в настоящее время разомкнутые системы охлаждения судовых энергетических установок предусматривают потребление забортной воды. Содержащиеся в этой воде планктон, икринки и рыбная молодь, попав в систему охлаждения и пройдя фильтры, арматуры, насосы и теплообменники, практически полностью погибают. Тем самым наносится существенный экологический ущерб рыбным запасам морей и внутренних водоемов.



**Рисунок 1 – Схема теплоотвода через обшивку корпуса судна:**

1 – обшивка корпуса судна; 2 – цистерна; 3 – коллектор подвода охлаждаемой воды;

4 – сопла; 5 – элементы набора; 6 – забортная вода

Решение проблемы создания высокоэффективных экологически безопасных систем охлаждения связано с разработкой и внедрением замкнутых систем охлаждения, исключая прием забортной охлаждающей воды. Для отвода теплоты может быть использована подводная часть судовой обшивки (рисунок 1). Как вариант для этого могут быть использованные имеющиеся на судне цистерны, например, балластные. Важным преимуществом такого решения является простота перевода уже существующих разомкнутых систем на работу по замкнутому контуру. Нагретая в энергетическом оборудовании вода сбрасывается в цистерну, передавая свою теплоту через судовую обшивку забортной воде.

Обычно в цистерне находится практически неподвижная вода. Теплоотдача от охлаждаемой воды к внутренней поверхности судовой обшивки осуществляется при свободной конвекции. Хорошо известно, что значения коэффициентов теплоотдачи при этом оказываются сравнительно малыми. Это требует разработки эффективного метода передачи теплоты через судовую обшивку. Применение импактных струй позволяет сравнительно простыми средствами существенно увеличить теплоотдачу.

Отличительной особенностью обшивки корпуса судна является наличие на внутренней стороне силовых элементов, расположенных в большинстве случаев перпендикулярно к поверхности обшивки (рисунок 1). Подвод жидкости осуществляется в пространство между элементами набора.

Совершенно ясно, что такая конструкция будет сказываться на характере течения импактной струи и процессе теплоотдачи. Возникает необходимость в определении особенностей протекающих процессов и соответствующих зависимостей, описывающих теплоотдачу.

Импактные струи достаточно широко используются в практике. С их помощью сравнительно просто могут быть организованы процессы нагрева или охлаждения поверхностей. При этом достигаются достаточно высокие значения коэффициентов теплоотдачи. На выходе из сопла формируется осесимметричная струя, которая после соударения с поверхностью преобразуется в расходящуюся радиальную пристенную струю. При этом на происходящие процессы оказывают влияние: конструктивные особенности системы сопло – поверхность, число Рейнольдса и др. [1–4].

Для получения необходимых сведений были предприняты экспериментальные исследования.

**Цель исследования.** Определение особенностей происходящих процессов в замкнутых системах охлаждения с использованием импактных струй, а также зависимостей, описывающих теплоотдачу к обшивке корпуса судна.

**Задачи исследования.** Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

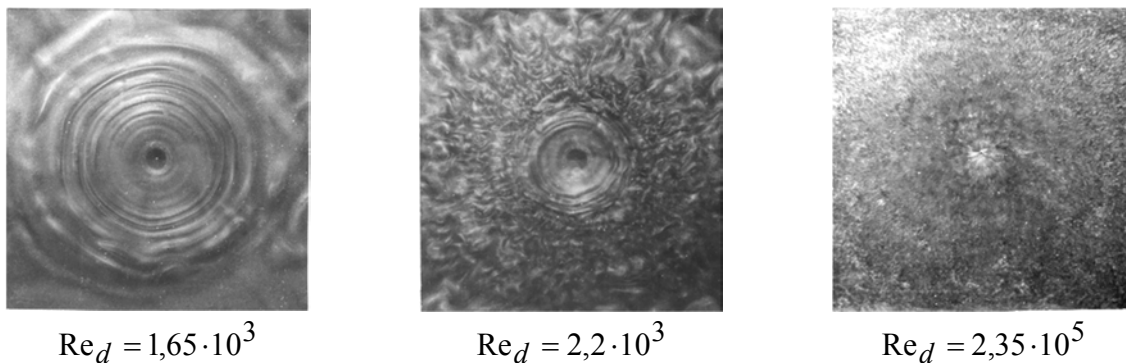
4. Определение особенностей процессов взаимодействия затопленной импактной струи с поверхностью.
5. Проведение экспериментальных исследований процессов теплоотдачи пристенной струи.
6. Анализ и обобщающая обработка полученных экспериментальных данных.

**Экспериментальное исследование.** Для более полного понимания происходящих процессов были проведены в комплексе визуальные и теплотехнические исследования. Для этого были созданы соответствующие экспериментальные установки.

Используемая модель визуальных исследований, представляла собой прямоугольную емкость с прозрачной стенкой размером 0,25х0,25м. Эта стенка имитировала обшивку корпуса судна. С внутренней стороны перпендикулярно к стенке в центре было установлено подводящее сопло. Имелась возможность изменять расстояние от сопла до стенки. Емкость была полностью заполнена водой, что создавало условия формирования затопленной струи. Установка обеспечивала регулирование расхода жидкости через сопло. При этом достигалось максимальное значение скорости воды в сопле 1,8 м/с, что соответствовало значению числа Рейнольдса  $2,4 \cdot 10^5$ . Для визуализации течения в воду добавлялись

затемняющая жидкость на основе воды, серебрин и поверхностно-активное вещество. Наблюдения осуществлялись с наружной стороны прозрачной стенки, которая дополнительно подсвечивалась направленным источником света.

Результаты выполненных визуальных исследований при различных числах Рейнольдса показаны на рисунке 2. Выходящая из сопла жидкость ударяется о поверхность и далее растекается в радиальных направлениях, образуя пристенную радиальную струю.



*Рисунок 2 – Характер течения пристенной струи при сопловом подводе жидкости*

Наглядно видно, что по мере изменения числа  $Re$  соответствующим образом изменялся и характер течения жидкости вдоль поверхности. Так, при  $Re_d = 1,65 \cdot 10^3$  наблюдается ламинарное течение жидкости. При этом четко наблюдались малоподвижные кольцевые структуры, являющиеся следствием ударного взаимодействия импактной струи с поверхностью. По мере увеличения числа Рейнольдса размер кольцевых структур уменьшается и наблюдается более интенсивное их движение наружу. На наружной части колец возникают турбулентные пульсации, которые далее имеют тенденцию к затуханию. При  $Re_d$ , равном  $2,4 \cdot 10^5$ , по всей площади имеют место развитые турбулентные вихри. Их интенсивность максимальна в центральной части и снижается по мере удаления от центра.

Проведенные визуальные исследования позволили определить, что нижнее критическое число Рейнольдса лежит приблизительно в области значений  $(1...2) \cdot 10^4$ , а верхнее – в области значений около  $1 \cdot 10^5$ .

В ходе непосредственного наблюдения за происходящими процессами в глубине, на удалении от стенки, были выявлены вторичные течения, направленные к соплу. Это объяснялось подсосом жидкости из окружающего пространства, что подтверждает существующие представления о движении жидкости в области выходной кромки сопла [1–3].

Теплотехнических исследований проводились на специально созданной экспериментальной модели (рисунок 3). Она состояла из двух частей: полости 1 – горячей охлаждаемой воды и полости 2 – холодной охлаждающей воды. Размеры первой составляли  $0,5 \times 0,5 \times 0,5$  м, а второй –  $0,5 \times 0,5 \times 0,2$  м. Полости имели одну общую стенку 3 размером  $0,5 \times 0,5$  м толщиной 5 мм, через которую осуществлялась передача теплоты. Подвод горячей воды в центр стенки 3 выполнялся через теплоизолированный патрубок 4 с резьбовым окончанием, куда могли присоединяться различные насадки, в частности сопло. Была предусмотрена возможность изменения расстояния  $h$  от торца сопла до стенки 3. Полость 1 была полностью заполнена водой. Все боковые поверхности экспериментальной модели были тщательно теплоизолированы.

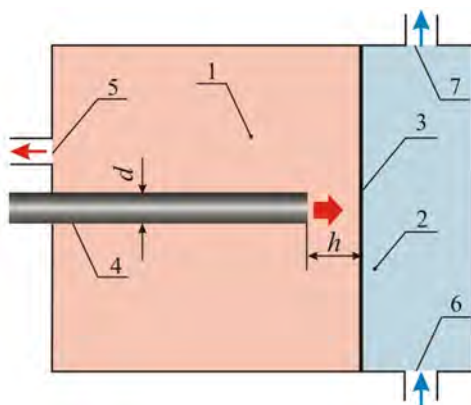
Температура стенки 3 со стороны сопла измерялась семью хромель-копелевыми термопарами с диаметром термоэлектродов 0,15 мм. Измерение термо-ЭДС осуществлялось с помощью потенциометра. На модели измерялись температуры входа и выхода горячей и холодной воды.

Экспериментальная модель подключалась к теплогидравлическому стенду. Была предусмотрена возможность изменения расхода горячей воды. Максимальное значение этого расхода достигало  $11 \text{ м}^3/\text{ч}$ . Имелась система замера расхода теплоносителя. Электрический

нагреватель системы позволял задавать различные мощности. В ходе экспериментов нагрев воды достигал 80...85°C, что соответствует максимально возможному температурному уровню в реальных условиях.

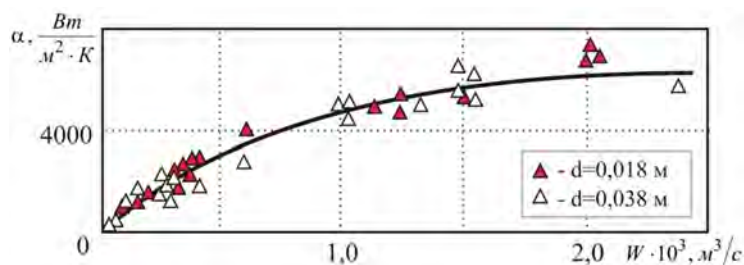
Теплотехнические исследования проводились на соплах с внутренним диаметром 18 и 38 мм. Расстояние  $h$  от сопла до поверхности задавалось равным 5 мм, 12 мм и 20 мм. Зависимость среднего по поверхности коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  от расхода  $W$  жидкости через сопло при различных диаметрах показана на рисунке 4.

Увеличение  $W$  приводит к росту значений  $\alpha$ . Однако, не выявлена связь коэффициента теплоотдачи и диаметра сопла  $d$ . На рисунке 5 показана зависимость теплоотдачи при различных расходах  $W$  и расстояниях  $h$ . В диапазоне  $h/d = 0,13...0,53$  значения  $\alpha$  не зависят от  $h$ .

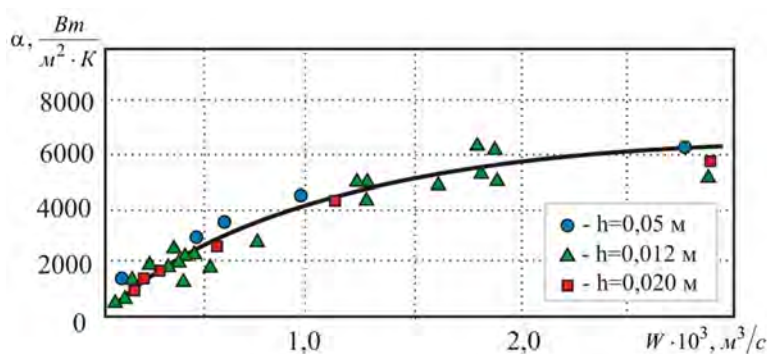


**Рисунок 3 – Схема экспериментальной модели теплотехнических исследований:**

1 – полость горячей (охлаждаемой) воды; 2 – полость охлаждающей воды; 3 – теплопередающая стенка;  
4, 5 – соответственно патрубки подвода и отвода горячей воды;  
6, 7 – соответственно патрубки подвода и отвода охлаждающей воды



**Рисунок 4 – Зависимость коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  от расхода жидкости  $W$ , подаваемого через сопло при различных его диаметрах  $d$  ( $R = 0,25$  м;  $h = 0,012$  м)**



**Рисунок 5 – Зависимость коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  при сопловом подводе от расхода жидкости  $W$  ( $d = 0,038$  м;  $R = 0,25$  м)**



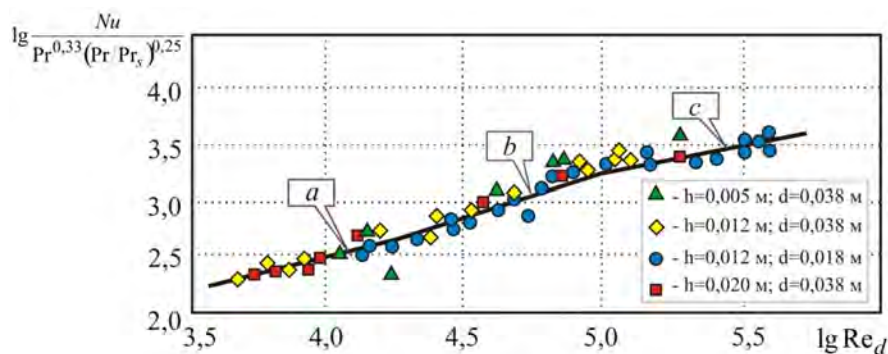


Рисунок 6 – Зависимость  $\lg \frac{Nu}{Pr^{0,33} (Pr/Pr_s)^{0,25}}$  от  $\lg Re_d$  при  $R = 0,25$  м;  $Re_d = 5 \cdot 10^3 \dots 4 \cdot 10^5$ ;  
 $Pr = 2,54 \dots 4,87$ ;  $Pr/Pr_s = 0,66 \dots 0,96$ ;  $h/d = 0,13 \dots 0,67$ ;  $R/d = 6,6 \dots 13,9$ ;  $a - Re_d = 5 \cdot 10^3 \dots 2 \cdot 10^4$ ;  
 $b - Re_d = 2 \cdot 10^4 \dots 10^5$ ;  $c - Re_d = 10^5 \dots 4 \cdot 10^5$

Результаты обобщающей обработки экспериментальных данных показаны на рисунке 6.

С учетом результатов визуальных исследований экспериментальные точки аппроксимируются линией с двумя изломами. Каждый участок этой линии соответствует различным режимам течения. Причем, по данным обобщающей обработки нижним критическим числом Рейнольдса следует считать значение  $2 \cdot 10^4$ , а верхним – значение  $1 \cdot 10^5$ . Для выделенных участков аппроксимирующей линии определены следующие уравнения подобия:

при  $Re_d = 5 \cdot 10^3 \dots 2 \cdot 10^4$

$$Nu = 5,7 \cdot Re_d^{0,45} Pr^{0,33} \left( \frac{Pr}{Pr_s} \right)^{0,25}; \quad (1)$$

при  $Re_d = 2 \cdot 10^4 \dots 10^5$

$$Nu = 0,15 \cdot Re_d^{0,83} Pr^{0,33} \left( \frac{Pr}{Pr_s} \right)^{0,25}; \quad (2)$$

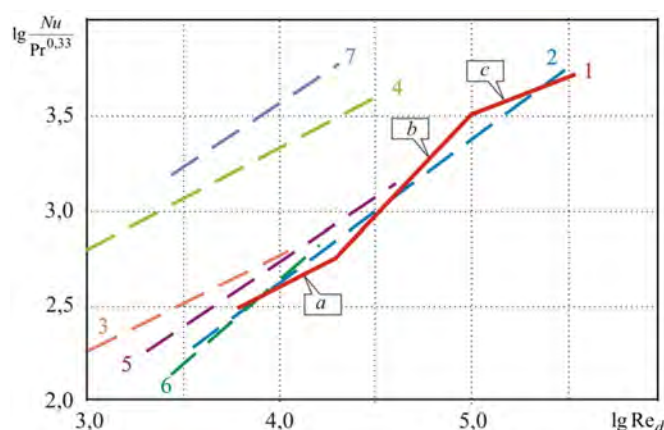
при  $Re_d = 10^5 \dots 4 \cdot 10^5$

$$Nu = 26 \cdot Re_d^{0,4} Pr^{0,33} \left( \frac{Pr}{Pr_s} \right)^{0,25}. \quad (3)$$

Зависимости справедливы при:  $Pr = 2,54 \dots 4,87$ ,  $Pr/Pr_s = 0,66 \dots 0,96$ ,  $h/d = 0,13 \dots 0,67$ ;  $R/d = 6,6 \dots 13,9$ .

Проведенные визуальные исследования позволили выявить различные режимы течения жидкости вдоль теплообменной поверхности.

Совместный анализ результатов визуальных и теплотехнических исследований при сопловом подводе позволил определить границы различных режимов течения жидкости. При этом нижнее критическое число  $Re_d = 2 \cdot 10^3$ , а верхнее –  $10^5$ . Для каждого из режимов течения получены описывающие теплоотдачу зависимости. На рисунке 7 дано сопоставление этих зависимостей с известными. Имеется хорошее согласование с работой [4], где средняя теплоотдача определялась для импактной струи в диапазоне  $h/d = 0,25 \dots 1,0$ . Максимальное отличие результатов в области  $Re_d = 5 \cdot 10^3 \dots 4 \cdot 10^5$  не превышает 30...35 %. Линия 2 является как бы осредняющей ломаной линии 1, описывающей результаты настоящего исследования. Это объясняется тем, что в работе [8] не был учтен факт смены режимов течения жидкости, вследствие чего полученный экспериментальный материал аппроксимирован в логарифмических координатах прямой линией.



**Рисунок 7 – Сопоставление результатов исследования теплоотдачи импактной струи при  $h = 0,020$  м;  $R = 0,25$  м;  $d = 0,038$  м:**

1: а – зависимость (1); б – зависимость (2); с – зависимость (3)  
 2 – [4] для  $h/d = 0,25...10$ ; 3 – [5] для  $h/d = 0,5...6,2$ ; 4 – [6, 7]; 5 – [8];  
 6 – [9] для  $h/d = 3...8$ ; 7 – [10] для  $D/d = 2...16$

В полученных в данном исследовании зависимостях (1) – (3), максимальное значение показателя степени при числе  $Re_d$ , равное 0,83, имеет место для переходной области ( $Re_d = 2 \cdot 10^3...10^5$ ). При ламинарном и турбулентном течениях эти показатели равны соответственно 0,45 и 0,4. Полученные результаты для ламинарного течения следует сопоставить с результатами работ [3, 4, 8]. По мере смещения исследуемой области чисел Рейнольдса в сторону меньших значений угол наклона линии снижается и, в случае работы [5], становится практически равным нашему случаю. Определенное исключение в этом плане составляют результаты работы [9], где угол наклона достаточно велик, но не превышает значение для переходной области. Здесь могло сказаться конструктивное исполнение подводящего патрубка или повышенная турбулизация подводимого потока [2].

**Выводы.** В результате проведенных визуальных исследований выявлен различный характер течения пристенной струи. Это позволило определить соответствующие каждому режиму обобщающие зависимости по теплоотдаче.

В конечном счете, сравнительно простыми методами решается исходная задача интенсификации теплопередачи через обшивку корпуса судна по сравнению со случаем теплоотдачи при свободной конвекции.

Полученные результаты позволили разработать необходимую методику расчета таких устройств тепловода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carcasci, C. An experimental investigation on air impinging jets using visualization methods / C. Carcasci // Int. J. Therm. Sci. – 1999. – Vol. 38. – S. 808 – 818.
2. Дыбан, Е.П. Конвективный теплообмен при струйном обтекании тел / Е.П. Дыбан, А.И. Мазур. – Киев: Наук. думка, 1982. – 303 с.
3. Исаченко, В.П. Струйное охлаждение / В.П. Исаченко, В.И. Кушнырев. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 216 с.
4. Höppner, G. Der-mittlere Wärme-und Stoffübergang bei der senk-rechten Ausblasung ebener isothermer Flächen mit turbulenten Einzelstrahlen und Strahlduschen / G. Höppner // Luft-und Kältetechnik. – 1970. – Vol. 6. – № 6. – S. 283–289.
5. Брдлик, П.М. Теплообмен между осесимметричной струей и пластиной, расположенной нормально к потоку / П.М. Брдлик, В.К. Савин // ИФЖ. – 1965. – 8. – № 2. – С. 146–155.
6. Гардон, Р. Характеристики теплопередачи при ударе двумерных воздушных струй / Р. Гардон, К. Акфират // Тр. Америк. об-ва инж.-мех. Теплопередача. – 1966. – Т. 88. – № 1. – С. 110 – 118.
7. Gardon, R. The role of turbulence in determining the heat transfer characteristics of impinging jets / R. Gardon, J. Akfirat // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 1965. – Vol. 8. – № 10. – S. 1261 – 1272.
8. Sitharamayya, S. Heat transfer between an axisymmetric jet and a plate held normal to the flow / S. Sitharamayya, K. Subba Raju // Can. J. Chem. Eng. – 1969. – Vol. 47. – № 4. – S. 365 – 368.

9. Pawlowski, M. Badania zaleznosci wnikania ciepla ad mocy przetlaczania przy strumieniowym skierowaniu u powietrza na plaska powierzchnie / M. Pawlowski, E. Suszek, B. Siwon // Inz. chem. – 1979. – Vol. 9. – № 1. – S. 179 – 192.

10. Vallis, E.A. Radial distribution on convective heat transfer coefficient between an axisymmetric turbulent jet and a flat plate held normal to the flow / E.A. Vallis, M.A. Patrick, A.A. Wragg // Proc. 6<sup>th</sup> Int. Heat Transfer Conf. Toronto. – 1978. – Vol. 5. – Pap. FC (b)–21. – S. 297 – 303.

**Федоровский Константин Юрьевич**

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», г. Севастополь,  
Доктор технических наук, профессор, заведующий  
кафедрой «Энергоустановки морских судов и сооружений»  
299053, г. Севастополь, ул. Университетская, 33  
Тел. +79787096617  
E-mail: fedkonst@rambler.ru

**Федоровская Надежда Константиновна**

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», г. Севастополь,  
Сотрудник тематической лаборатории  
«Эффективные энергоустановки и технологии»  
299053, г. Севастополь, ул. Университетская, 33  
Тел. +79787096536  
E-mail: n.fedorovskaya14@mail.ru

---

K.Yu. FEDOROVSKIY, N.K. FEDOROVSKAYA

**CLOSED COOLING SYSTEM POWER PLANTS  
SHIPS USING IMPACT JET**

*This paper presents the results of experimental studies on providing heat to the inner surface of the shell plating of the ship through the use of impact jets. In this work, we carried out (by taking into account the existing design features) a modeling and a study of the flow and heat transfer of flooded jets that flow over a flat surface and then spread radially. The visual study revealed different patterns of radial flow of the wall jet. Critical Reynolds criteria and relevant summarizing similarity equations describing heat transfer are determined.*

**Keywords:** heat transfer, impact jet, flow patterns, heat transfer coefficient, environmental damage.

**BIBLIOGRAPHY**

1. Carcasci, C. An experimental investigation on air impinging jets using visualization methods / C. Carcasci // Int. J. Therm. Sci. – 1999. – Vol. 38. – S. 808 – 818.
2. Dyban, E.P. Konvektivniy teploobmen pri struinom obtekanii tel [Convective heat transfer during a jet flow around objects] / E.P. Dyban, A.E. Mazur. – Kiev: Naukova dumka, 1982. – 303 c.
3. Isachenko, V.P. Struynoe okhlajdenie [Jet-based Cooling] / V.P. Isachenko, V.I. Kushnyrev. – Energoatomizdat (Moscow), 1984. – 216 c.
4. Höppner, G. Der-mittlere Wärme-und Stoffübergang bei der senk-rechten Ausblasung ebener isothermer Flächen mit turbulenten Einzelstrahlen und Strahlduschen / G. Höppner // Luft-und Kältetechnik. – 1970. – Vol. 6. – № 6. – S. 283–289.
5. Brdlik, M.P. Heat Exchange between an Axisymmetric Jet and a Plate Held Normal to the Flow / M.P. Brdlik, V.K. Savin // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, vol. 8. – 1965. – 8. – № 2. – S. 146–155.
6. Gardon, R., Heat Transfer Characteristics of Impinging Two-dimensional Air Jets // R. Gardon, K. Akfirat, Journal of Heat Transfer. – 1966. – T. 88. – № 1. – S. 110 – 118.
7. Gardon, R. The role of turbulence in determining the heat transfer characteristics of impinging jets / R. Gardon, J. Akfirat // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 1965. – Vol. 8. – № 10. – S. 1261 – 1272.
8. Sitharamayya, S. Heat transfer between an axisymmetric jet and a plate held normal to the flow / S. Sitharamayya, K. Subba Raju // Can. J. Chem. Eng. – 1969. – Vol. 47. – № 4. – S. 365 – 368.
9. Pawlowski, M. Badania zaleznosci wnikania ciepla ad mocy przetlaczania przy strumieniowym skierowaniu u powietrza na plaska powierzchnie / M. Pawlowski, E. Suszek, B. Siwon // Inz. chem. – 1979. – Vol. 9. – № 1. – S. 179 – 192.
10. Vallis, E.A. Radial distribution on convective heat transfer coefficient between an axisymmetric turbulent jet and a flat plate held normal to the flow / E.A. Vallis, M.A. Patrick, A.A. Wragg // Proc. 6<sup>th</sup> Int. Heat Transfer Conf. Toronto. – 1978. – Vol. 5. – Pap. FC (b)–21. – S. 297 – 303.

**Fedorovskiy Konstantin Yurevich**

Sevastopol State University,  
Doctor of Techn. Sciences, Professor, Head of the  
department «Power plants marine vessels and structures»  
Sevastopol, Universitetskaya, 33  
Tel. +79787096617  
E-mail: fedkonst@rambler.ru

**Fedorovskaya Nadezhda Konstantinovna**

Sevastopol State University,  
Employee of laboratory of efficient power plants and  
technologies Sevastopol, Universitetskaya, 33  
Tel. +79787096536  
E-mail: n.fedorovskaya14@mail.ru

# **МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ** **И ИНСТРУМЕНТЫ**

УДК 621.787.4

С.Ю. РАДЧЕНКО, Д.О. ДОРОХОВ, И.М. ГРЯДУНОВ

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ МИКРОСТРУКТУРЫ И ПАРАМЕТРА МИКРОТВЁРДОСТИ СПЛАВА БрОЦС 5–5–5 ОТ СТЕПЕНИ ДЕФОРМАЦИИ**

*Представлен комплексный подход к исследованию зависимости изменения микроструктуры и параметра микротвёрдости сплава БрОЦС 5–5–5 от степени полученной деформации. Полученные результаты коррелируются с проводимыми ранее исследованиями, однако, дают новые знания об изменении микроструктуры и значения показателя микротвёрдости в зависимости от степени полученной деформации.*

**Ключевые слова:** микроструктура, сплав, деформация, комплексное локальное нагружение, микротвёрдость.

**Введение.** Интенсификация условий эксплуатации деталей машин и элементов конструкций ставит новые задачи перед современным машиностроением, к деталям и узлам машин предъявляются требования повышенного ресурса эксплуатации, что достигается применением того или иного способа упрочняющей обработки, обеспечивающего оптимальные значения параметров прочности при минимизации затрат на производство.



Рисунок 1 – Способы упрочняющей обработки

Всего выделено 6 групп способов упрочняющей обработки (рисунок 1):

1 – с образованием пленки на поверхности. Суть способов данной группы заключается в нанесении дополнительных покрытий на поверхность обрабатываемого изделия с условием сохранения его исходного химического состава. Сюда входят: осаждение химической реакцией (оксидирование, сульфидирование, фосфатирование, нанесение упрочняющего смазочного материала, осаждение из газовой фазы); осаждение из паров (термическое испарение тугоплавких соединений, катодно-ионная бомбардировка, прямое электронно-лучевое испарение, реактивное электронно-лучевое испарение, электронно-химическое испарение); электролитическое осаждение (хромирование, никелирование, электрофорез, никельфосфатирование, борирование, борохромирование,

хромофосфатирование); напыление износостойких соединений (плазменное напыление порошковых материалов, детонационное напыление, электродуговое напыление, лазерное напыление, вихревое напыление, индукционное припекание порошковых материалов).

2 – с изменением состава поверхностного слоя. Суть способов заключается в изменении химического состава поверхностного слоя материала обрабатываемой детали. Сюда входят: диффузионное насыщение (борирование, цианирование, азотирование, нитроцементация и т.п.); химическое и физико–химическое воздействие (химическая обработка, ионная имплантация, электроискровая обработка и т.д.).

3 – с изменением структуры поверхностного слоя:

3.1 физико–термическая обработка (лазерная закалка, плазменная закалка);

3.2 электрофизическая обработка (электроконтактная, электроэрозионная, магнитная обработка);

3.3 механическая обработка (упрочнение вибрацией, фрикционно–упрочняющая обработка, дробеструйная, обработка взрывом, термомеханическая, электромеханическая);

3.4 наплавка легированным элементом (газовым пламенем, электрической дугой, плазмой, лазерным лучом, пучком ионов и т.д.).

4 – с изменением энергетического запаса поверхностного слоя:

4.1 обработка в магнитном поле (термомагнитная обработка, обработка импульсным и статическим магнитными полями);

4.2 обработка в электрическом поле.

5 – с изменением микрогеометрии (шероховатости) поверхностного слоя:

5.1 обработка резанием (точение, шлифование, сверхскоростное резание);

5.2 пластическое деформирование (накатывание, обкатывание, раскатывание, выглаживание, вибронакатывание, вибровыглаживание, калибрование, центробежно–ударное упрочнение, виброударное упрочнение и т.д.);

5.3 комбинированные методы (анодно–механическая обработка, поверхностное легирование с выглаживанием, резание с воздействием ультразвуковых колебаний, магнитно–абразивная обработка и т.д.).

6 – с изменением структур по объёму материала:

6.1 термообработка при положительных температурах (закалка, отпуск, улучшение, закалка токами высокой частоты (ТВЧ), нормализация, термомагнитная обработка);

6.2 криогенная обработка (закалка с обработкой холодом, термоциклирование);

6.3 объёмное пластическое деформирование (кручение под высоким давлением, равноканальное угловое прессование, винтовая экструзия).

Для способов поверхностного упрочнения деталей свойственны такие недостатки, как малая толщина упрочнённого слоя, высокие межфазные напряжения, отсутствие градиента при переходе от упрочнённой к неупрочнённой зоне, большие энергозатраты на выполнение отдельных видов упрочняющей обработки, например, термической или обработки воздействием электрическим током.

Для способов объёмного упрочнения, которые входят в шестую группу, свойственны такие недостатки, как дорогостоящее и энергоёмкое оборудование, упрочнение всего объёма детали, что приводит к её охрупчиванию.

Наиболее популярными способами упрочняющей обработки пластическим деформированием являются: дробеструйная обработка, выглаживание, обкатка. Преимущество дробеструйной обработки заключается в возможности обработки поверхностей, имеющих сложную геометрию, однако, при обработке внутренних поверхностей возникают определённые проблемы, связанные с невозможностью размещения инструмента на позиции обработки. Для выглаживания и обкатки проблем с обработкой внутренних поверхностей, даже малого размера, нет. Однако для всех трёх способов свойственен один существенный недостаток – нарушение макрогеометрии получаемого изделия.

Следует сказать, что перспективным направлением является совмещение упрочняющей обработки выглаживанием и обкатыванием в единый процесс, что в свою очередь позволит достигать больших степеней деформации за счёт многоцикловости процесса обработки.

Проводимые исследования являются актуальными в виду потребности широкого спектра отраслей народного хозяйства в деталях машин или конструкционных элементах,

обладающих уникальными сочетаниями механических и эксплуатационных параметров, например, таких, как сочетание прочности и износостойкости.

Примером таких деталей могут служить вкладыши подшипников скольжения. Как правило, их изготавливают литьём с последующей механической обработкой, после чего на рабочую поверхность наносится антифрикционный слой упрочняющего покрытия. Однако он достаточно тонкий, о чём свидетельствует достаточно быстрый его износ и образование таких дефектов, как выкрашивание, вырывы или простое вытирание.

**Цель исследования** – проведение исследования изменения микроструктуры антифрикционного сплава БрОЦС 5–5–5 от степени деформации.

**Задачи исследования.** Для достижения поставленной цели сформированы следующие задачи:

1. Составление схемы и плана экспериментальных исследований;
2. Проведение экспериментальных исследований и подготовка полученных образцов к лабораторным исследованиям;
3. Выполнение лабораторных исследований, анализ и систематизация полученных результатов.

**Объект исследования.** Объектом исследования выбраны:

1. Проводимые ранее экспериментальные исследования;
2. Математическое моделирование упрочняющей обработки

**Теоретическое исследование.** Для теоретического исследования изучаемых процессов применялся пакет прикладных программ (ППП) «ШТАМП», разработанный авторским коллективом ФГБОУ ВО «ОГУ имени И.С. Тургенева» с учётом самых последних достижений из области обработки металлов давлением и механики твёрдого тела.

В отличие от широко известных ППП, применяемых для проектирования и расчётов процессов обработки давлением, ППП «ШТАМП» не является, так называемым «чёрным ящиком», а обладает открытым математическим аппаратом, что позволяет судить об адекватности его применения к решению конкретной математической задачи. Для исследования процессов упрочняющей обработки внутренней поверхности, основной рабочей поверхности вкладышей подшипников скольжения, разработана следующая объёмная модель (рисунок 2).

При рассмотрении сечения А – А (рисунок 3), процесс упрочняющей обработки внутренней поверхности деталей типа втулок в условиях комплексного локального нагружения очага деформации условно можно разделить на следующие этапы:

1 внедрение в заготовку 1 деформирующего ролика 2 по пути 4а (рисунок 3) на величину  $h$ . При этом заглаживающий ролик 3 отведён от заготовки 1;

2 отвод деформирующего ролика 2 от заготовки 1 (путь 4а);

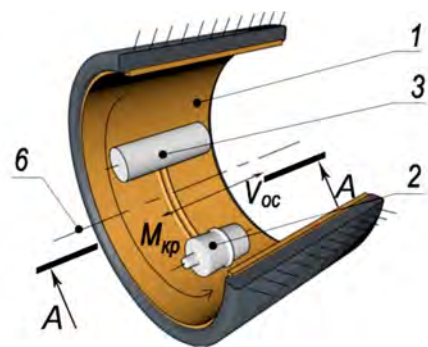
3 заглаживание вытесненных масс металла роликом 3, перемещающимся по траектории 5 (ролик перемещается до уровня исходной поверхности заготовки);

4 отход заглаживающего ролика 3 по траектории 5;

5 смещение деформирующего ролика 2 в осевом направлении по траектории 4б на шаг подачи  $S$ .

Затем шаги 1 – 5 повторяются до достижения края обрабатываемой зоны, после чего смещение деформирующего ролика 2 на шаг подачи осуществляется в противоположном направлении с повторением шагов с 1-го по 5-й.

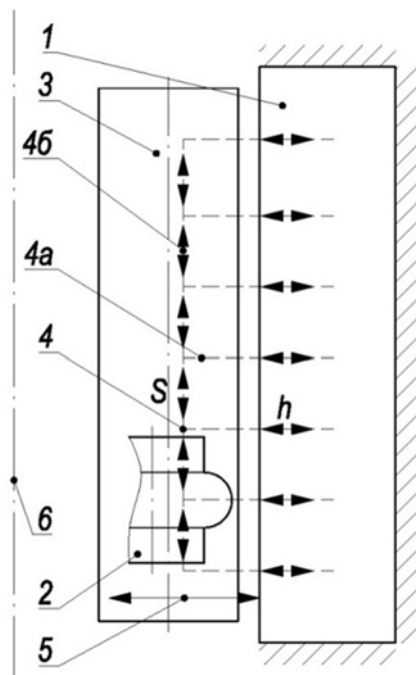
В процессе обработки заготовки упрочняющей валковой штамповкой вблизи внутренней поверхности возникают наибольшие напряжения и деформации, вследствие чего для получения наиболее достоверной картины напряжённо-деформированного состояния материала применялась составная триангулярная сетка, более плотная на внутренней поверхности (рисунок 4). По остальным слоям и в приторцовых зонах её плотность



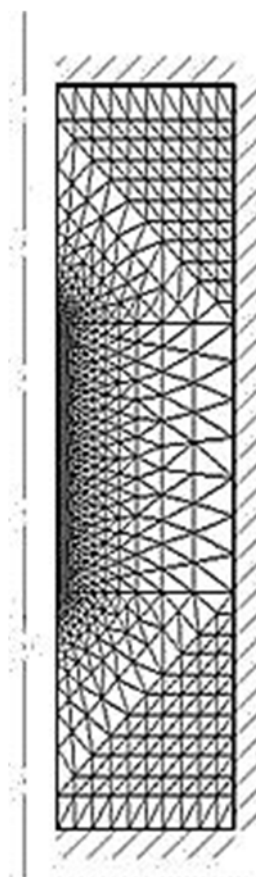
**Рисунок 2 – Объёмная модель процесса упрочняющей обработки:**  
1 – заготовка, 2 – деформирующий ролик, 3 – заглаживающий ролик, 6 – ось симметрии



значительно снижена. Такая её конструкция позволяет сократить машинное время, затраченное на выполнение необходимых расчётов без потери качества результатов.



**Рисунок 3 – Сечение А-А осесимметричной модели:**  
1 – обрабатываемая заготовка; 2 – деформирующий ролик; 3 – заглаживающий ролик; 4 – траектория перемещения деформирующего ролика; 4a – траектория однократного внедрения деформирующего ролика на величину  $h$ ; 4б – траектория единичного смещения деформирующего ролика в продольном направлении на величину шага подачи  $S$ ; 5 – траектория движения заглаживающего ролика; 6 – ось симметрии



**Рисунок 4 – Конечно-элементная сетка для исследования КЛД**

Так же отсутствует необходимость моделирования обработки всей поверхности, в связи с чем рассмотрению подвергался участок определённой длины в середине заготовки, что так же экономит время, потребное для выполнения расчёта, не отражаясь на качественной картине получаемых результатов.

В решаемой задаче были сформулированы следующие краевые условия:

- материал деформирующего и заглаживающего роликов принимаем недеформируемым и непроницаемым;
- торцы заготовки 1 неподвижны, т.е. отсутствует возможность её раздачи в осевом направлении;
- наружная поверхность заготовки ограничена поверхностью контейнера. Таким образом предотвращается возможность её радиальной раздачи в процессе обработки;
- отсутствие осевого и радиального смещения заготовки (следствие предыдущих двух пунктов).

Следует так же отметить, что при решении рассматриваемой задачи применялся новый метод машинного представления кривой упрочнения. В настоящее время, как правило, кривые упрочнения в подобных пакетах прикладных программ представляются в виде массива опорных точек, соединенных между собой прямолинейными участками. В нашем случае это NURBS-аппроксимация кривой упрочнения. Это сделано с целью экономии памяти ЭВМ и увеличения скорости проводимых расчётов.

Проведённый сравнительный анализ данных математического моделирования в ППП «ШТАМП» и натурного эксперимента по упрочнению внутренней поверхности деталей типа втулок комплексным локальным деформированием (рисунок 5) показал их удовлетворительную сходимость (максимальная погрешность не более 11.8%). Это, в свою очередь, позволяет использовать данные численных расчётов на практике.

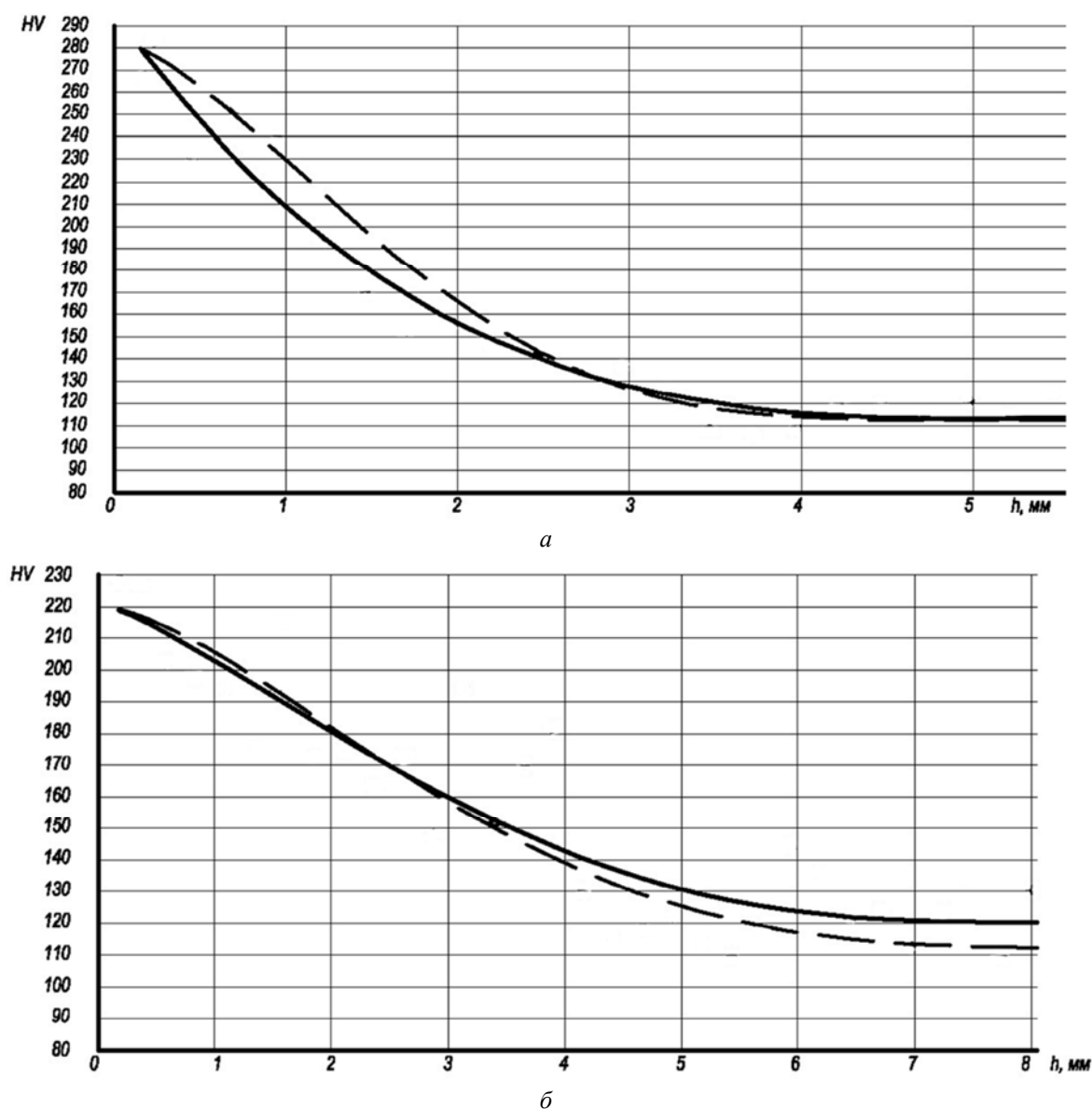


Рисунок 5 – Сравнение данных экспериментальных исследований (пунктир) и натурального эксперимента (сплошная линия): а –  $n=30$ ,  $S=0.5$  мм,  $h=0.2$  мм; б –  $n=20$ ,  $S=1.0$  мм,  $h=0.2$  мм

**Экспериментальное исследование.** Основываясь на проводившихся ранее работах [1–16], составлена следующая схема проведения экспериментальных исследований:

Заготовка устанавливается на упор, являющийся частью нижней плиты штампа. К прижиму, являющемуся частью верхней плиты, прикладывается сила  $P$ , в результате чего происходит осадка испытуемого образца с первоначальной длиной  $l_0$  на заданную высоту – до достижения новой длины  $l_1$ .

Затем рассчитывается степень линейной  $\epsilon$  и логарифмической  $e$  деформации.

В качестве экспериментального образца выбран металлический цилиндр (рисунок 6), выполненный из сплава БрОЦС 5–5–5 с параметрами  $D_0=25$  мм;  $h_0=35$  мм.

Согласно схеме и плану проведения экспериментальных исследований, приведённым в предыдущем разделе, выполнялась осадка исходной заготовки на разную высоту (таблица 1). При этом следует отметить, что скорость осадки невелика, что позволяет в данном случае её не учитывать как фактор, влияющий на комплексное состояние материала.

После проведения испытательных работ выполняется подготовка к лабораторному анализу микроструктуры и изменения параметра микротвёрдости. Для этого полученные образцы разрезались на две равные части в поперечном направлении, после чего полученные части (рисунок 8) подвергались шлифовке, полировке и протравливанию.

Исследование микроструктуры заключается в визуальном обследовании фотографий, полученных на микроскопе совместно с количественной и качественной оценкой



структурных элементов. Одновременно с этим выполнялся анализ распределения микротвёрдости в радиальном от центра сечения направлении согласно схеме, представленной на рисунке 7. На рисунке 9 представлены графики распределения микротвёрдости для всех пяти образцов.

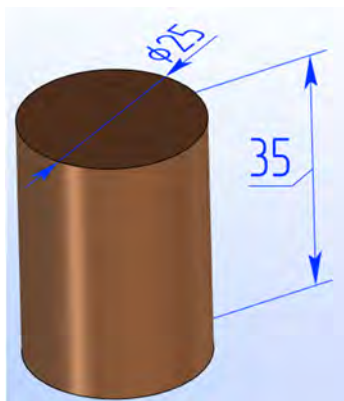


Рисунок 6 – Экспериментальный образец

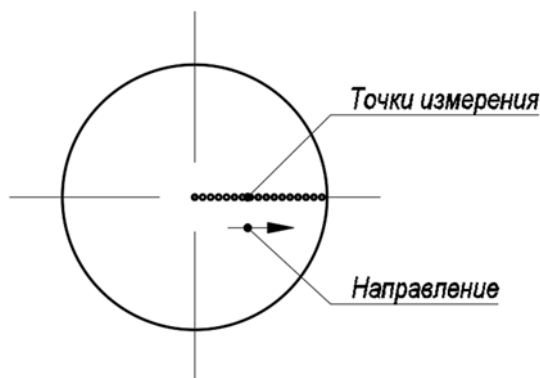


Рисунок 7 – Схема измерения распределения параметра микротвёрдости в радиальном направлении

Таблица 1 – Параметры эксперимента

№ образца	Начальная длина $l_0$ , мм	Конечная длина $l_1$ , мм	Степень деформации $\epsilon$ , %	$\epsilon$
1 (контрольная)	35	35	0	—
2	35	32.7	6.57	−0.068
3	35	28.9	17.43	−0.192
4	35	26.5	24.29	−0.278
5	35	23.9	31.71	−0.381

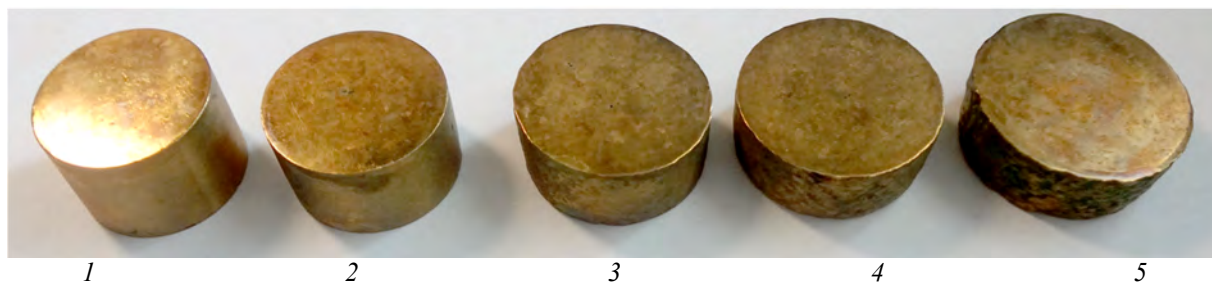


Рисунок 8 – Образцы для проведения лабораторных исследований

На рисунке 10 приведена зависимость среднего значения параметра микротвёрдости  $HV_{cp}$  от степени полученной деформации.

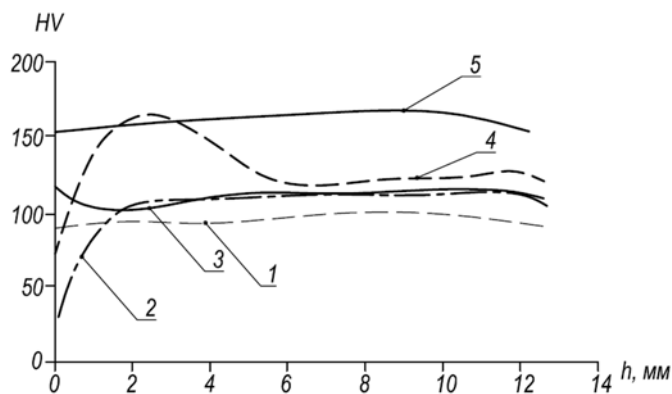


Рисунок 9 – Распределение параметра микротвёрдости по сечению образца

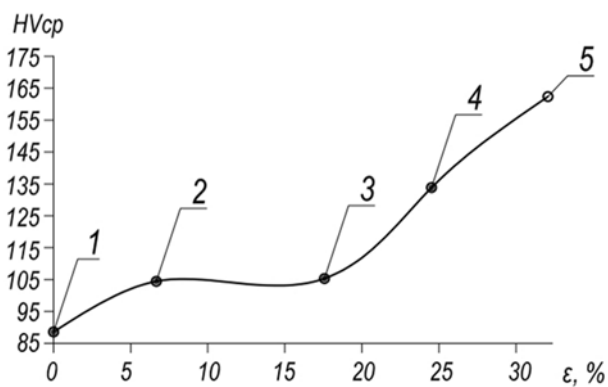
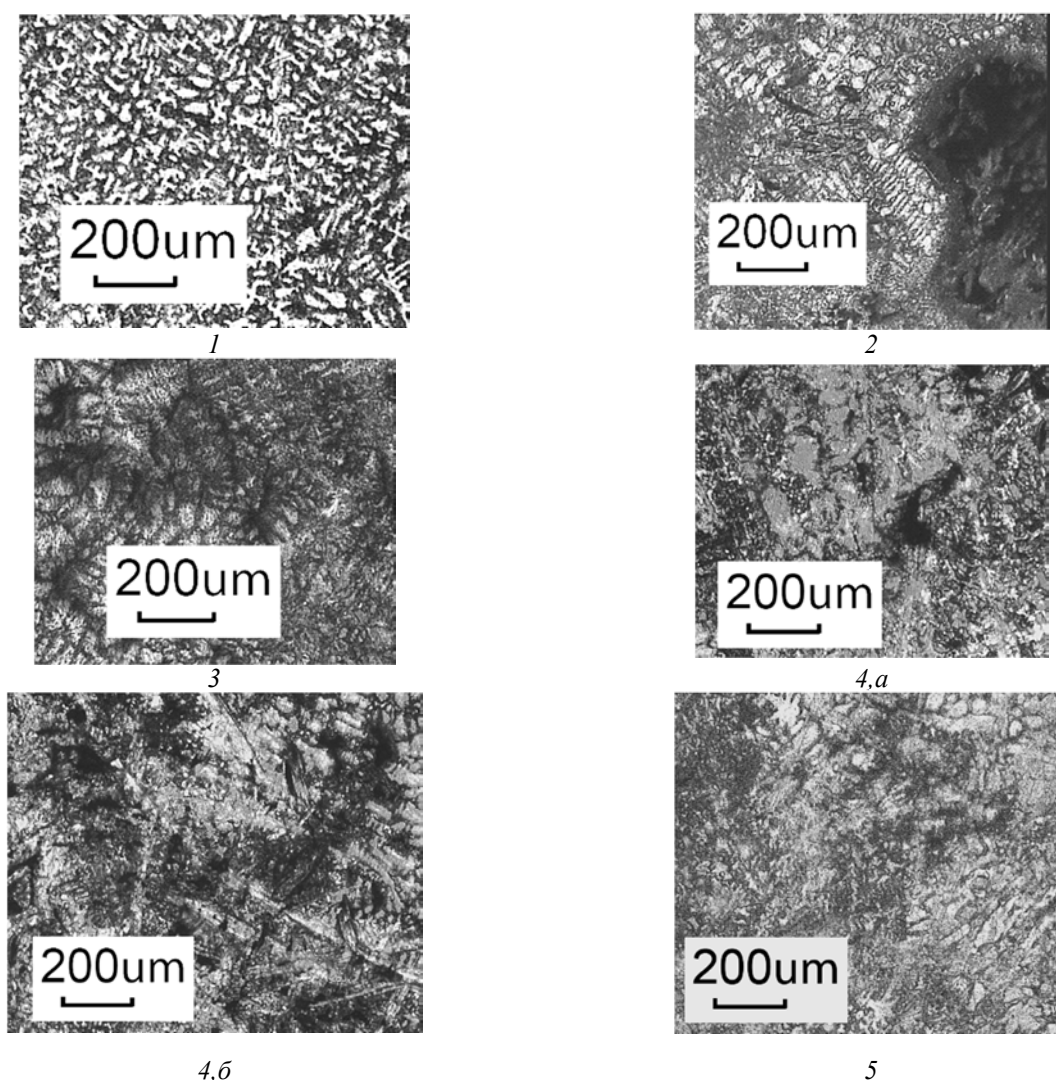


Рисунок 10 – Зависимость среднего значения параметра микротвёрдости от степени полученной деформации



**Рисунок 11 – Микроструктура исследуемых образцов:**  
 1 –  $\varepsilon=0\%$ ; 2 –  $\varepsilon=6.57\%$ ; 3 –  $\varepsilon=17.43\%$ ; 4 –  $\varepsilon=24.29\%$ ; 5 –  $\varepsilon=31.71\%$

Из представленного графика видно, что наиболее интенсивное упрочнение начинается при степени деформации от 20 до 30% (образцы № 4 и № 5).

На рисунке 11 приведены фотографии микроструктуры исследуемых образцов при 50-кратном увеличении.

На рисунке 11.1 приведена структура, характерная для недеформированного сплава БрОЦС 5–5–5. На снимке отчетливо видны зёрна с расположенной между ними дендритной фазой.

С началом деформирования структура начинает измельчаться (рисунок 11.2). Однако в процессе деформирования в центре заготовки сформировалась зона минимальной твёрдости со значением параметра микротвёрдости около 30 HV. Это происходит вследствие формирования в металле трещин, которые можно видеть в правой части рисунка 11.2.

Дальнейшее деформирование (рисунок 11.3) приводит к укрупнению структурных элементов с одновременным распространением трещин в радиальном от центра сечения направлении, что приводит к относительной стабилизации колебаний параметра микротвёрдости без существенного роста его среднего значения.

Рост степени деформации (рисунок 11.4,а) ведёт к дальнейшему укрупнению структурных элементов и «расползанию» трещин, однако следует заметить, что размеры трещин существенно уменьшаются. Помимо этого отмечается, что начинают формироваться зоны (рисунок 11.4,б) со структурными элементами, размеры которых существенно меньше, чем окружающие. В этой области сформирована зона с резким скачком параметра микротвёрдости (рисунок 9, график 4).

Деформация свыше 30% приводит к сильному дроблению структурных элементов (рисунок 11.5), а также резкому скачку среднего значения параметра микротвёрдости

(рисунок 9, график 5). Одновременно с этим отмечается стабилизация колебаний значений HV в радиальном от центра сечения направлении, что коррелируется с уменьшением размеров и количества трещин. Такой характер изменения контролируемых показателей позволяет судить о начале протекания процесса интенсивной пластической деформации, которая в свою очередь способствует получению уникальных сочетаний свойств материалов.

Так же следует обратить внимание на тот аспект, что проведённые исследования позволяют выполнять:

1. Сопоставление результатов расчётов математического моделирования и прогнозируемой микроструктуры получаемого изделия через параметр накопленной степени деформации;

2. Прогнозировать значения механических параметров, таких, как микротвёрдость в зависимости от степени накопленной деформации;

3. Определять параметры технологического процесса упрочняющей обработки для выхода не только на заданные механические эксплуатационные свойства получаемого изделия, но и на требуемую микроструктуру.

Это, в свою очередь, позволит сформировать управляемый процесс упрочняющей обработки пластическим деформированием в условиях комплексного локального нагружения очага деформации.

### **Выводы.**

В данной статье рассмотрен комплексный подход к исследованию эволюции микроструктуры и значения параметра микротвёрдости сплава БрОЦС 5–5–5 путём осадки металлических цилиндров и последующем контроле целевых показателей.

Полученные результаты измерения параметра микротвёрдости коррелируются с проводимыми ранее исследованиями [17–28] и позволяют судить о степени накопленной металлом деформации при упрочнении деталей типа втулок [29], примером которых могут являться подшипники скольжения. Становится возможным прогнозирование как микроструктуры, так и механических параметров, в частности – параметра микротвёрдости получаемых изделий в зависимости от степени накопленной деформации.

Проведённое исследование микроструктуры позволяет судить о потребной степени деформации исследуемого материала для его последующего практического применения.

В свою очередь, полученные результаты позволяют формировать управляемые процессы упрочняющей обработки пластическим деформированием, протекающие в условиях комплексного локального нагружения очага деформации.

*Работа выполняется в рамках гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке молодых российских ученых–кандидатов наук № МК–6156.2016.8 «Разработка научно–обоснованной методики проектирования технологических процессов упрочняющей обработки комплексным локальным деформированием для формирования заданных механических свойств изделия».*

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Голенков, В.А. Научные основы упрочнения комплексным локальным деформированием / В.А. Голенков, С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов, Г.П. Короткий. – М.: ООО «Издательство Машиностроение», Орел: Госуниверситет–УНПК, 2013. – 122 с.
2. Голенков, В.А. Классификация процессов комплексного локального деформирования / В.А. Голенков С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов, И.М. Грядун // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2010. – № 6. – С. 85–89.
3. Голенков, В.А. Анализ видов упрочняющей обработки пластическим деформированием / В.А. Голенков С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов, И.М. Грядун // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2011. – № 1. – С. 59–62.
4. Голенков, В.А. К вопросу о повышении эксплуатационных характеристик полых осесимметричных деталей машин методами интенсивной пластической деформации/ Голенков В.А., Радченко С.Ю., Дорохов Д.О., Грядун И.М. // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2012. – № 6. – С. 71–77.
5. Голенков, В.А. Формирование градиентных субмикро– и наноструктурных состояний комплексным локальным нагружением очага деформации / В.А. Голенков, С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2009. – № 3. – С. 54–56.
6. Пат. 2462327 РФ, МПК В21Н1/22. Способ получения металлических втулок с градиентно–упрочнённой структурой / В.А. Голенков, С.Ю. Радченко, И.М. Грядун (RU). №2010153917/02; Заявлено 27.12.2010; Опубл. 27.09.2012, Бюл. №27.
7. Пат. 2340423 РФ, В 24 В 39/04. Способ получения металлических втулок/В.А. Голенков, В.Г. Малинин, С.Ю. Радченко, Г.П. Короткий, Д.О. Дорохов; заявитель и патентообладатель ГОУ ВПО «ОрелГТУ». № 2007110990/02; заявл. 26.03.2007; опубл. 10.12.2008, Бюл. № 13.

8. Пат. 2387514 РФ, B21D 51/02. Способ получения металлических втулок с градиентной субмикро- и нанокристаллической структурой / В.А. Голенков, С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов; заявитель и патентообладатель ГОУ ВПО «ОрелГТУ». № 2008146756/02; заявл. 26.11.2008; опубл. 27.04.2010, Бюл. № 12.
9. Пат. 2389580 РФ, B21D 51/02. Способ получения металлических втулок с градиентной субмикро- и нанокристаллическим состоянием материала / В.А. Голенков, С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов; заявитель и патентообладатель ГОУ ВПО «ОрелГТУ». № 2008146754/02; заявл. 26.11.2008; опубл. 20.05.2010, Бюл. № 14.
10. Пат. 2542210 РФ, МПК B24B 39/02. Устройство для деформационного упрочнения внутренней поверхности полых осесимметричных заготовок / С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов, И.М. Грядунов (RU). №2013145169/02; Заявлено 08.10.2013; Опубл. 20.02.2015, Бюл. №5.
11. Пат. 2551749 РФ, МПК B21H 1/22. Устройство для упрочнения металлических втулок / Голенков В.А., С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов, И.М. Грядунов (RU). №2013146677/02; Заявлено 18.10.2013; Опубл. 27.04.2015, Бюл. №15.
12. Пат. 2551745 РФ, МПК B21H 1/22, B28B 3/00. Устройство для упрочнения металлических трубных изделий / Голенков В.А., С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов, И.М. Грядунов (RU). №2013146676/02; Заявлено 18.10.2013; Опубл. 27.04.2015, Бюл. №15.
13. Радченко, С.Ю. Разработка экспериментальной оснастки для исследования влияния нагрева на процесс упрочнения комплексным локальным деформированием / С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов, И.М. Грядунов, А.А. Кисловский // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2015. – № 4(312). – С. 105–112.
14. Голенков, В.А. Разработка конструкции экспериментальной установки для получения изделий с градиентными субмикро- и наноструктурными состояниями вещества на основе валковой штамповки / В.А. Голенков, С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2008. – № 2/270(545). – С. 53–55.
15. Голенков, В.А. Применение комплексного локального нагружения при формировании градиентных механических свойств / В.А. Голенков, С.Ю. Радченко, О.В. Дорофеев, Д.О. Дорохов // *Заготовительные производства в машиностроении*. – 2009. – № 10. – С. 22–25.
16. Радченко, С.Ю. Экспериментальное исследование упрочняющей обработки внутренней поверхности вкладышей подшипников скольжения в условиях комплексного локального нагружения очага деформации / С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов, И.М. Грядунов // *Мир транспорта и технологических машин*. – 2013. – № 3(42). – С. 67–76.
17. Голенков, В.А. Перспективы применения технологии «валковая штамповка» для получения градиентных субмикро- и наноструктурных материалов / В.А. Голенков, С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов. // *Известия ТулГУ. Технические науки*. Вып. 2. – Тула: Изд-во ТулГУ. – 2008. – С. 123–128.
18. Голенков, В.А. Создание градиентных структур на основе метода валковой штамповки / В.А. Голенков, С.Ю. Радченко, О.В. Дорофеев, Д.О. Дорохов // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – Орел: ОрелГТУ. – 2009. – № 3/275(561). – С. 42–46.
19. Голенков, В.А. Научное исследование технологии обработки давлением с комплексным локальным нагружением очага деформации / В.А. Голенков, С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов // *Научные технологии в машиностроении*. – 2011. – № 3. – С. 31–37.
20. Дорохов, Д.О. Управляемое формирование механических свойств в изделиях методом комплексного локального деформирования / Д.О. Дорохов // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – Орел: ОрелГТУ. – 2011. – № 4(288). – С. 31–37.
21. Голенков, В.А. Создание градиентных наноструктур в осесимметричных изделиях / В.А. Голенков, С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов, И.М. Грядунов // *Наноинженерия*. – 2012. – № 5. – С. 18–22.
22. Радченко, С.Ю. Новые технологические схемы упрочняющей обработки вкладышей подшипников скольжения в условиях комплексного локального нагружения очага деформации / С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов, И.М. Грядунов // *Мир транспорта и технологических машин*. – 2014. – № 4(47). – С. 47–54.
23. Радченко, С.Ю. Перспективы применения технологии комплексного локального деформирования для упрочнения подшипников скольжения коленчатого вала / С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов, А.А. Кисловский // *Мир транспорта и технологических машин*. – 2015. – № 3(46). – С. 35–46.
24. Радченко, С.Ю. Разработка экспериментальной оснастки для исследования влияния нагрева на процесс упрочнения комплексным локальным деформированием / С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов, И.М. Грядунов, А.А. Кисловский // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2015. – № 4(312). – С. 105–112.
25. Голенков, В.А. Методика проектирования технологического процесса упрочнения деталей типа втулок пластическим деформированием в условиях комплексного локального нагружения по требуемым параметрам изделий / В.А. Голенков, С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов, И.М. Грядунов // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2015. – № 3(311). – С. 93–99.
26. Голенков, В.А. Математическое моделирование упрочняющей валковой штамповки / В.А. Голенков, С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – Орел: ОрелГТУ. – 2009. – № 4/276(575). – С.54–58.
27. Голенков, В.А. Математическая модель упрочняющей обработки внутренней поверхности деталей типа втулок интенсивной пластической деформацией в условиях комплексного локального нагружения очага деформации / В.А. Голенков, С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов, И.М. Грядунов, П.Г. Морев // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2013. – № 5. – С. 40–47.
28. Голенков, В.А. Постановка задачи оптимизации геометрии инструмента при комплексном локальном деформировании / В.А. Голенков, С.Ю. Радченко, Д.О. Дорохов, А.А. Кисловский // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2014. – № 3(305). – С. 86–91.

29. Грядунцов Игорь Михайлович. Упрочнение деталей типа втулок интенсивной пластической деформацией в условиях комплексного локального нагружения: автореферат дисс. ... кандидата технических наук: 05.02.09 / Грядунцов Игорь Михайлович; Место защиты: ФГБОУ ВПО Государственный университет – учебно-научно-производственный комплекс. – Орел, 2013.

**Радченко Сергей Юрьевич**  
ФГБОУ ВО «Орловский  
государственный университет  
имени И.С. Тургенева», г. Орёл  
Доктор технических наук,  
профессор, и.о. проректора по  
научной работе ФГБОУ ВО «ОГУ  
имени И.С. Тургенева»  
E-mail: sur@ostu.ru

**Дорохов Даниил Олегович**  
ФГБОУ ВО «Орловский  
государственный университет  
имени И.С. Тургенева», г. Орёл  
Кандидат технических наук,  
доцент кафедры «Технологии  
машиностроения» ФГБОУ ВО  
«ОГУ имени И.С. Тургенева»  
E-mail: ddostu@mail.ru

**Грядунцов Игорь Михайлович**  
ФГБОУ ВО «Орловский  
государственный университет  
имени И.С. Тургенева», г. Орёл  
Кандидат технических наук,  
доцент кафедры «Техническая  
механика и инженерная графика»  
ФГБОУ ВО «ОГУ имени И.С.  
Тургенева»  
E-mail: fry14@yandex.ru

S.Yu. RADCHENKO, D.O. DOROKHOV, I.M. GRYADUNOV

## **RESEARCH DEPENDENCE OF CHANGES IN MICROSTRUCTURE AND PARAMETERS MICROHARDNESS ALLOY 5–5–5 BrOCS THE DEGREE OF DEFORMATION**

*The complex approach to microstructure and microhardness parameter of BrOCS 5–5–5 changing dependences out of hardening degree are presented. Acquired results has correlation to earlier researches, but get to us new knowledge about microstructure and microhardness parameter value changing depending of deformation degree.*

**Keywords:** microstructure, alloy, deformation, complex local loading, microhardness.

### **BIBLIOGRAPHY**

1. Golenkov, V.A. Nauchnyye osnovy uprochneniya kompleksnym lokalnym deformirovaniem / V.A. Golenkov, S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov, G.P. Korotkiy. – M.: ООО «Izdatelstvo Mashinostroyeniye», Orel: Gosuniversitet–UNPK, 2013. – 122 s.
2. Golenkov, V.A. Klassifikatsiya protsessov kompleksnogo lokalnogo deformirovaniya / V.A. Golenkov S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov, I.M. Gryadunov // Fundamentalnyye i prikladnyye problemy tekhniki i tekhnologii. – 2010. – № 6. – S. 85–89.
3. Golenkov, V.A. Analiz vidov uprochnyavushchev obrabotki plasticheskim deformirovaniem / V.A. Golenkov S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov, I.M. Gryadunov // Fundamentalnyye i prikladnyye problemy tekhniki i tekhnologii. – 2011. – № 1. – S. 59–62.
4. Golenkov, V.A. K voprosu o povyshenii ekspluatatsionnykh kharakteristik polykh osesimmetrichnykh detaley mashin metodami intensivnykh plasticheskoy deformatsii / Golenkov V.A., Radchenko S.YU., Dorokhov D.O., Gryadunov I.M. // Fundamentalnyye i prikladnyye problemy tekhniki i tekhnologii. – 2012. – № 6. – S. 71–77.
5. Golenkov, V.A. Formirovaniye gradiyentnykh submikro– i nanostrukturnykh sostoyaniy kompleksnym lokalnym nagruzheniyem ochaga deformatsii / V.A. Golenkov, S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov // Uprochnyavushchiye tekhnologii i pokrytiya. – 2009. – № 3. – S. 54–56.
6. Pat. 2462327 RF, MPK B21H1/22. Sposob polucheniya metallicheskih vtulok s gradiyentno–uprochnonnoy strukturoy / V.A. Golenkov, S.YU. Radchenko, I.M. Gryadunov (RU). №2010153917/02; Zayavleno 27.12.2010; Opubl. 27.09.2012, Byul. №27.
7. Pat. 2340423 RF, B 24 B 39/04. Sposob polucheniya metallicheskih vtulok/V.A. Golenkov, V.G. Malinin, S.YU. Radchenko, G.P. Korotkiy, D.O. Dorokhov; zavavitel i patentoobladatel GOU VPO «OrelGTU». № 2007110990/02; zavavl. 26.03.2007; opubl. 10.12.2008, Byul. № 13.
8. Pat. 2387514 RF, B21D 51/02. Sposob polucheniya metallicheskih vtulok s gradi–ventnov submikro– i nanokristallicheskovykh strukturoy/V.A. Golenkov, S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov; zavavitel i patentoobladatel GOU VPO «OrelGTU». № 2008146756/02; zavavl. 26.11.2008; opubl. 27.04.2010, Byul. № 12.
9. Pat. 2389580 RF, B21D 51/02. Sposob polucheniya metallicheskih vtulok s gradi–ventnov submikro– i nanokristallicheskim sostoyaniyem materiala/V.A. Golenkov, S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov; zavavitel i patentoobladatel GOU VPO «OrelGTU». № 2008146754/02; zavavl. 26.11.2008; opubl. 20.05.2010, Byul. № 14.
10. Pat. 2542210 RF, MPK V24V 39/02. Ustroystvo dlya deformatsionnogo uprochneniya vnutrenney poverkhnosti polykh osesimmetrichnykh zagotovok / S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov, I.M. Gryadunov (RU). №2013145169/02; Zayavleno 08.10.2013; Opubl. 20.02.2015, Byul. №5.
11. Pat. 2551749 RF, MPK V21N 1/22. Ustroystvo dlya uprochneniya metallicheskih vtulok / Golenkov V.A., S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov, I.M. Gryadunov (RU). №2013146677/02; Zayavleno 18.10.2013; Opubl. 27.04.2015, Byul. №15.
12. Pat. 2551745 RF, MPK V21N 1/22, V28V 3/00. Ustroystvo dlya uprochneniya metallicheskih trubnykh izdeliy / Golenkov V.A., S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov, I.M. Gryadunov (RU). №2013146676/02; Zayavleno 18.10.2013; Opubl. 27.04.2015, Byul. №15.



13. Radchenko, S.YU. Razrabotka eksperimental'noy osnastki dlya issledovaniya vliyaniya nagreva na protsess uprochneniya kompleksnym lokalnym deformirovaniyem / S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov, I.M. Gryadunov, A.A. Kislovskiy // Fundamentalnyye i prikladnyye problemy tekhniki i tekhnologii. – 2015. – № 4(312). – S. 105–112.
14. Golenkov, V.A. Razrabotka konstruktivnoy eksperimental'noy ustanovki dlya polucheniya izdeliy s gradiyentnymi submikro– i nanostrukturnymi sostoyaniyami veshchestva na osnove valkovoy shtampovki / V.A. Golenkov, S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov // Fundamentalnyye i prikladnyye problemy tekhniki i tekhnologii. – 2008. – № 2(270(545)). – S. 53–55.
15. Golenkov, V.A. Primeneniye kompleksnogo lokalnogo nagruzheniya pri formirovani gradivnykh mekhanicheskikh svoystv / V.A. Golenkov, S.YU. Radchenko, O.V. Dorofeyev, D.O. Dorokhov // Zagotovitelnyye proizvodstva v mashinostroyeni. – 2009. – № 10. – S. 22–25.
16. Radchenko, S.YU. Eksperimental'noye issledovaniye uprochnyayushchey obrabotki vnutrenney poverkhnosti vkladyshev podshipnikov skolzheniya v usloviyakh kompleksnogo lokalnogo nagruzheniya ochaga deformatsii / S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov, I.M. Gryadunov // Mir transporta i tekhnologicheskikh mashin. – 2013. – № 3(42). – S. 67–76.
17. Golenkov, V.A. Perspektivy primeneniya tekhnologii «valkovaya shtampovka» dlya polucheniya gradiyentnykh submikro– i nanostrukturnykh materialov / V.A. Golenkov, S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov. // Izvestiya TulGU. Tekhnicheskkiye nauki. Vyp. 2. – Tula: Izd-vo TulGU. – 2008. – S. 123–128.
18. Golenkov, V.A. Sozdaniye gradiyentnykh struktur na osnove metoda valkovoy shtampovki / V.A. Golenkov, S.YU. Radchenko, O.V. Dorofeyev, D.O. Dorokhov // Fundamentalnyye i prikladnyye problemy tekhniki i tekhnologii. – Orel: OrelGTU. – 2009. – № 3(275(561)). – S. 42–46.
19. Golenkov, V.A. Naukovemkaya tekhnologiya obrabotki davleniyem s kompleksnym lokalnym nagruzheniyem ochaga deformatsii / V.A. Golenkov S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov // Naukoemkiye tekhnologii v mashinostroyeni. – 2011. – № 3. – S. 31–37.
20. Dorokhov, D.O. Upravlyayemoye formirovaniye mekhanicheskikh svoystv v izdeliyakh metodom kompleksnogo lokalnogo deformirovaniya / D.O. Dorokhov // Fundamentalnyye i prikladnyye problemy tekhniki i tekhnologii. – Orel: OrelGTU. – 2011. – № 4(288). – S. 31–37.
21. Golenkov, V.A. Sozdaniye gradiyentnykh nanostruktur v osesimmetrichnykh izdeliyakh / V.A. Golenkov S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov, I.M. Gryadunov // Nanoinzheneriya. – 2012. – № 5. – S. 18–22.
22. Radchenko, S.YU. Novyye tekhnologicheskkiye skhemy uprochnyayushchey obrabotki vkladyshev podshipnikov skolzheniya v usloviyakh kompleksnogo lokalnogo nagruzheniya ochaga deformatsii / S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov, I.M. Gryadunov // Mir transporta i tekhnologicheskikh mashin. – 2014. – № 4(47). – S. 47–54.
23. Radchenko, S.YU. Perspektivy primeneniya tekhnologii kompleksnogo lokalnogo deformirovaniya dlya uprochneniya podshipnikov skolzheniya kolenchatogo vala / S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov, A.A. Kislovskiy // Mir transporta i tekhnologicheskikh mashin. – 2015. – № 3(46). – S. 35–46.
24. Radchenko, S.YU. Razrabotka eksperimental'noy osnastki dlya issledovaniya vliyaniya nagreva na protsess uprochneniya kompleksnym lokalnym deformirovaniyem / S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov, I.M. Gryadunov, A.A. Kislovskiy // Fundamentalnyye i prikladnyye problemy tekhniki i tekhnologii. – 2015. – № 4(312). – S. 105–112.
25. Golenkov, V.A. Metodika proyektirovaniya tekhnologicheskogo protsessa uprochneniya detaley tipa vtulok plasticheskim deformirovaniyem v usloviyakh kompleksnogo lokalnogo nagruzheniya po trebuyemykh parametram izdeliy / V.A. Golenkov, S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov, I.M. Gryadunov // Fundamentalnyye i prikladnyye problemy tekhniki i tekhnologii. – 2015. – № 3(311). – S. 93–99.
26. Golenkov, V.A. Matematicheskoye modelirovaniye uprochnyayushchey valkovoy shtampovki / V.A. Golenkov, S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov // Fundamentalnyye i prikladnyye problemy tekhniki i tekhnologii. – Orel: OrelGTU. – 2009. – № 4(276(575)). – S. 54–58.
27. Golenkov, V.A. Matematicheskaya model uprochnyayushchey obrabotki vnutrenney poverkhnosti detaley tipa vtulok intensivnoy plasticheskoy deformatsiye v usloviyakh kompleksnogo lokalnogo nagruzheniya ochaga deformatsii / V.A. Golenkov, S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov, I.M. Gryadunov, P.G. Morev // Fundamentalnyye i prikladnyye problemy tekhniki i tekhnologii. – 2013. – № 5. – S. 40–47.
28. Golenkov, V.A. Postanovka zadachi optimizatsii geometrii instrumenta pri kompleksnom lokalnom deformirovani / V.A. Golenkov, S.YU. Radchenko, D.O. Dorokhov, A.A. Kislovskiy // Fundamentalnyye i prikladnyye problemy tekhniki i tekhnologii. – 2014. – № 3(305). – S. 86–91.
29. Gryadunov Igor Mikhaylovich. Uprochneniye detaley tipa vtulok intensivnoy plasticheskoy deformatsiye v usloviyakh kompleksnogo lokalnogo nagruzheniya: avtoreferat diss. ... kandidata tekhnicheskikh nauk: 05.02.09 / Gryadunov Igor Mikhaylovich; Mesto zashchity: FGBOU VPO Gosudarstvennyy universitet – uchebno-nauchno-proizvodstvennyy kompleks. – Orel, 2013.

**Radchenko Sergey Yuryevich**  
 FGBOU IN «Orlovsky State  
 University name after I.S. Turgenev»  
 Orel  
 Doctor of Technical Sciences,  
 professor, acting Vice-rector for  
 scientific work FGBOU IN  
 «Orlovsky State University name  
 after I.S. Turgenev»  
 E-mail: sur@ostu.ru

**Dorokhov Daniil Olegovich**  
 FGBOU IN «Orlovsky State  
 University name after I.S. Turgenev»  
 Orel  
 Ph.D, assistant professor of  
 «Mechanical Engineering» FGBOU  
 IN «Orlovsky State University name  
 after I.S. Turgenev»  
 E-mail: ddostu@mail.ru

**Gryadunov Igor Mikhaylovich**  
 FGBOU IN «Orlovsky State  
 University name after I.S. Turgenev»  
 Orel  
 Candidate of Technical Sciences,  
 Associate Professor of the  
 Department «Technical Mechanics  
 and Engineering Graphics» FGBOU  
 IN «Orlovsky State University name  
 after I.S. Turgenev»  
 E-mail: fry14@yandex.ru

Ю.В. БЕССМЕРТНАЯ, С.Н. ЛАРИН, А.Н. МАЛЫШЕВ

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СКОРОСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ НА СИЛОВЫЕ РЕЖИМЫ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ВЫТЯЖКИ КВАДРАТНЫХ КОРОБОК ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

*В статье исследованы силовые режимы процесса изотермической вытяжки низких квадратных коробок из листовой трансверсально-изотропной заготовки по схеме «круг – квадрат» в зависимости от скорости перемещения пуансона и механических характеристик заготовки.*

**Ключевые слова:** вытяжка, коробчатые детали, анизотропия, сила, мощности, скорость инструмента, температура.

**Введение.** Вытяжка изделий коробчатых форм является одним из сложных процессов листовой штамповки. Технологические расчеты форм заготовок и переходов вытяжки, кинематики, напряжений, сил затруднительны в связи со сложным характером течения деформируемого материала. В производстве при проектировании технологических процессов обычно руководствуются данными и рекомендациями технологической практики. Теоретические и технологические расчеты вытяжки ряда коробчатых изделий в части определения напряжений и кинематики, влияния форм заготовок приведены в работах [1–3]. Технология вытяжки в части форм заготовок и переходов, степеней деформаций зависит от относительных геометрических размеров изготавливаемых коробок. В этой связи вытяжка осуществляется за одну или несколько операций (переходов). Далее рассмотрим процессы вытяжки низких изделий коробчатых форм. Они штампуются, как правило, за одну операцию.

Расчеты процессов изотермической вытяжки коробчатых деталей будем вести исходя из экстремальной верхнеграницной теоремы [4], в соответствии с которой справедливо неравенство:

$$PV_n \leq W_{вн} + W_p + W_{тр}. \quad (1)$$

Здесь левая часть – мощность внешних сил  $P$  при скорости перемещения пуансона  $V_n$ ; правая часть – соответственно мощность внутренних сил деформаций, мощность на линиях разрыва скоростей и мощность трения на поверхностях контакта материала с инструментом.

Энергетическое неравенство (1) полагает использование кинематики течения деформируемого материала и приводит к «нижней» оценке сил из всех кинематически возможных «верхних». Материал заготовки примем трансверсально-изотропным, механическое состояние которого определяется уравнением:

$$\sigma_e = k \varepsilon_e^m \xi_e^n, \quad (2)$$

где  $\sigma_e$  – эквивалентное напряжение (интенсивность напряжений);

$\varepsilon_e, \xi_e$  – эквивалентные деформация и скорость деформации соответственно;

$k, m$  и  $n$  – константы материала.

Уравнение (2) характеризует состояние материала при вязко-пластическом деформировании. При деформировании без нагрева материал является жестко-пластическим с деформационным упрочнением ( $m \neq 0, n = 0$ ). При горячем деформировании упрочнение отсутствует, и материал является нелинейно-вязким ( $m = 0, n \neq 0$ ). В дальнейшем для

различных форм заготовок будем рассматривать кинематику и напряженно-деформированное состояние фланца на плоскости и на вытяжной кромке матрицы. В первом случае напряженное состояние принимается плоским; во втором – состояние плоской деформации.

Мощность внутренних сил в одной зоне деформаций:

$$W_{вн} = \varphi \int_{r_n + \frac{a}{\sin \frac{\pi}{4}}}^{r_0} \sigma_e \xi_e \delta r dr. \quad (3)$$

где  $r_0$ ,  $r_n$  – радиус заготовки и угловой радиус пуансона;  
 $r$  – радиальная координата точки в зоне деформации;  
 $\varphi$  – угол, определяющий зону деформаций.

Для расчета мощности в зонах деформаций фланца в соответствии с уравнением (1) необходимо установить входящие в это уравнение величины.

Мощность на одной линии разрыва представим в виде равенства:

$$W_p = \tau_p V_p \delta_0 r_1 \sqrt{1 + 3 \sin^2 \gamma} \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \beta}, \quad (4)$$

где  $\tau_p = k \eta \chi^{m+n} V_n^n \cdot r_n^{\frac{nR}{1+R}} \cdot r^{\frac{n(1+2R)}{1+R}} \cdot \left( \ln \frac{r}{r_n} \right)^m$ ;

$$V_p = \frac{(V_p)_n}{\sin \gamma} = V_n \left[ \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - \left( \frac{r_n}{r_1} \right)^{\frac{R}{1+R}} \right] \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}; \quad \gamma = \arctg \left[ \frac{\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - \left( \frac{r_n}{r_1} \right)^{\frac{R}{1+R}}}{\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} - \left( \frac{r_n}{r_1} \right)^{\frac{R}{1+R}}} \right] \operatorname{tg} \alpha;$$

$$l_p = r_1 \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \beta}.$$

Мощность трения заготовки на инструменте вычисляется с помощью интеграла:

$$W_{mp} = \mu q V_n \left\{ \frac{2(1+R)}{2+R} \varphi r_n \left[ r_0^{\frac{2+R}{1+R}} - \left( r_n + \frac{a}{\sin \frac{\pi}{4}} \right)^{\frac{2+R}{1+R}} \right] + \right. \\ \left. + \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \left[ r_0^2 - (a + r_n)^2 \right] \right\}, \quad (5)$$

что соответствует мощности трения на поверхностях матрицы и прижима для четверти заготовки.

Расчеты мощности деформаций (3), мощности на линиях разрыва скоростей (4) и трения (5) позволяют сделать верхнеграницную оценку силы вытяжки по энергетическому неравенству (1).

Упрощение расчетов можно достигнуть, если в качестве линий разрыва принять ортогональные прямые, проходящие через центры угловых радиусов (точка  $O_1$ ) параллельно осям  $x$ ,  $y$  (рисунок 1). Установим распределение толщины фланца в зонах деформаций.



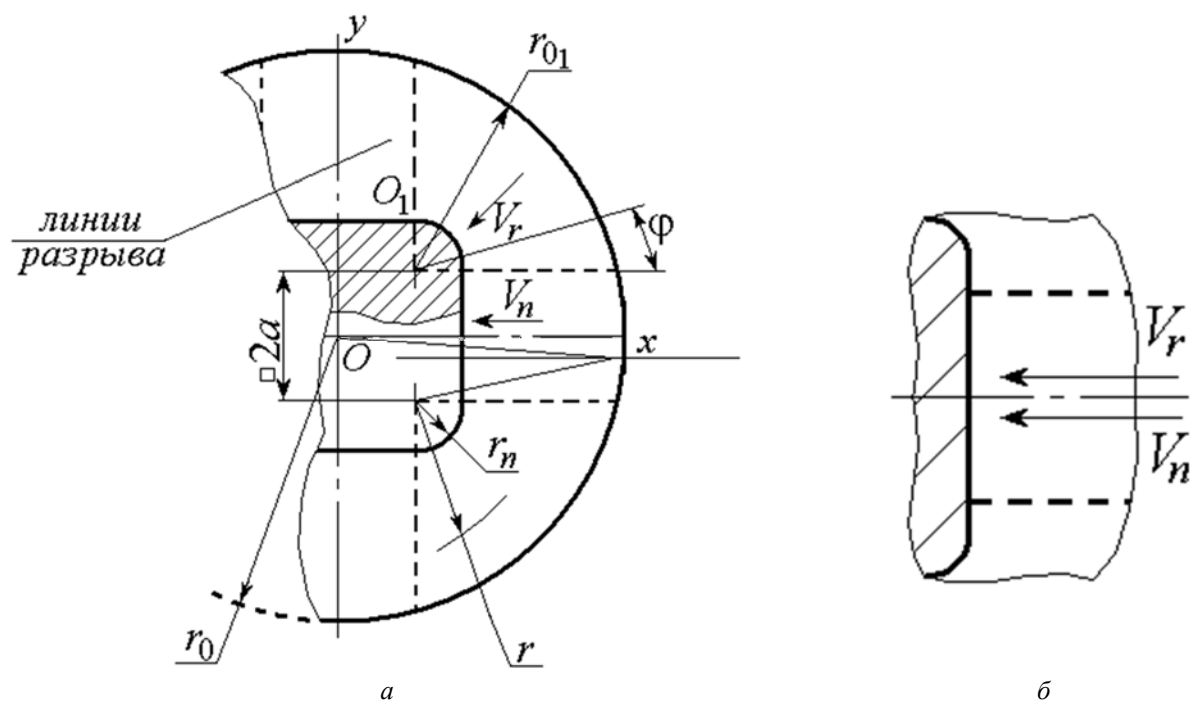


Рисунок 1 – Разрывное поле скоростей (а) и план скоростей (б) на линии разрыва при вытяжке низкой квадратной коробки

Так как

$$\xi_{\delta} = \frac{d\varepsilon_{\delta}}{dt} = \frac{d\delta}{\delta} \cdot \frac{1}{dt}, \quad dt = \frac{dr}{V_r} = \frac{1}{V_n} \left( \frac{r}{r_n} \right)^{\frac{R}{1+R}} \cdot dr,$$

то в соответствии с принятой функцией скорости  $V_r = V_n \left( \frac{r_n}{r} \right)^{\frac{R}{1+R}}$  получим соотношение для распределения толщины в виде:

$$\delta = \delta_0 \left( \frac{r}{r_n} \right)^{\frac{1}{1+R}}, \quad (6)$$

что удовлетворяет условиям  $r = r_n, \delta = \delta_0$ ;  $r = r_0, \delta = \delta_{kp} = \delta_0 \left( \frac{r_0}{r_n} \right)^{\frac{1}{1+R}}$ .

Запишем выражение для определения радиуса дуги окружности внешнего контура зоны деформаций относительно центра перемещений, т.е. с точки  $O_1$ :

$$r_{01} = a(\sin \varphi + \cos \varphi) \left[ \sqrt{1 - \frac{2a^2 + r_0^2}{a^2(\sin \varphi + \cos \varphi)}} - 1 \right], \quad (7)$$

где  $r_0$  – радиус заготовки с центром в точке  $O$ ;

$0 \leq r \leq r'_{01}$  – текущая радиальная координата точки в зоне деформаций;

$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  – угловая координата этой точки;

$2a$  – расстояние между угловыми центрами.

Выражение для мощности внутренних сил (3), учитывая соотношения (2), (6), (7), запишем в виде:

$$W_{вн} = 4k\chi^{1+m+n} \cdot \delta_0 V_n^{1+n} \cdot r_n^{\frac{(1+n)R-1}{1+R}} \cdot \int_0^{\pi/2} \left[ \int_{r_n}^{r_{01}} r^{1+\frac{1-(1+n)(1+2R)}{1+R}} \cdot \left( \ln \frac{r}{r_n} \right)^m dr \right] d\varphi.$$

Полученный интеграл решается численно. Для упрощения полученного выражения подынтегральную функцию внутреннего интеграла представим в приближенном виде:

$$\left( \frac{1}{r_n} \right)^m \left( 1 - m \frac{r_n}{r} \right) r^{1+m+\frac{1-(1+n)(1+2R)}{1+R}}.$$

После интегрирования по координате  $r$  мощность внутренних сил будет записана в форме:

$$W_{вн} = 4k\chi^{1+m+n} \cdot \delta_0 V_n^{1+n} \cdot r_n^{\frac{(1+n)R-1}{1+R}-m+p} \times \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{1}{p} \left[ \left( \frac{r_{01}}{r_n} \right)^p - 1 \right] - \frac{m}{p-1} \left[ \left( \frac{r_{01}}{r_n} \right)^{p-1} - 1 \right] \right\} d\varphi, \quad (8)$$

где 
$$p = 2 + m + \frac{1-(1+n)(1+2R)}{1+R}.$$

Для последующего численного интегрирования по координате  $\varphi$  необходимо в выражение (8) подставить формулу (7).

Запишем необходимые соотношения для расчета мощности на линиях разрыва скоростей. Здесь  $V_r \parallel l_p$ ,  $V_n \parallel l_p$ , и вектор скорости разрыва совпадает с линией разрыва. Величина разрыва скорости:

$$V_p = V_n - V_r = V_n \left[ 1 - \left( \frac{r_n}{r_{01}} \right)^{\frac{R}{1+R}} \right] \quad (9)$$

Принято, как это записано в соотношении (9), что разрыв постоянен на всей линии разрыва и определяется по внешней краевой точке фланца. Положение этой точки задано радиусом  $r_{01}$ , что следует из формулы (7) при  $\varphi = 0$ .

Толщину фланца на линии разрыва также считаем постоянной, равной толщине в точке пересечения внешнего контура фланца и линии разрыва, т.е.

$$\delta_p = \delta_0 \left( \frac{r_{01}}{r_n} \right)^{\frac{1}{1+R}} = \delta_0 \left( \frac{-a + \sqrt{r_0^2 - a^2}}{r_n} \right)^{\frac{1}{1+R}} \quad (10)$$

при  $r_{01} = -a + \sqrt{r_0^2 - a^2}$ , что следует из формулы (6) после подстановки (7), где  $\varphi = 0$ .

Эквивалентная деформация на линии разрыва:

$$(\varepsilon_e)_p = (\varepsilon_e)_{пл} - (\varepsilon_e)_{жс} = \chi \ln \frac{r}{r_n}, \quad (11)$$

где  $(\varepsilon_e)_{пл}$ ,  $(\varepsilon_e)_{жс}$  – эквивалентные деформации в пластической и жесткой зонах соответственно.

Соотношение (11) и его производная по времени, т.е. эквивалентная скорость деформаций, позволяет вычислить касательное напряжение

$$\tau_p = k\eta\chi^{m+n} V_n^n \cdot r_n^{\frac{nR}{1+R}} \cdot r^{-\frac{n(1+2R)}{1+R}} \cdot \left( \ln \frac{r}{r_n} \right)^m \text{ на линиях разрыва.}$$

$$\tau_p = k\eta\chi^{m+n}V_n^n \cdot r_n^{\frac{nR}{1+R}} \cdot r^{-\frac{n(1+2R)}{1+R}} \cdot \left(\ln \frac{r}{r_n}\right)^m \quad \text{в равенство} \quad \left. \begin{aligned} (V_r)_n &= V_r \sin \alpha, & (V_n)_n &= V_n \sin \beta; \\ (V_r)_\tau &= V_r \cos \alpha, & (V_n)_\tau &= V_n \cos \beta, \end{aligned} \right\}$$

при  $\varphi = 0$  приводит к интегралу мощности на линиях разрыва скоростей, а именно:

$$W_p = 8k\eta\chi^{m+n} \cdot \delta_0 \cdot V_n^{1+n} \cdot r_n^{\frac{nR-1}{1+R}} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{r_n}{(r_0)_{01}} \right)^{\frac{R}{1+R}} \right] \times \\ \times (r_{01})^{\frac{1}{1+R}} \cdot \int_{r_n}^{r_{01}} r^{-\frac{n(1+2R)}{1+R}} \cdot \left( \ln \frac{r}{r_n} \right)^m dr$$

Подынтегральную функцию заменим разложением

$$\left( \frac{r}{r_n} \right)^p \left( 1 - m \frac{r_n}{r} \right),$$

где  $p = 1 + m - \frac{n(1+2R)}{1+R}$ .

Учитываем, что на линии разрыва радиус внешнего контура фланца  $r_{01} = -a + \sqrt{r_0^2 - a^2}$  – величина постоянная, независимая от координат  $r$ ,  $\varphi$ .

После интегрирования получим:

$$W_p = 8k\eta\chi^{m+n} \delta_0 V_n^{1+n} r_n^{p-m+\frac{nR-1}{1+R}} \left( -a + \sqrt{r_0^2 - a^2} \right)^{\frac{1}{1+R}} \left[ 1 - \left( \frac{r_n}{-a + \sqrt{r_0^2 - a^2}} \right)^{\frac{R}{1+R}} \right] \times \\ \times \left\{ \frac{1}{p} \left[ \left( \frac{-a + \sqrt{r_0^2 - a^2}}{r_n} \right)^p - 1 \right] - \frac{m}{p-1} \left[ \left( \frac{-a + \sqrt{r_0^2 - a^2}}{r_n} \right)^{p-1} - 1 \right] \right\}. \quad (12)$$

Обратимся к расчету мощности сил трения, записанной в общем виде интегралом  $W_{mp} = \int_S \tau_k V_k ds$ . Контактное напряжение трения принимаем зависящим от нормального

давления прижима, что выражено ранее соотношением  $\tau_k \approx \mu q$ . Контактная скорость в

зонах деформаций выражена соотношением  $V_r = V_n \left( \frac{r_n}{r} \right)^{\frac{R}{1+R}}$ , скорость жестких зон –  $V_n$ .

Учитывая это, запишем:

$$W_{mp} = 8\mu q V_n \left[ \frac{R}{r_n^{1+R}} \int_0^{\pi/2} \int_{r_n}^{r_{01}} \frac{1}{r^{1+R}} dr d\varphi + \left( 2 \int_0^a \left( r_0^2 - x^2 \right)^{1/2} dx - a(a + r_n) \right) \right].$$

После интегрирования по координате  $r$  получим:

$$W_{mp} = 8\mu q V_n \left\{ \frac{1+R}{2+R} r_n^2 \int_0^{\pi/2} \left[ \left( \frac{r_{01}}{r_n} \right)^{\frac{2+R}{1+R}} - 1 \right] d\varphi + \right. \\ \left. + \left[ a\sqrt{r_0^2 - a^2} - a(a + r_n) + r_0^2 \arcsin \frac{a}{r_0} \right] \right\}. \quad (13)$$

Здесь радиус  $r_{01}$  должен быть записан формулой (7), после чего произведено интегрирование по  $\varphi$ .

Подстановка полученных соотношений для мощностей  $\gamma = \arctg \frac{(V_p)_n}{(V_p)_\tau}$ , (12) в энергетическое неравенство (1) приводит к оценке максимального значения силы при вытяжке квадратной коробки в зависимости от скорости операции.

Силовые режимы процесса изотермической вытяжки низких квадратных коробок из листовой трансверсально-изотропной заготовки по схеме «круг – квадрат» исследовались в зависимости от скорости перемещения пуансона  $V_n$ , условий трения на контактных поверхностях рабочего инструмента и заготовки, величины давления прижима  $q$ .

На рисунке 2 приведены графические зависимости изменения максимальной величины относительной силы  $\bar{P} = P/(F\sigma_\epsilon)$  процесса изотермической вытяжки низких квадратных коробок из листовой трансверсально-изотропной заготовки по схеме «круг – квадрат» от скорости перемещения пуансона  $V_n$  для алюминиевого сплава АМг6 при температурах обработки  $T = 450^\circ \text{C}$  и  $T = 530^\circ \text{C}$ , а также титанового сплава ВТ6 при  $T = 930^\circ \text{C}$ , где  $F$  – площадь действия работе [4]. Заметим, что при обработке экспериментальных данных авторы работы [4] пренебрегали влиянием эквивалентной скорости деформации  $\xi_e$  на величины предельной эквивалентной деформации  $\epsilon_{enp}$  или предельной величины удельной работы разрушения  $A_{np}$  ( $A_2=0$  или  $A'_2=0$ ). Расчеты выполнены при  $r_0 = 50$  мм;  $r_n = 8$  мм;  $a = 17$  мм;  $\delta_0 = 1$  мм;  $q = 2$  МПа. Величина давления прижима  $q$  назначалась в соответствии с рекомендациями [4].

Анализ графических зависимостей (рисунок 2) и результатов расчетов показывает, что с увеличением скорости перемещения пуансона  $V_n$ , коэффициента трения  $\mu$  на контактной поверхности рабочего инструмента и заготовки величина относительной силы  $\bar{P}$  возрастает.

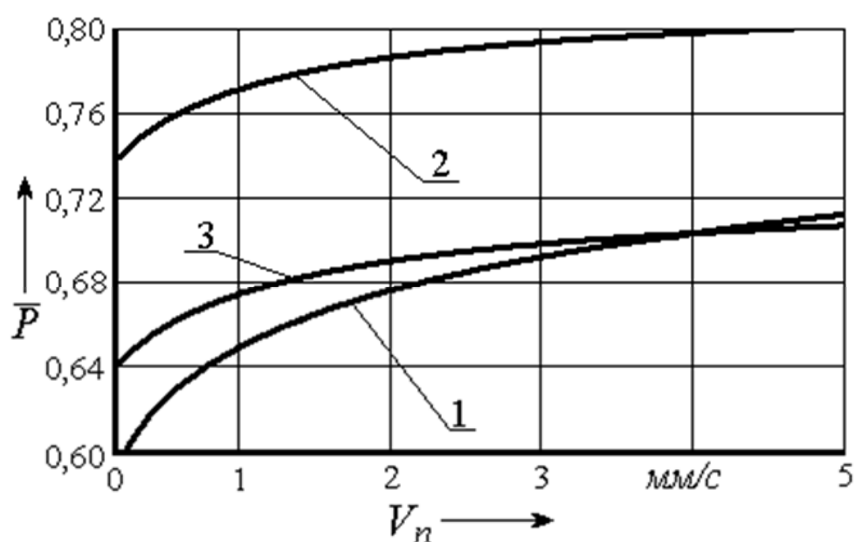


Рисунок 2 – Зависимости изменения  $\bar{P}$  от  $V_n$ :

кривая 1 – сплав ВТ6 ( $T = 930^\circ \text{C}$ ); кривая 2 – сплав АМг6 ( $T = 450^\circ \text{C}$ ); кривая 3 – сплав АМг6 ( $T = 530^\circ \text{C}$ )

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 16-38-00082 мол\_а, № 14-08-00066 а.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнтрауб, Д.А. Технология глубокой вытяжки прямоугольных коробок / Д.А. Вайнтрауб. – ЛДНТП, 1957. – 98 с.
2. Зубцов, М.Е. Листовая штамповка / М.Е. Зубцов. – Л.: Машиностроение, 1980. – 432 с.
3. Романовский, В.П. Справочник по холодной штамповке / В.П. Романовский. – Л.: Машиностроение, 1979. – 520 с.
4. Изотермическое деформирование высокопрочных анизотропных металлов / С.П. Яковлев, В.Н. Чудин, С.С. Яковлев, Я.А. Соболев. – М: Машиностроение-1, Изд-во ТулГУ, 2004. – 427 с.
5. Ашкенази, Е.К. Анизотропия машиностроительных материалов / Е.К. Ашкенази. – Л.: Машиностроение, 1969. – 112 с.

**Бессмертная Юлия Вячеславовна**  
Тульский государственный  
университет, Тула  
кандидат технических наук, доцент  
E-mail: mpf-tula@rambler.ru

**Ларин Сергей Николаевич**  
Тульский государственный  
университет, Тула  
доктор технических наук,  
проф., зав. кафедрой  
«Механика пластического  
формоизменения»  
E-mail: mpf-tula@rambler.ru

**Малышев Александр Николаевич**  
Калужский филиал федерального  
государственного бюджетного  
образовательного учреждения  
высшего профессионального  
образования «Московский  
государственный технический  
университет имени Н.Э. Баумана»,  
Калуга  
кандидат технических наук, доцент  
E-mail: amalyshev@ru.gestamp.com

---

Yu.V. BESSMERTNAYA, S.N. LARIN, A.N. MALYSHEV

### STUDY OF SPEED PARAMETERS MODES FOR POWER ISOTHERMAL EXTRACT SQUARE BOXES FROM ANISOTROPIC MATERIALS

*In the article the power regimes of isothermal drawing process low square boxes of sheet transversely isotropic workpiece on a «circle – square» depending on the speed of movement of the punch and the mechanical characteristics of the workpiece.*

**Keywords:** hood, box-shaped parts, anisotropy, strength, power, tool speed, temperature.

### BIBLIOGRAPHY

1. Vayntraub, D.A. Tekhnologiya glubokoy vytyazhki pryamougol'nykh korobok / D.A. Vayntraub. – LDNTP, 1957. – 98 s.
2. Zubtsov, M.Ye. Listovaya shtampovka / M.Ye. Zubtsov. – L.: Mashinostroyeniye, 1980. – 432 s.
3. Romanovskiy, V.P. Spravochnik po kholodnoy shtampovke / V.P. Romanovskiy. – L.: Mashinostroyeniye, 1979. – 520 s.
4. Izotermicheskoye deformirovaniye vysokoprochnykh anizotropnykh metallov / S.P. Yakovlev, V.N. Chudin, S.S. Yakovlev, YA.A. Sobolev. – M: Mashinostroyeniye-1, Izd-vo TulGU, 2004. – 427 s.
5. Ashkenazi, Ye.K. Anizotropiya mashinostroitel'nykh materialov / Ye.K. Ashkenazi. – L.: Mashinostroyeniye, 1969. – 112 s.

**Bessmertnaya Yuliya Vyacheslavovna**  
Tula State University, Tula  
Ph.D., associate professor  
E-mail: mpf-tula@rambler.ru

**Larin Sergey Nikolayevich**  
Tula State University, Tula  
Doctor of technical sciences, prof.,  
head. The department «mechanics  
of plastic deformation»  
E-mail: mpf-tula@rambler.ru

**Malyshev Aleksandr Nikolayevich**  
Kaluga branch of FSBEI HPE  
«Moscow state technical university  
named after N.E. Bauman» Kaluga  
Ph.D., associate professor  
E-mail: amalyshev@ru.gestamp.com

В.Ю. ЛАВРИНЕНКО, И.С. ЧУВАЕВ

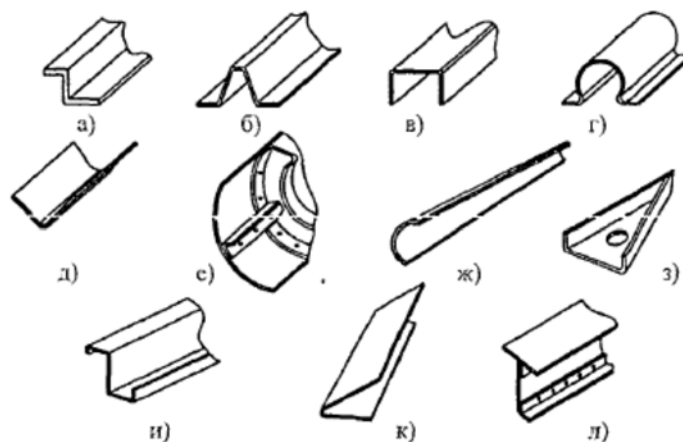
## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ГИБКИ ЛИСТОВЫХ ЗАГОТОВОК НА МОЛОТАХ

*В статье представлены результаты экспериментальных исследований V-образной гибки стальных листовых заготовок на молоте (копре) с использованием стандартной бабы молота (копра) и бабы с наполнителем в виде стальных шариков. Установлено увеличение продолжительности удара (до 1,5 раз) и уменьшение угла пружинения (до 8 раз) при использовании бабы молота (копра) с наполнителем по сравнению со стандартной бабой молота (копра).*

**Ключевые слова:** листовая штамповка, гибка, упругое пружинение, листоштамповочный молот, баба молота с наполнителем.

**Введение.** В условиях современного производства для изготовления различных деталей летательных аппаратов широко применяют процессы гибки листовых заготовок (рисунок 1). В условиях мелко- и среднесерийного производства изготавливать такие детали в инструментальных штампах экономически нерентабельно, поскольку увеличиваются затраты на изготовление сложных штампов и сроки производства.

В настоящее время эффективным и экономически целесообразным для изготовления большой номенклатуры деталей летательных аппаратов гибкой является применение листоштамповочных молотов, оснащённых дешёвыми и быстро изготавливаемыми свинцово-цинковыми штампами [1].



**Рисунок 1 – Типовые детали летательных аппаратов, изготавливаемых гибкой:**  
а, б, в, д – стрингеры; г – хомуты; е, и, к, л, з – элементы силового набора

Эффективность ударного деформирования при гибке на молотах определяют коэффициентом полезного действия (КПД) ударного деформирования заготовки, который равен отношению работы пластической деформации заготовки к энергии падающих частей молота. Основными недостатками гибки на листоштамповочных молотах является низкий КПД ударного деформирования заготовки и низкая точность изготавливаемых деталей вследствие их упругого пружинения, которое устраняют обычно ручной доводкой, что ухудшает качество поверхности детали и увеличивает трудоёмкость.

Одним из направлений повышения КПД ударного деформирования на листоштамповочных молотах, повышения размерной точности деталей и снижения упругого пружинения при гибке является увеличение продолжительности ударного взаимодействия инструмента и заготовки путем удержания падающих частей молота в нижней точке при ударе при использовании специальных устройств. Ранее проведенные исследования процесса

осадки цилиндрических заготовок на молотах [2] позволили выявить предпосылки к возможности применения специальных устройств, обеспечивающих увеличение продолжительности ударного взаимодействия при гибке на молоте.

**Исследовательская часть.** Для проверки данного предположения были проведены экспериментальные исследования процесса гибки листовых заготовок на молотах. Целью проведенных исследований являлось изучение зависимости угла пружинения детали от радиуса скругления, угла гибки, материала заготовки и энергии удара при V-образной гибке на молоте (копре) в условиях целенаправленного увеличения продолжительности ударного взаимодействия при использовании специального устройства, обеспечивающего повышение эффективности ударного деформирования.

Гибку заготовок и определение параметров удара проводили на специальном комплексе для экспериментальных исследований процесса гибки на молоте (копре), принципиальная которого представлена на рисунке 2. Комплекс состоит из вертикального копра и системы скоростной видеосъемки. Технические характеристики копра приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Технические характеристики копра

Масса бабы, кг	22,4
Масса основания копра, кг	250
Предельная высота сбрасывания бабы, м	2
Максимальная теоретическая скорость бабы при ударе, м/с	6,26

Комплекс (рисунок 2) включает в себя вертикальный копер 1 с установленными на нем экспериментальным штампом 2 и систему высокоскоростной видеосъемки, включающую камеру высокоскоростной видеосъемки 3 со встроенным модулем буферной памяти, PCI-контроллер 4 для интерфейса с камерой и персональный компьютер 5 для управления, предварительной обработки, записи и хранения видеoinформации.

Вертикальный копер 1 состоит из двух стоек и шабота 6, сменной бабы 7, лебедки для подъема 8 и захвата 9 для фиксации бабы. При подъеме бабы на необходимую высоту захват отпускают, и баба падает на верхнюю плиту штампа 2, деформируя при этом образец.

Одновременно с началом движения бабы с клавиатуры или мышью персонального компьютера включают ввод изображения исследуемой зоны в буферную память камеры высокоскоростной видеосъемки 3. Видеозапись проводили с частотой 3000 кадров в секунду.

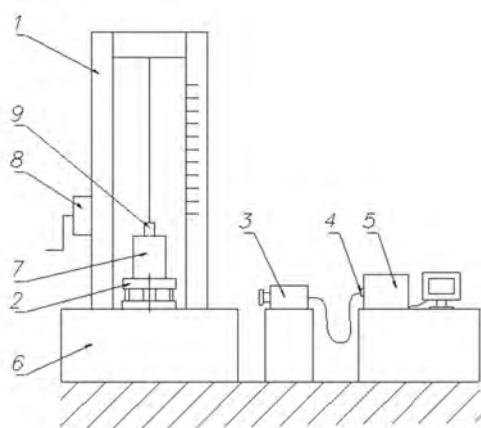


Рисунок 2 – Принципиальная схема комплекса для экспериментальных исследований:

- 1 – стойки копра; 2 – устройство захвата бабы; 3 – устройство подъема бабы; 4 – баба; 5 – заготовка; 6 – нижний боек; 7 – основание; 8 – скоростная цифровая видеокамера; 9 – переходник; 10 – персональный компьютер

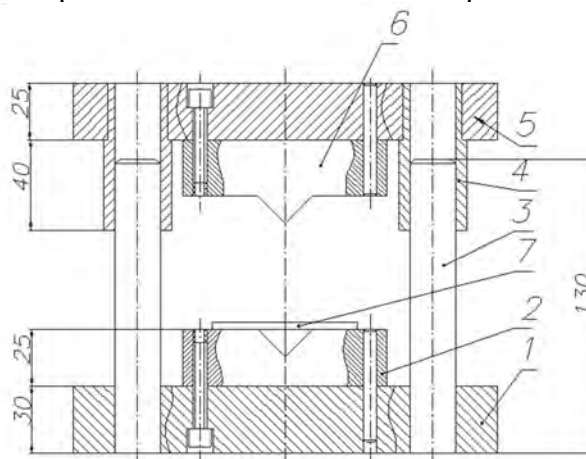


Рисунок 3 – Экспериментальный штамп для гибки:

- 1 – нижняя плита; 2 – матрица; 3 – колонка; 4 – направляющая втулка; 5 – верхняя плита; 6 – пуансон; 7 – заготовка

На рисунке 3 представлен экспериментальный штамп для осадки. Угол гибки принимали равным 60, 90 и 120°, радиус гибки 1 мм.

Для гибки заготовок на копре использовали стандартную бабу массой  $m_{бабы} = 22,4$  кг, изготовленную из стали 45 (ГОСТ 1050–88). Также для осадки заготовок использовали бабу с наполнителем [3], состоящую из корпуса с внутренней полостью и засыпаемых внутрь шариков диаметром  $D_{шар} = 0,012$  м из стали ШХ15 (рисунок 3). Корпус бабы был изготовлен из стали 45 (ГОСТ 1050–88). Между крышкой 1 бабы с наполнителем и шариками 4 установлена упругая прокладка 2 из поролона, которая обеспечивала предварительное упругое поджатие шариков в бабе.

Масса корпуса бабы была равна 14,5 кг, а масса засыпаемых внутрь шариков –  $m_{шар} = 3,36$  кг. При этом отношение массы шариков к общей массе бабы  $K_M = 0,15$ .

Для возможности сравнения результатов экспериментов по гибке заготовок стандартной бабой и бабой с их массы принимали одинаковыми и равными  $m_{бабы} = 22,4$  кг. Для этого в бабе с наполнителем использовали крышку массой 4,54 кг, которая компенсировала недостаток массы бабы.

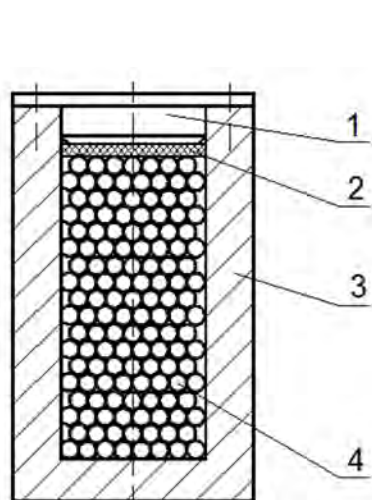


Рисунок 4 – Схема бабы с наполнителем:

1 – крышка; 2 – упругая прокладка;  
3 – корпус; 4 – шарики

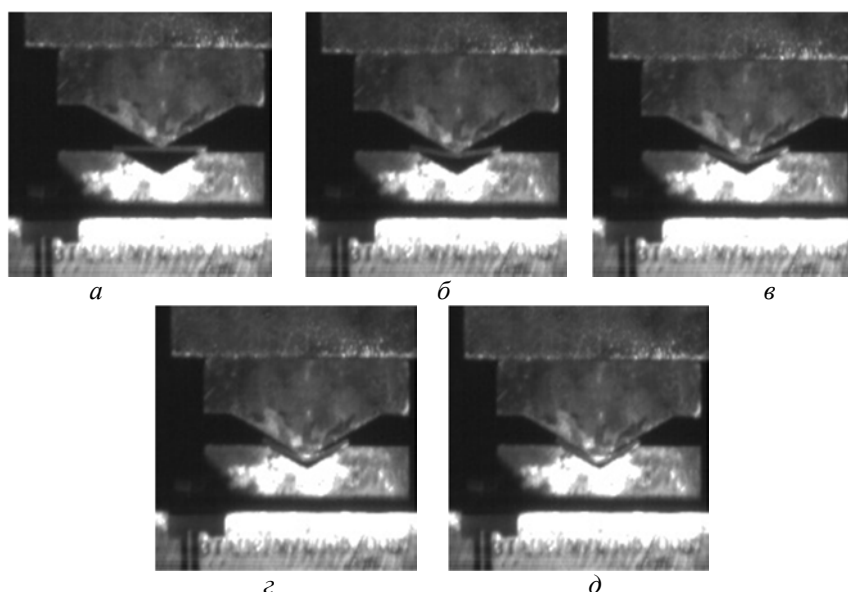


Рисунок 5 – Раскадровка видеозаписи процесса гибки заготовки на молоте (копре) с углом гибки 120°:

а – соприкосновение пуансона и заготовки, начало гибки заготовки;  
б – г – этапы гибки заготовки; д – окончание гибки заготовки

Проводили гибку листовых заготовок из стали Ст. 3 (ГОСТ 380–71) размером 30х40мм толщиной 1мм в отожженном состоянии. Каждый эксперимент повторяли 3 раза.

Измерение результатов гибки производили угломером с точностью  $\pm 2$ . На рисунке 5 показана раскадровка скоростной видеозаписи процесса гибки заготовки на молоте (копре) с углом гибки 120°.

**Результаты исследований.** В таблице 2 приведены результаты экспериментов по гибке заготовок из стали Ст.3.

Таблица 2 – Параметры экспериментов по гибке заготовок из стали Ст. 3

Высота падения бабы, м / Энергия удара, Дж	Скорость бабы при ударе, м/с	Угол гибки, °	Угол пружинения, ° / Продолжительность удара, мс	
			Стандартная баба	Баба с наполнителем
0,5 / 109,3	3,13	60	2,0 / 4,0	1,1 / 5,7
		90	1,5 / 3,7	0,3 / 6,3
		120	1,3 / 4,7	0,16 / 6,7



Установлено, что при гибке заготовок из стали Ст. 3 с углом 60, 90 и 120° при использовании бабы молота (копра) с наполнителем продолжительность удара увеличилась в среднем в 1,5 раза по сравнению со стандартной бабой.

Также установлено, что применение бабы молота (копра) с наполнителем при гибке заготовок из стали Ст. 3 с углом 60, 90 и 120° позволяет уменьшить угол пружинения в 1,8; 5 и 8 раз соответственно по сравнению со стандартной бабой молота (копра).

**Выводы.** Установленное уменьшение угла пружинения при гибке листовых заготовок на молоте (копра) при использовании бабы с наполнителем можно использовать в технологических целях для повышения размерной точности деталей и снижения трудоемкости.

Вместе с тем необходимо проведение дальнейших исследований для определения параметров бабы молота с наполнителем и наиболее целесообразных условий проведения процесса гибки для повышения точности и качества деталей.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбунов, М.Н. Технология заготовительно-штамповочных работ в производстве самолетов: Учебник для ВУЗов. – 2-е изд. перераб. и дополн / М.Н. Горбунов. – М.: Машиностроение, 1981. – 224 с.
2. Феофанова, А.Е. Экспериментальные исследования процесса удара при осадке цилиндрических заготовок / А.Е. Феофанова, В.Ю. Лавриненко // Заготовительные производства в машиностроении. – 2012. – № 2. – С. 12–15.
3. Пат. 2438825 Российская Федерация, МПК B21J 13/06. Баба молота / Феофанова А.Е., Демин В.А., Евсюков С.А., Лавриненко В.Ю., Семенов Е.И.; заявитель и патентообладатель МАМИ. – № 2010126570/02; заявл. 30.06.10; опубл. 10.01.2012, Бюл. № 1. – 3 с.

**Лавриненко Владислав Юрьевич**  
Московский государственный технический  
университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва  
Доктор технических наук, профессор кафедры  
«Технология обработки материалов»  
E-mail: vlavrinenko@bmstu.ru

**Чуваев Иван Сергеевич**  
Московский государственный машиностроительный  
университет (МАМИ), г. Москва  
Аспирант кафедры «Машины и технология обработки  
давлением»

---

V.Yu. LAVRINENKO, I.S. CHUVAEV

### EXPERIMENTAL RESEARCH ON BENDING BLANKS HAMMER

*The article presents the results of experimental studies of the V-shaped bending of steel blanks on the hammer (copra) using standard womens hammer (copra) and women with the filler in the form of steel balls. The increase of the duration of a pin (1.5 times) and reduced springback angle (up to 8 times) using women hammer (copra) with a filler as compared with a standard hammer Baba (copra).*

**Keywords:** sheet metal stamping, bending, elastic springing, hammer sheet-metal, a woman with a hammer filler.

### BIBLIOGRAPHY

1. Gorbunov, M.N. Tekhnologiya zagotovitelno-shtampovochnykh rabot v proizvodstve samoletov: Uchebnik dlya VUZov. – 2-ye izd. pererab. i dopoln / M.N. Gorbunov. – M.: Mashinostroyeniye, 1981. – 224 s.
2. Feofanova, A.Ye. Eksperimentalnyye issledovaniya protsessa udara pri osadke tsilindricheskikh zagotovok / A.Ye. Feofanova, V.YU. Lavrinenko // Zagotovitelnyye proizvodstva v mashinostroyenii. – 2012. – № 2. – S. 12–15.
3. Pat. 2438825 Rossiyskaya Federatsiya, MPK B21J 13/06. Baba molota / Feofanova A.Ye., Demin V.A., Yevsyukov S.A., Lavrinenko V.YU., Semenov Ye.I.; zayavitel i patentoobladatel MAMI. – № 2010126570/02; zayavl. 30.06.10; opubl. 10.01.2012, Byul. № 1. – 3 s.

**Lavrinenko Vladislav Yurevich**  
Moscow State Technical University N.E. Bauman  
Moscow  
Doctor of Technical Sciences, Professor of the  
Department «Materials Processing Technology»  
E-mail: vlavrinenko@bmstu.ru

**Chuvayev Ivan Sergeyevich**  
MAMI Moscow State Technical University (MAMI),  
Moscow  
Graduate student of the Department «Machines and  
Forming Technology»

М.А. СЕРЕЖКИН

## ВЫБОР СКОРОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ НАЛИПАНИЯ МАТЕРИАЛА ЗАГОТОВКИ НА ИНСТРУМЕНТ ПРИ ВЫТЯЖКЕ С ПРИЖИМОМ

*В статье представлена методика выбора скорости деформирования при вытяжке с прижимом, осуществляемая в условиях налипания штампуемого материала на инструмент. Выбранные, согласно представленной методике, значения скорости деформирования создают благоприятные условия для уменьшения налипания. Погрешность рассчитанных по методике значений скорости деформирования по сравнению с экспериментальными значениями составляют 10–15%.*

**Ключевые слова:** вытяжка, налипание, алюминиевые сплавы, колебания, скорость деформирования.

**Введение.** При расчёте технологических параметров операции вытяжки с прижимом часто руководствуются известными методиками, например методикой Попова Е.А. [1]. Но известные методики не учитывают, либо учитывают частично, взаимодействие контактирующих тел при вытяжке с прижимом – поверхность заготовки и рабочие поверхности инструмента (матрицы и прижима). Знание и понимание этого взаимодействия особенно важно при изготовлении деталей из алюминиевых сплавов марок АД1 и АД0, поскольку на основании практического опыта штамповки происходит налипание этих материалов на штамп.

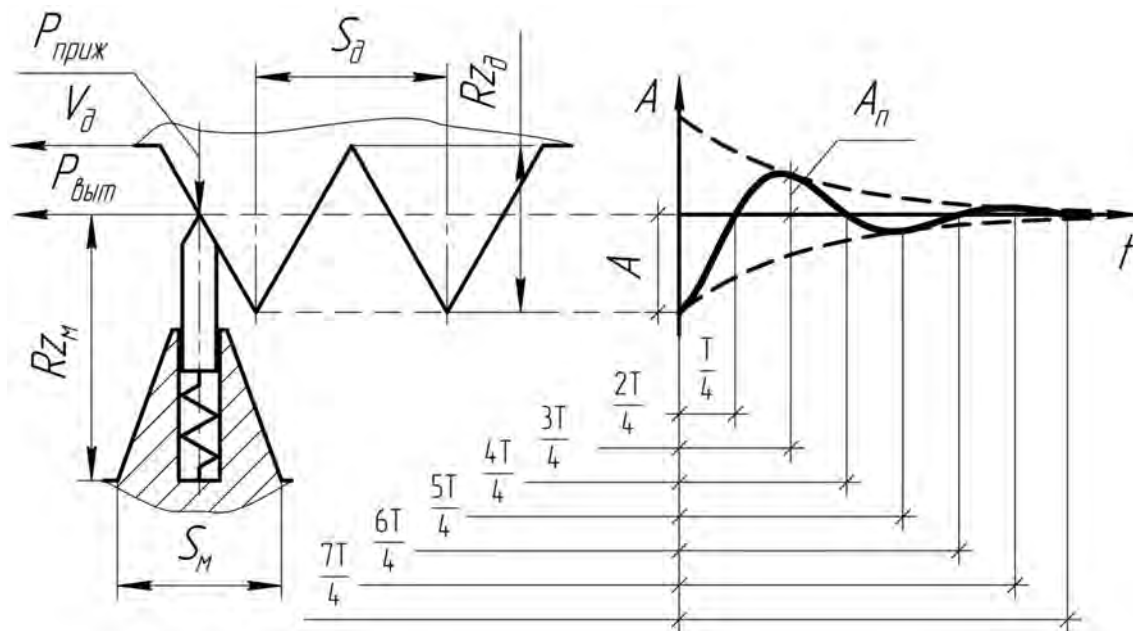
В данной работе предложена новая методика расчёта скорости деформирования при вытяжке с прижимом с учётом взаимодействия поверхностей заготовки и оснастки, учитывающей следующие характеристики поверхности: характеристики материалов заготовки и инструмента, их шероховатости, скорости относительного перемещения, и др.

Согласно разработанной модели единичные микронеровности имеют возможность выходить из положения устойчивого равновесия и совершать затухающие колебания. Из положения равновесия микронеровности выводятся за счёт действия внешних сил. Колебания совершаются в пределах упругих деформаций и способствуют процессу налипания. Совершая затухающие колебания, микронеровность имеет возможность внедряться в поверхность взаимодействующего тела и осуществлять процесс «микрорезания» – вырыв частиц металла. Вырванные частицы остаются в месте контакта. При этом часть поверхности вырванной частицы свободна от окислов и является химически активной, за счёт чего может происходить налипание – образование металлических связей между одно- и разнородными материалами [2]. Процесс налипания имеет нелинейный характер, зависящий от множества факторов. За счёт этого происходит накопление вырванных частиц в месте, где произошло налипание, что может привести к дефектам изготавливаемых деталей – глубоким рискам и бороздам.

**Исследовательская часть.** На рисунке 1 приведена схема взаимодействия единичной микронеровности матрицы штампа с поверхностью заготовки при вытяжке с прижимом. При этом единичную микронеровность представим в виде цилиндра, способного совершать колебания только в вертикальном направлении и абсолютно жесткого в продольном и поперечном направлении.

В работах Исаченкова Е.И. установлено, что при оптимальном сочетании вязкости смазочного материала, скорости деформирования и температуры, между заготовкой и матрицей возникает масляный клин, разделяющий поверхности инструмента и заготовки,

что способствует уменьшению деформирующей силы, повышению качества поверхности. При этом даны рекомендации относительно скорости деформирования и вязкости смазочного материала. Определим скорость деформирования, приняв возможность колебательного процесса в микронеровностях матрицы и сравним полученные значения с экспериментальными данными.



$$k_{\text{соуд}} \in \left(\frac{1}{4} \dots \frac{3}{4}\right); \left(\frac{5}{4} \dots \frac{7}{4}\right); \left(\frac{9}{4} \dots \frac{11}{4}\right); \dots \text{ и т. д.} \quad (4)$$

Колебание и контакт микронеровностей матрицы может привести к проникновению микронеровности матрицы в материал заготовки, разрушению оксидного слоя на поверхности заготовки, вырыву частиц материала заготовки и их налипанию на поверхность инструмента.

Рассмотренный процесс налипания становится наиболее интенсивным при обработке алюминиевых сплавов марок АД1 и АД0. Это связано с тем, что алюминиевые сплавы покрыты тонкой оксидной плёнкой, толщиной от 1 до 5 нм [3]. Рекомендуемая шероховатость рабочих поверхностей инструмента составляет примерно Ra 0,32...0,8 мкм [4], что соответствует высоте микронеровностей 2,5...6,3 мкм. Учитывая, что колебания микронеровности матрицы осуществляются в пределах упругой деформации, равной 0,2% от высоты микронеровности, величина упругой деформации составит 5...12,6 нм. Таким образом, величины амплитуды колебаний микронеровности матрицы хватает, для внедрения в поверхность заготовки и совершения вырыва частицы материала заготовки. Кроме того алюминий обладает большим сродством к железу, так как элементы расположены близко друг к другу в электрохимическом ряду активности металлов.

Для расчёта скорости деформирования подставим уравнение (1) в уравнение (2), а период колебаний микронеровности матрицы запишем следующим образом:  $T = 2\pi/\omega$  [5]. Здесь  $\omega$  – частота затухающих колебаний, рассчитываемая по формуле:  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , где  $\beta$  – коэффициент затухания колебаний, зависящий от многих параметров, в том числе и от вязкости среды, в которой происходят колебания и характеристик, влияющих на рассеивание энергии внутри материала [6]. При коэффициенте затухания колебаний  $\beta$  численно равным собственной частоте колебаний  $\omega_0$  процесс будет иметь апериодический характер и контакта микронеровностей, вследствие колебания микронеровности матрицы, происходить не будет.

Собственная частота колебания микронеровностей матрицы определяется по формуле:  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , где  $k$  – коэффициент упругости (жесткость тела), определяемый по закону Гука, а  $m$  – масса микронеровности матрицы. Для упрощения примем, что колеблющаяся микронеровность матрицы представляет собой цилиндрический стержень, а высотой равным параметру шероховатости матрицы  $Rz_M$ . Диаметр стержня примем равным половине диаметра основания микронеровности:  $S_M/2$ . Таким образом, коэффициент упругости  $k$  составит:  $k = \pi E S_M^2 / 16 Rz_M$ , где  $E$  – модуль упругости первого рода материала матрицы. Масса микронеровности матрицы  $m = 9,81 \pi S_M^2 Rz_M \rho / 16$ , где  $\rho$  – плотность материала. Множитель 9,81 необходим для перевода массы микронеровности из килограмм в ньютоны. Соответственно, для получения достоверных результатов расчёта рекомендуется пользоваться следующими размерностями:  $\rho$  – кг/мм<sup>3</sup>;  $S_M$  и  $Rz_M$  – мм;  $E$  – МПа. Таким образом, собственная частота колебаний может быть представлена в виде:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{E}{9,81 Rz_M^2 \rho}} \quad (5)$$

Величина скорости деформирования составит:

$$V_d = \frac{S_d \omega}{2\pi k_{\text{соуд}}} \quad (6)$$

Если коэффициент соударений  $k_{\text{соуд}}$  выбрать из интервалов (3), то скорость деформирования будет оптимальна, при такой скорости контакта колеблющейся микронеровности матрицы и заготовки не будет.

Выразив из уравнения (6) коэффициент соударения получим уравнение (7):

$$k_{\text{соуд}} = \frac{S_d \omega}{2\pi V_d} \quad (7)$$

Рассчитанное по уравнению (6) значение коэффициента соударения, сравнивается с интервалами (3) и (4). В случае попадания коэффициента соударения в интервалы (4), следует рассчитать оптимальную скорость деформирования, используя уравнение (6) и коэффициенты соударения из интервалов (3).

**Пример расчёта.** Рассмотрим процесс вытяжки с прижимом цилиндрического стаканчика из алюминиевого сплава АД1, диаметром  $d_{\text{дет}} = 28\text{мм}$ , высотой  $h_{\text{дет}} = 7,2\text{мм}$ , толщина исходной заготовки  $s_{\text{заг}} = 0,35\text{мм}$ . Примем: шероховатость поверхности заготовки  $Rz_{\text{д}} = 1,25\text{мкм} = 0,00125\text{мм}$ , инструмента  $Rz_{\text{и}} = 6,3\text{мкм} = 0,0063\text{мм}$ . Приняв средний шаг микронеровностей матрицы  $S_{\text{д}} = Rz_{\text{д}}/2$ , получим  $S_{\text{д}} = 0,000625\text{мм}$ . Модуль упругости первого рода для инструмента составит:  $E = 210000\text{МПа}$ , плотность материала инструмента:  $\rho = 7,8 \times 10^{-6}\text{кг/мм}^3$ . Коэффициент соударения примем равным из диапазона (3):  $k_{\text{соуд}} = 0,25$ .

В данном расчёте для упрощения примем, что колебания не затухающие, т.е.  $\beta = 0$ . В этом случае формула для расчёта периода колебаний примет вид:  $T = 2\pi/\omega_0$ . Значение  $\omega_0$  возьмём из уравнения (5).

$$V_{\text{д}} = \frac{S_{\text{д}}}{2\pi k_{\text{соуд}}} \sqrt{\frac{E}{9,81 Rz_{\text{и}}^2 \rho}} \quad (8)$$

Подставив полученные значения в уравнение (8), получим:  $V_{\text{д}} = 262,75\text{мм/с}$ . Таким образом, при нахождении скорости в диапазоне от 0 до 262,75мм/с при данных начальных условиях налипания происходить не будет. Варьируя коэффициент соударения в диапазонах (4), получим, что при нахождении скорости в диапазоне от свыше 262,75 до 515,64 мм/с налипание происходить будет.

Полученный результат хорошо согласуется с экспериментальными данными. По Исаченкову Е.И. при скорости деформирования  $V_{\text{д}} \geq 300\text{мм/с}$ , создаются благоприятные условия переноса частиц материала заготовки на рабочие поверхности матрицы [7]. Погрешность расчёта составляет 10–15%.

**Выводы.** Разработана научно–обоснованная методика расчёта скорости деформирования при вытяжке с прижимом деталей из алюминиевых сплавов АД1 и АД0 при которой не возникают условия, способствующие налипанию материала заготовки на инструмент. Погрешность результатов расчёта по представленной методике по сравнению с экспериментальными данными составляет 10–15%.

Согласно разработанной методике, в случае если недопустимо варьировать скорость деформации, рекомендуется изменять шероховатость поверхности инструмента, или увеличивать коэффициент затухания колебаниям: например увеличить вязкость смазочного материала, или заполнить впадины между микронеровностями инертным по отношению к материалу заготовки веществом. Например, в случае вытяжки с прижимом заготовок из АД1 и АД0 таким веществом может являться медь и её сплавы. Перспективным являются методы, позволяющие сделать поверхность матрицы «холмистой». Этого можно достичь оплавлением поверхности или обработкой поверхности чугунной дробью.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сторожев, М.В. Теория обработки металлов давлением. Учебник для вузов. Изд. 3–е, переработ. и доп. / М.В. Сторожев, Е.А. Попов. – М.: Машиностроение, 1971. – 420 с.
2. Гаркунов, Д.Н. Виды трения и износа. Эксплуатационные повреждения деталей машин / Д.Н. Гаркунов, П.И. Корник. – М.: Изд-во МСХА, 2003. – 344 с.
3. Schmitz, Christoph. Handbook of Aluminium Recycling / Christoph Schmitz. – Vulkan-Verlag GmbH, 2006. – 454 p.
4. Ковка и штамповка: Справочник: В 4 т. Т.4. Листовая штамповка / Под общ. ред. С.С. Яковлева; ред. совет: Е.И. Семенов (пред.) и др. – 2–е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 2010. – 732 с.

5. Лекции по основам теории вибрационных машин и технологий : учеб. пособие для вузов / Г.Я. Пановко – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. – 191 с.
6. Тарануха, Н.А. Математическое и экспериментальное моделирование колебаний стержневых судовых конструкций с учетом сопротивления внешней среды различной плотности / Н.А. Тарануха // Ученые записки КнАГТУ. – Комсомольск-на-Амуре: КнАГТУ. – 2010. – Т. 1. – № 4. – С. 81–91.
7. Исачеков, Е.И. Штамповка резиной и жидкостью / Е.И. Исачеков. – М.: Машгиз, 1962. – 327 с.

**Сережкин Михаил Александрович**

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва

ассистент кафедры «Технология обработки материалов»

E-mail: pehobatop@gmail.com

---

M.A. SEREZHKIN

## SELECT SPEED DEFORMATION IN THE BLANKS CAKING TOOL AT DRAWING WITH HOLDER

*The paper presents a methodology for selecting the strain rate during stretching with holder, exercised in a formed material buildup on the tool. Selected according to the presented method, the strain rate values create favorable conditions to reduce sticking. The error calculated by the method of the strain rate values compared with the experimental values is 10–15%.*

**Keywords:** hood, sticking, aluminum alloys, vibrations, strain rate.

## BIBLIOGRAPHY

1. Storozhev, M.V. Teoriya obrabotki metallov davleniyem. Uchebnik dlya vuzov. Izd. 3–ye, pererabot. i dop. / M.V. Storozhev, Ye.A. Popov. – М.: Mashinostroyeniye, 1971. – 420 s.
2. Garkunov, D.N. Vidy treniya i iznosa. Eksploatatsionnyye povrezhdeniya detaley mashin / D.N. Garkunov, P.I. Kornik. – М.: Изд-во MSKHA, 2003. – 344 s.
3. Schmitz, Christoph. Handbook of Aluminium Recycling / Christoph Schmitz. – Vulkan-Verlag GmbH, 2006. – 454 p.
4. Kovka i shtampovka: Spravochnik: V 4 t. T.4. Listovaya shtampovka / Pod obshch. red. S.S. Yakovleva; red. sovet: Ye.I. Semenov (pred.) i dr. –2–ye izd., pererab. i dop. – М.:Mashinostroyeniye, 2010. – 732 s.
5. Lektsii po osnovam teorii vibratsionnykh mashin i tekhnologiy : ucheb. posobiye dlya vuzov / G.YA. Panovko – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. – 191 с.
6. Taranukha, N.A. Matematicheskoye i eksperimentalnoye modelirovaniye kolebaniy sterzhnevyykh sudovykh konstruktsiy s uchetom soprotivleniya vneshney sredy razlichnoy plotnosti / N.A. Taranukha // Uchenyye zapiski KnAGTU. – Komsomolsk-na-Amure: KnAGTU. – 2010. – Т. 1. – № 4. – С. 81–91.
7. Isachekov, Ye.I. Shtampovka rezinoy i zhidkostyu / Ye.I. Isachekov. – М.: Mashgiz, 1962. – 327 s.

**Serezhkin Mikhail Aleksandrovich**

Moscow State Technical University N.E. Bauman, Moscow

the department «Materials Processing Technology» Assistant

E-mail: pehobatop@gmail.com

С.Н. ЛАРИН, Я.А. СОБОЛЕВ, А.В. ЧАРИН

## ИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ ПНЕВМОФОРМОВКА ЭЛЕМЕНТОВ ЯЧЕИСТЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ЛИСТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ КВАДРАТНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

*Приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований процесса изотермической пневмоформовки ячеистых элементов многослойных листовых конструкций из анизотропного материала в режиме ползучести. Предполагается, что процесс формообразования осуществляется в две стадии: свободное деформирование оболочки и стесненное деформирование при формообразовании угловых элементов конструкций.*

**Ключевые слова:** пневмоформовка, ячеистые конструкции, анизотропия, сила, напряжения, повреждаемость.

**Введение.** К числу наиболее перспективных и принципиально новых технологических процессов, направленных на совершенствование современного производства, относится медленное горячее формоизменение листовых заготовок избыточным давлением газа (пневмоформовка) с предварительной или одновременной диффузионной сваркой [1, 2]. Технологические принципы формоизменения листовых заготовок избыточным давлением газа и диффузионной сваркой могут быть применены в производстве ячеистых многослойных листовых конструкций.

Листовой материал, подвергаемый штамповке, как правило, обладает анизотропией механических свойств, обусловленной маркой материала, технологическими режимами его получения, которая оказывает влияние на устойчивое протекание технологических процессов обработки металлов давлением [1–7].

В многослойных листовых конструкциях квадратные элементы получают изотермической пневмоформовкой листов (заполнителей), предварительно жестко соединенных по контуру с наружными листами (обшивками) до полного их прилегания к последним. Допускается, что процесс формообразования осуществляется в две стадии: свободное деформирование оболочки и стесненное деформирование при формообразовании угловых элементов конструкций. Свободная формовка оболочки осуществляется до момента времени  $t_1$ , когда оболочка достигнет обшивки.

Рассмотрим деформирование анизотропного материала в условиях ползучего течения. Упругими составляющими деформации пренебрегаем. Вводится потенциал скоростей деформации анизотропного тела при ползучем течении в виде:

$$2f(\sigma_{ij}) \equiv H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\ + 2N\tau_{xy}^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2, \quad (1)$$

где  $H, F, G, N, L, M$  – параметры анизотропии при ползучести;

$\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;

$x, y, z$  – главные оси анизотропии.

В этом случае компоненты скоростей деформации  $\xi_{ij}^c$  определяются в соответствии с ассоциированным законом течения:

$$\xi_{ij}^c = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2)$$

где  $\lambda$  – коэффициент пропорциональности.

При вязком течении материала по аналогии с работами Р. Хилла и Н.Н. Малинина введены понятия эквивалентного напряжения  $\sigma_e$  и эквивалентной скорости деформации  $\xi_e$  [6, 7].

Уравнения состояния с учетом повреждаемости, описывающие поведение материала, подчиняющегося энергетической теории ползучести и повреждаемости, записываются в виде:

$$\xi_e = B(\sigma_e / \sigma_{e0})^n / (1 - \omega_A)^m; \quad \dot{\omega}_A = \sigma_e \xi_e / A_{np}, \quad (3)$$

а применительно к группе материалов, подчиняющихся кинетическим уравнениям ползучести и повреждаемости, так:

$$\xi_e = B(\sigma_e / \sigma_{e0})^n / (1 - \omega_e)^m; \quad \dot{\omega}_e = \xi_e / \varepsilon_{enp}. \quad (4)$$

где  $B, n, m$  – константы материала, зависящие от температуры испытаний;

$A_{np}, \varepsilon_{enp}$  – удельная работа разрушения и предельная эквивалентная деформация при вязком течении материала;

$\omega_e$  и  $\omega_A$  – повреждаемость материала при вязкой деформации по деформационной и энергетической моделям разрушения соответственно;

$\sigma_{e0}$  – произвольно выбранная величина эквивалентного напряжения;

$$\dot{\omega}_A = d\omega_A / dt; \quad \dot{\omega}_e = d\omega_e / dt.$$

Величина удельной работы разрушения  $A_{np}^c$  при вязком течении анизотропного материала определяется по выражению:

$$A_{np}^c = D(b_0 + b_1 \cos \alpha + b_2 \cos \beta + b_3 \cos \gamma),$$

где  $D, b_0, b_1, b_2, b_3$  – константы материала;

$\alpha, \beta, \gamma$  – углы ориентации первой главной оси напряжений  $\sigma_1$  относительно главных осей анизотропии  $x, y$  и  $z$  соответственно.

Аналогичным образом находится предельная величина эквивалентной деформации  $\varepsilon_{enp}^c$  [1].

Предельные возможности формоизменения в процессах обработки металлов давлением, протекающих при различных температурно–скоростных режимах деформирования, часто оцениваются на базе феноменологических моделей разрушения. В зависимости от условий эксплуатации или последующей обработки изготавливаемого изделия уровень повреждаемости не должен превышать 1, т.е.  $\omega \leq 1$ .

**Напряженное и деформированное состояния заготовки.** Рассмотрим деформирование тонкостенной листовой заготовки в квадратную матрицу со сторонами  $2a$  в режиме ползучести под действием гидростатического давления  $p = p_0 + a_p t^{n_p}$ , где  $p_0, a_p, n_p$  – константы нагружения. Материал заготовки принимаем анизотропным. Заготовка закреплена по внешнему контуру (рисунок 1).

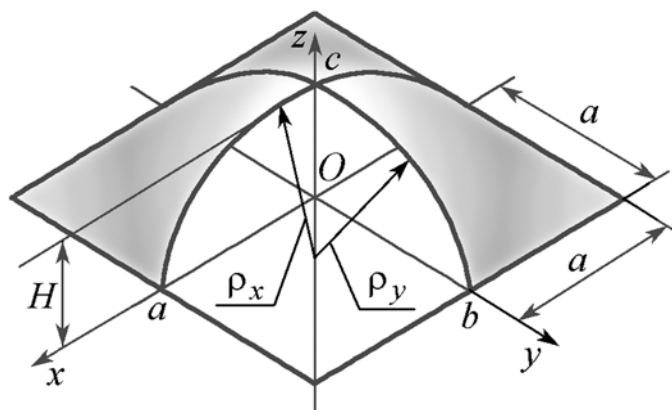


Рисунок 1 – Схема выпучивания квадратной мембраны

Принимаем, что напряженное состояние заготовки плоское ( $\sigma_z = 0$ ). Радиусы кривизны окружностей в плоскостях  $xOz$  и  $xOy$  равны:



$$\rho_x = \rho_y = \frac{H^2 + a^2}{2H}. \quad (5)$$

Допускаем, что траектории точек ортогональны в данный момент образуемому профилю. В этом случае в полюсе срединной поверхности (точка «с») скорости деформаций будут определяться по формулам:

$$\xi_{yc}^c = \xi_{xc}^c = \frac{2H\dot{H}}{H^2 + a^2}; \quad \xi_{zc}^c = \frac{\dot{h}}{h}, \quad (6)$$

где  $\dot{H} = dH / dt$ ;  $\dot{h} = dh / dt$ .

Так как мембрана закреплена по внешнему контуру, то в точках «а» и «б» с координатами  $x = a$   $y = 0$  и  $x = 0$   $y = a$  соответственно имеем:

$$\xi_{ya}^c = 0; \quad \sigma_{ya} = \frac{H\sigma_{xa}}{F + H} = \frac{R_y\sigma_{xa}}{1 + R_y}; \quad \xi_{xa}^c = -\xi_{za}^c, \quad (7)$$

и

$$\xi_{xb}^c = 0; \quad \sigma_{xb} = \frac{H\sigma_{yb}}{H + G} = \frac{R_x\sigma_{yb}}{1 + R_x}; \quad \xi_{yb}^c = -\xi_{zb}^c. \quad (8)$$

Примем для простоты анализа, что в каждый момент деформации в сечении оболочки  $xOz$  скорость деформации  $\xi_y^c$  от купола к стороне  $x = a$  вдоль оси  $x$  изменяется по линейному закону от максимальной величины в вершине купола до нуля в точке  $x = a$ , а величина скорости деформации  $\xi_x^c$  постоянна по величине. Кроме того, предполагаем, что в сечении  $yOz$  скорость деформации  $\xi_x^c$  убывает по линейному закону от своей максимальной величины в вершине купола оболочки до нуля в точке  $y = a$ , а величина  $\xi_y^c$  остается постоянной.

Величина толщины заготовки в точках «с», «а» и «б» может быть определена по выражениям:

$$h_c = h_0 \left[ \frac{a^2}{H^2 + a^2} \right]^2; \quad h_a = h_b = h_0 \frac{a^2}{H^2 + a^2}, \quad (9)$$

где  $h_0$  – начальная толщина мембраны.

Вырезая из заготовки элемент меридиональными и окружными сечениями и принимая, что напряжения равномерно распределенными по толщине, запишем уравнение равновесия безмоментной оболочки, нагруженной равномерным давлением  $p$  [5]:

$$\frac{\sigma_y}{\rho_y} + \frac{\sigma_x}{\rho_x} = \frac{p}{h}. \quad (10)$$

Определим отношение скоростей деформаций  $\xi_{xc}^c$  и  $\xi_{yc}^c$  в точке купола заготовки «с» из ассоциированного закона течения (2) так:

$$\frac{\xi_{xc}^c}{\xi_{yc}^c} = \frac{R_y R_x (\sigma_x - \sigma_y) + R_y \sigma_x}{R_x \sigma_y + R_x R_y (\sigma_y - \sigma_x)}. \quad (11)$$

Решая систему уравнений (10) (11) совместно, получим:

$$\sigma_{xc} = \chi \sigma_{yc}; \quad \sigma_{yc} = \frac{p \rho_y}{h(1 + \chi)}, \quad (12)$$

где

$$\chi = \frac{R_x(1 + R_y) + R_x R_y}{R_y(1 + R_x) + R_x R_y}. \quad (13)$$

В случае плоского напряженного состояния эквивалентная скорость деформации  $\xi_e$  и напряжения  $\sigma_e$  вычисляются по известным соотношениям [5].

**Силовые режимы и предельные возможности формоизменения.** Рассмотрим, в качестве примера, медленное изотермическое деформирование в режиме вязкого течения ( $\sigma_e \leq \sigma_{e0}$ ) материала, для которого справедливы уравнения энергетической теории ползучести и повреждаемости (3).

Получим уравнения для определения давления  $p$ . Поскольку величина давления  $p$  в каждый момент деформирования равномерно распределена по поверхности оболочки, то будем определять его величину в полюсе сферы (точка «с»).

Учитывая, что в полюсе (центре симметрии заготовки):

$$\xi_{xc}^c = \xi_{yc}^c, \quad (14)$$

выражение для определения эквивалентной скорости деформации  $\xi_e$  в точке «с» может быть представлено в виде:

$$\xi_{ec} = C_1 \xi_{yc}^c = C_1 \frac{2H\dot{H}}{(H^2 + a^2)}, \quad (15)$$

где

$$C_1 = \sqrt{\frac{2(R_x + R_x R_y + R_y)}{3 R_x R_y (R_x + R_y + 1)}} \{R_x(R_y + 1) + 2R_x R_y + R_y(R_x + 1)\}^{1/2}. \quad (16)$$

Величина эквивалентного напряжения  $\sigma_e$  в точке «с» оценивается по выражению:

$$\sigma_{ec} = D_1 \sigma_{yc}, \quad (17)$$

где

$$D_1 = \left\{ \frac{3 R_y (R_x + 1) \chi^2 - 2 R_x R_y \chi + R_x (R_y + 1)}{2 R_x + R_x R_y + R_y} \right\}^{1/2}. \quad (18)$$

Из уравнения состояния материала (3) с учетом величин  $\sigma_e, \xi_e$  получим:

$$p^n dt = \frac{C_1 (\sigma_{e0})^n (1 - \omega_A^c)^m 2^{2n+1} h_0^n a^{4n} (1 + \chi) H^{n+1} dH}{BD_1^n (H^2 + a^2)^{3n+1}}. \quad (19)$$

Второе уравнение состояния (3) позволяет найти выражение для определения величины повреждаемости:

$$\dot{\omega}_{Ac}^c = \frac{D_1 C_1 (H^2 + a^2)^2 p \dot{H}}{h_0 a^4 (1 + \chi) A_{npc}^c}. \quad (20)$$

Аналогичным образом могут быть получены основные уравнения и соотношения для решения поставленной задачи в предположении, что поведение материала подчиняется уравнениям кинетической теории ползучести и повреждаемости, при известном законе давления от времени.

Проанализируем вторую стадию деформирования. Рассмотрим формирование углового элемента оболочки в плоскостях симметрии  $yOz$  и  $xOz$ . Считаем, что  $a > H_1$ . Предполагаем, что нам известны давление  $p_1$ , высота оболочки  $H_1$ , накопленная повреждаемость  $\omega_0$  и распределение толщины оболочки  $h_1 = h_1(\varphi)$  в момент  $t = t_1$ , где  $\varphi$  – угол, характеризующий положение точки на угловом элементе заготовки.

Будем считать, что процесс формообразования угловых элементов конструкций осуществляется в соответствии с рисунком 2.

Предлагается следующая схема деформирования оболочки на второй стадии деформирования при  $t > t_1$ . После контакта вершины купола с обшивкой предполагается, что реализуется равномерное деформированное состояние, т.е. толщина оболочки меняется

равномерно в каждой точке оболочки от начальных размеров при  $t = t_1$ , а форма деформируемой угловой части оболочки в плоскостях  $xOz$  и  $yOz$  сохраняет форму части окружности.

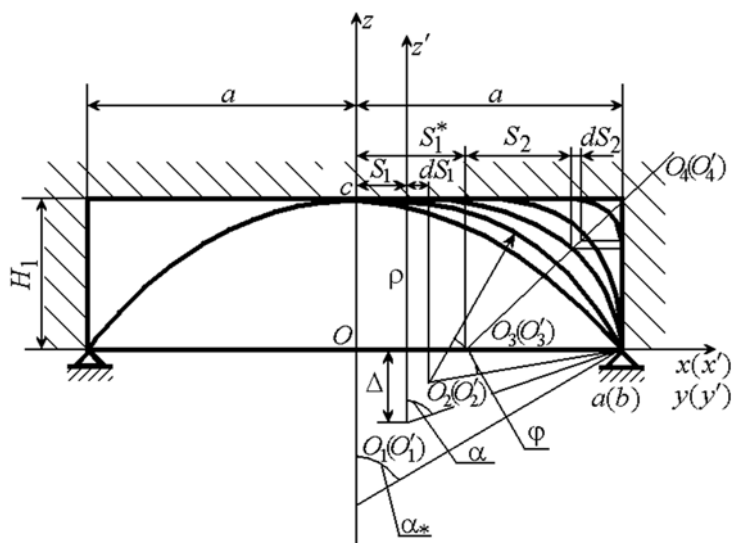


Рисунок 2 – Формообразование угловых элементов в плоскостях  $yOz$  и  $xOz$

На первом этапе второй стадии деформирования в плоскостях  $yOz$  и  $xOz$  формируется плоский участок в окрестности вершины купола до момента, когда  $S_1 = S_{1*} = a - H_1$ . В дальнейшем на втором этапе второй стадии происходит симметричное деформирование оболочки относительно новых осей симметрии  $O_3O_4$  и  $O'_3O'_4$  с образованием симметрично плоских участков в угловой части оболочки; при этом форма деформируемой свободной угловой части в указанных выше плоскостях имеет форму части окружности (рисунок 2).

Получены необходимые уравнения и соотношения для теоретического анализа напряженного и деформированного состояния заготовки при формообразовании угловых элементов конструкции.

Приведенные выше соотношения для анализа процессов изотермического деформирования квадратной оболочки, закрепленной по контуру, позволили установить влияние закона нагружения, геометрических размеров заготовки, анизотропии механических свойств исходного материала на напряженное и деформированное состояния, силовые режимы и предельные возможности исследуемого процесса изотермической пневмоформовки в режиме кратковременной ползучести, связанные с накоплением микрповреждений.

Расчеты выполнены для алюминиевого сплава АМг6 при температуре обработки  $T = 450^\circ\text{C}$ , поведение которого описывается энергетической теорией ползучести и повреждаемости, и для титанового сплава ВТ14 при температуре  $T = 950^\circ\text{C}$ , поведение которого описывается кинетической теорией ползучести и повреждаемости. Механические характеристики этих материалов при формоизменении в условиях вязкого течения материала приведены в работе [1].

Графические зависимости изменения относительных величин толщины заготовки в куполе  $\bar{h}_c = h_c/h_0$  и в месте ее закрепления  $\bar{h}_a = h_a/h_0$ , высоты заготовки  $\bar{H} = H/h_0$  ( $h_0 = 1$  мм) и максимальной величины повреждаемости в куполе заготовки  $\omega_A$  от времени деформирования  $t$  для алюминиевого сплава АМг6 ( $T = 450^\circ$ ), поведение которого описывается энергетической теорией ползучести и повреждаемости, при заданном законе нагружения  $p = p_0 + a_p t^{n_p}$  представлены на рисунке 3 ( $R_x = R_y = 0,7$ ). Точками обозначены результаты экспериментальных исследований, описанных ниже.

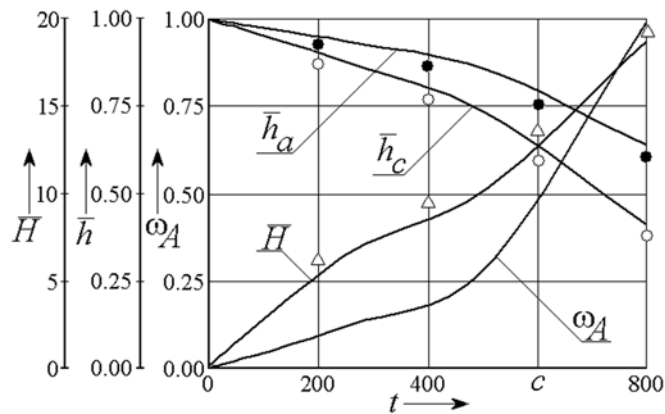


Рисунок 3 – Зависимости изменения величин  $\bar{H}$ ,  $\bar{h}$  и  $\omega_A$  в рассматриваемых точках от времени деформирования  $t$  для алюминиевого сплава АМг6:

$$T = 450^\circ \text{C}; a_p = 0,06 \text{ МПа} / \text{с}^{n_p}; n_p = 0,4; a = 25 \text{ мм}$$

Из анализа графических зависимостей следует, что с ростом времени деформирования  $t$  до определенного предела осуществляется резкое увеличение относительной высоты заготовки  $\bar{H}$  и уменьшение относительной толщины заготовки в куполе  $\bar{h}_c$  и в месте ее закрепления  $\bar{h}_a$ . В момент времени  $t$ , близком к разрушению заготовки, происходит резкое изменение относительных величин  $\bar{H}$ ,  $\bar{h}_c$  и  $\bar{h}_a$ . Это связано с интенсивным ростом накопления микрповреждений в заключительной стадии процесса.

Установлено, что изменение относительной толщины в куполе заготовки  $\bar{h}_c$  происходит более интенсивно по сравнению с изменением относительной толщины в месте ее закрепления  $\bar{h}_a$ . С ростом времени деформирования  $t$  эта разница увеличивается и может достигать 30 %. Сопоставление результатов расчетов с результатами экспериментальных исследований по геометрическим размерам на этапах деформирования при заданном законе нагружения указывает на удовлетворительное их согласование.

При исследовании установлены зависимости изменения относительных величин толщины заготовки в вершине мембраны  $\bar{h}_{c*} = h_{c*} / h_0$  и в точках защемления  $\bar{h}_{a*} = h_{a*} / h_0$ , высоты заготовки  $\bar{H}_* = H_* / h_0$  в момент разрушения заготовки, предельного времени деформирования  $t_*$  от параметров закона нагружения ( $a_p$ ,  $n_p$ ) для алюминиевого сплава АМг6 ( $a = 25$  мм).

Предельные возможности свободной пневмоформовки квадратной мембраны ограничиваются феноменологическим критерием по накоплению микрповреждений ( $\omega_A^c = 1$ ) в зависимости от условий деформирования.

Анализ результатов расчетов показывает, что увеличение параметров закона нагружения  $a_p$ ,  $n_p$  приводит к уменьшению времени разрушения  $t_*$  и относительной высоты заготовки  $\bar{H}_*$ , а также – к увеличению относительной толщины в куполе заготовки  $\bar{h}_{c*}$ . Установлено, что для исследуемых материалов при условиях нагружения ( $a_p$ ,  $n_p$ ), исследуемых в работе, разрушение оболочки по критерию накопления повреждений происходит в куполе заготовки (точка «с»).

Предельные возможности формоизменения в режиме вязкого течения материала, поведение которого подчиняется кинетической теории ползучести и повреждаемости, не зависят от условий нагружения заготовки. Показана существенная зависимость времени разрушения  $t_*$  от параметров нагружения  $a_p$  и  $n_p$ .

На основе теоретических расчетов построены графические зависимости изменения зоны контакта заготовки с верхней частью матрицы от времени деформирования  $t$ , на

которых в характерных точках показана величина накопленных микроповреждений  $\omega_A$ . Эти зависимости приведены на рисунке 4. С ростом времени деформирования  $t$  зона контакта заготовки с верхней частью матрицы и максимальная величина накопленных повреждений  $\omega_A$  возрастают.

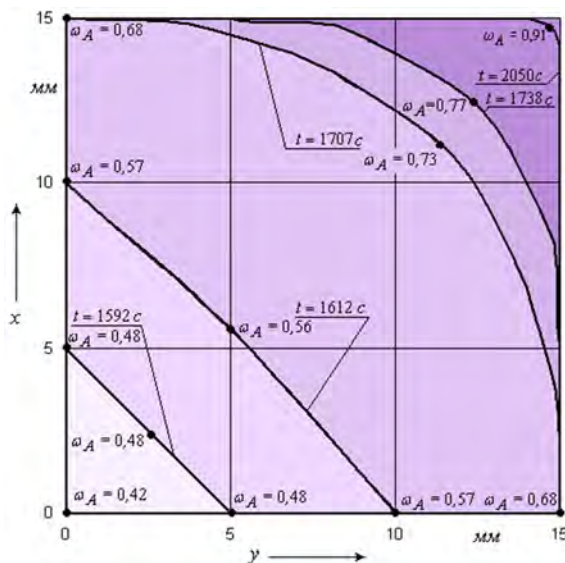


Рисунок 4 – Графические зависимости изменения зоны контакта заготовки с верхней частью матрицы от времени деформирования  $t$

Графические зависимости изменения коэффициента заполнения  $\delta_F = F / F_0$  и максимальной величины накопленных микроповреждений  $\omega_A$  от времени деформирования  $t$  представлены на рисунке 5. Здесь  $F$  и  $F_0$  – текущая и полная площадь верхней части матрицы. Расчеты выполнены для алюминиевого сплава АМг6 для ячейки  $a=15$  мм при  $a_p = 0,06 \text{ МПа} / \text{с}^{n_p}$ ,  $n_p = 0,4$ . Анализ графических зависимостей показывает, что процесс заполнения угловых элементов условно можно разделить на три стадии: стадия плавного увеличения величины  $\delta_F$ , последующая стадия интенсивного его роста и стадию плавного увеличения величины  $\delta_F$ .

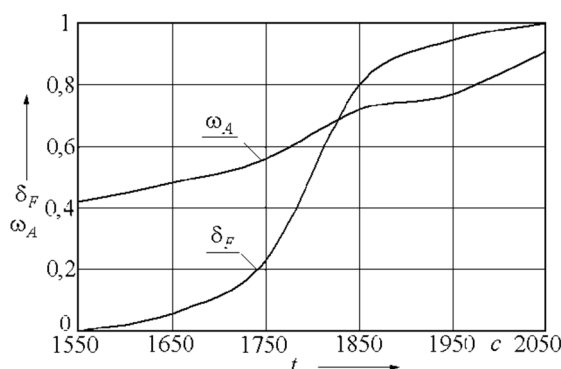


Рисунок 5 – Графические зависимости изменения  $\delta_F$  и максимальной величины накопленных микроповреждений  $\omega_A$  от  $t$

На рисунке 6 представлены графические зависимости относительных предельных величин радиуса закругления углового элемента оболочки  $\bar{r}_* = r_* / h_0$  и времени разрушения  $t_*$  от параметров закона нагружения  $a_p$  и  $n_p$  для алюминиевого сплава АМг6 ( $T = 450^\circ \text{C}$ ). Расчеты выполнены при следующих геометрических размерах  $a = 25$  мм;  $H = 10$  мм;  $h_0 = 1$  мм.

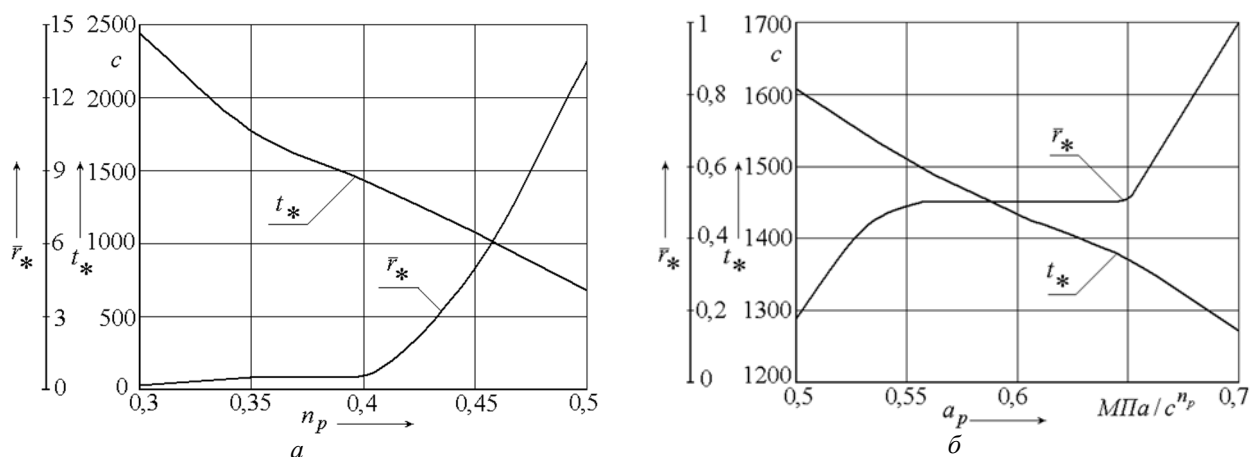


Рисунок 6 – Графические зависимости изменения  $\bar{r}_*$  и  $t_*$

от параметров закона нагружения  $n_p$  ( $a_p=0,06 \text{ МПа} / \text{с}^{n_p}$ ) и  $a_p$  ( $n_p=0,4$ )

Из анализа графических зависимостей следует, что с ростом параметров закона нагружения  $n_p$  и  $a_p$  наблюдается увеличение относительной величины критического радиуса закругления  $\bar{r}_*$ . Установлено, что с увеличением параметров нагружения  $n_p$  и  $a_p$  время разрушения  $t_*$  существенно уменьшается.

Экспериментальные исследования процессов формообразования при свободном и стесненном деформировании листовой заготовки в квадратную матрицу с последующим оформлением (калибровкой) угловых элементов проводились применительно к изготовлению двухслойных открытых ячеистых конструкций («вафельных»). Они используют для корпусов емкостей жидких компонентов топлива – баков из алюминиевых сплавов АМг6, 1911, 1971, 1201. При высокой несущей способности панели имеют относительно малую массу и равнопрочность при нагружении.

Технологические схемы формообразования названных конструкций показаны на рисунке 7. Здесь обозначены: 1 – обшивки; 2 – формируемый наполнитель; 3 – вставки; 4 – штамп; 5 – места первой сварки; 6 – формируемый купол ячейки; 7 – калиброванная ячейка; 8 – места второй сварки; 9 – изделие.

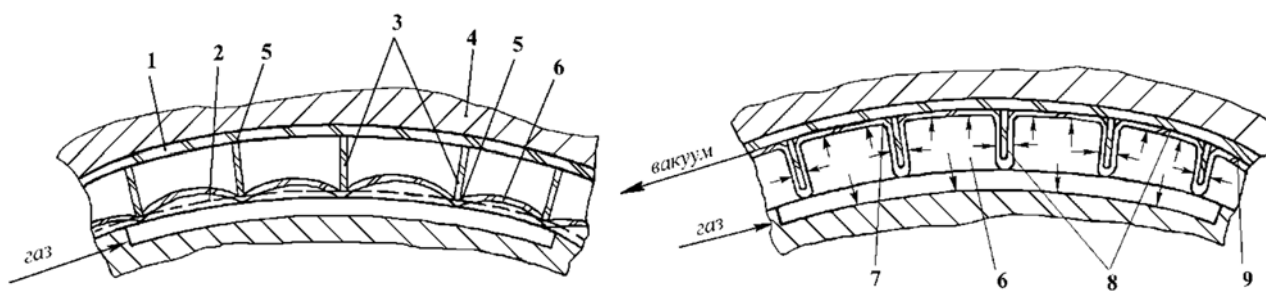


Рисунок 7 – Технологические схемы этапов формообразования вафельной панели

При изготовлении «вафельных» (рисунок 7) конструкций последовательность операций была следующая: установка исходного набора заготовок в составе двух листов 1, 2 и наборного пластинчатого каркаса 3 между ними в штампе 4; вакуумирование и нагрев; сварка давлением одного листа с каркасом в зонах 5; формообразование ячеек 6 на одном листе с калибровкой углов 7; диффузионная сварка давлением газа всех заготовок по зонам 8 с оформлением изделия 9.

На базе этой схемы проведены исследования, определяющие технологические режимы входящих операций.

Экспериментальные исследования проводились на установке, описанной в работе [1].

На рисунке 8 показаны отформованные газом заготовки, на которых отрабатывали операции свободной формовки и калибровки угловых зон ячеек.



*Рисунок 8 – Ячейки на стадиях формообразования*

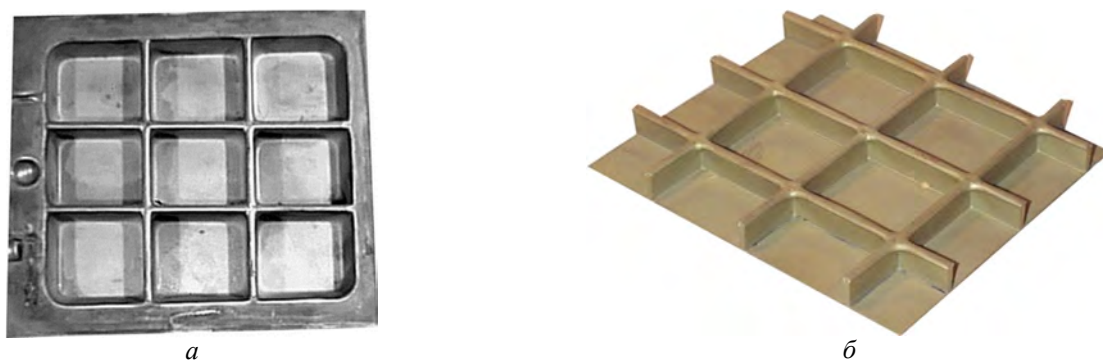
Использовались листовые заготовки указанных алюминиевых сплавов толщиной 1 мм для деформируемого листа (заполнителя); толщиной 1,5...2 мм – для наружного листа (обшивки) и 1,5...2 мм – для пластинчатого каркаса. Размеры панелей в плане были до 350 мм при строительных высотах 20...30 мм и размерах ячеек 30...50 мм.

Экспериментально отрабатывались процессы сварки давлением жестким инструментом и давлением газа, режимы формообразования на стадиях выпучивания ячеек и калибровки в комплексном процессе изготовления панелей [1]. Исходные заготовки предварительно обезжиривали, травили в азотной кислоте, сушили и на все поверхности, подлежащие соединению, наносили вакуумным напылением медь толщиной 0,5 мкм. Слой вакуумной меди диффундировал в пограничном слое при диффузионной сварке и способствовал повышению качества соединения. Пакет заготовок 1, 2, 3 устанавливали в сборе, помещали в вакуумную пресс-камеру в штампе 4, нагревали до  $530^{\circ}\text{C}$  с вакуумированием до  $0,5 \times 10^{-4}$  мм рт. ст.

В штампе пакет сжимали, выдерживали в течение 20 мин под давлением 10 МПа для завершения сварки каркаса с листами в зонах 5 и подавали газ (аргон) на поверхность заполнителя 2 при температуре  $475^{\circ}\text{C}$ . При давлении до 0,5 МПа происходила формовка купола (ячеек до его контакта с обшивкой 1). Длительность операции – в пределах 5...7 мин. На этом этап свободной формовки оканчивался и при повышении давления до 1...1,5 МПа в течение 10 мин калибровали угловые зоны ячеек.

Охлаждение производили при постепенном снятии давления, что обеспечивало термофиксацию панели, т.е. снятие остаточных напряжений и, как следствие, точность геометрии. Прочность соединений здесь достигает прочности основного металла, что подтверждается результатами механических испытаний. Предел прочности составлял 280...300 МПа на разрыв и после термоупрочнения повышался до 350...370 МПа.

Образцы некоторых элементов ячеистых конструкций из алюминиевых сплавов АМгб и 1911 представлены на рисунке 9.



*Рисунок 9 – Образцы некоторых элементов ячеистых конструкций*

*Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания №2014/227 на выполнение научно-исследовательских работ Министерства образования и науки Российской Федерации на 2014–2020 годы и грантов РФФИ № № 16–48–710016 и 16–08–00020.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Изотермическое деформирование высокопрочных анизотропных металлов / С.П. Яковлев, В.Н. Чудин, С.С. Яковлев, Я.А. Соболев. – М: Машиностроение–1, Изд–во ТулГУ, 2004. – 427 с.
2. Механика процессов изотермического формоизменения элементов многослойных листовых конструкций / С.П. Яковлев, С.С. Яковлев, В.Н. Чудин, Я.А. Соболев. – Тула: ТулГУ, 2001. – 254 с.
3. Гречников, Ф.В. Деформирование анизотропных материалов / Ф.В. Гречников. – М.: Машиностроение, 1998. – 446 с.
4. Яковлев, С.П. Штамповка анизотропных заготовок / С.П. Яковлев, В.Д. Кухарь. – М.: Машиностроение, 1986. – 136 с.
5. Яковлев, С.П. Обработка давлением анизотропных материалов / С.П. Яковлев, С.С. Яковлев, В.А. Андрейченко. – Кишинев: Квант, 1997. – 332 с.
6. Малинин, Н.Н. Ползучесть в обработке металлов / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1986. – 216 с.
7. Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 408 с.

**Ларин Сергей Николаевич**  
Тулеский гостатственный  
университет, Тула  
доктор технических наук,  
профессор, зав. кафедрой  
«Механика пластического  
формоизменения»  
E-mail: mpf-tula@rambler.ru

**Соболев Яков Алексеевич**  
Университет машиностроения,  
Москва  
доктор технических наук,  
профессор, проф. кафедры  
«Машины и технологии обработки  
металлов давлением имени И.А.  
Норицына»  
E-mail: mpf-tula@rambler.ru

**Чарин Александр Владимирович**  
Тулеский гостатственный  
университет, Тула  
кандидат технических наук, доцент  
кафедры «Механика пластического  
формоизменения»  
E-mail: mpf-tula@rambler.ru

S.N. LARIN, Ja.A. SOBOLEV, A.V. CHARIN

## ISOTHERMAL PNEUMATIC FORMING ELEMENTS CELLULAR MULTILAYER SHEET CONSTRUCTION SQUARE CROSS-SECTION OF ANISOTROPIC MATERIAL

*The results of theoretical and experimental studies of the isothermal process pneumatic forming cellular elements multilayer sheet structures of anisotropic materials in creep mode. It is assumed that the forming process is carried out in two steps: the shell and deforming the free constrained angular deformation in forming structural elements.*

**Keywords:** pneumatic forming, cellular structure, anisotropy, strength, stress, defect.

## BIBLIOGRAPHY

1. Izotermicheskoye deformirovaniye vysokoprochnykh anizotropnykh metallov / S.P. Yakovlev, V.N. Chudin, S.S. Yakovlev, Ya.A. Sobolev. – M: Mashinostroyeniye–1, Izd–vo TulGU, 2004. – 427 s.
2. Mekhanika protsessov izotermicheskogo formoizmeneniya elementov mnogosloynykh listovykh konstruksiy / S.P. Yakovlev, S.S. Yakovlev, V.N. Chudin, Ya.A. Sobolev. – Tula: TulGU, 2001. – 254 s.
3. Grechnikov, F.V. Deformirovaniye anizotropnykh materialov / F.V. Grechnikov. – M.: Mashinostroyeniye, 1998. – 446 s.
4. Yakovlev, S.P. Shtampovka anizotropnykh zagotovok / S.P. Yakovlev, V.D. Kukhar. – M.: Mashinostroyeniye, 1986. – 136 s.
5. Yakovlev, S.P. Obrabotka davleniyem anizotropnykh materialov / S.P. Yakovlev, S.S. Yakovlev, V.A. Andreychenko. – Kishinev: Kvant, 1997. – 332 s.
6. Malinin, N.N. Polzuchest v obrabotke metallov / N.N. Malinin. – M.: Mashinostroyeniye, 1986. – 216 s.
7. Khill, R. Matematicheskaya teoriya plastichnosti / R. Khill. – M.: GITTL, 1956. – 408 s.

**Larin Sergey Nikolayevich**  
Tula State University, Tula  
Doctor of Technical Sciences,  
Professor, Head. the department  
«Mechanics of plastic deformation»  
E-mail: mpf-tula@rambler.ru

**Sobolev Yakov Alekseyevich**  
Engineering, Moscow University  
doctor of technical sciences,  
professor, prof. Department of  
«Machinery and metal processing  
technology pressure behalf IA  
Noritsyna»  
E-mail: mpf-tula@rambler.ru

**Charin Aleksandr Vladimirovich**  
Tula State University, Tula  
Ph.D., Associate Professor of  
«Mechanics of plastic deformation»  
E-mail: mpf-tula@rambler.ru



## **ПРИБОРОСТРОЕНИЕ** **И БИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ**

УДК 612.76:539.4

М.И. КАЛИНИН, Е.В. ПАШКОВ, А.М. ПОЛЯКОВ, Я.Н. ГАЙНУЛЛИНА

### **СИНТЕЗ ЗАКРЫТЫХ НАНОЖИДКОСТНЫХ ИМПЛАНТИРУЕМЫХ МЕТАЛЛОКОНСТРУКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ СОВРЕМЕННЫХ САПР**

*В работе рассматриваются особенности применения современных систем автоматизированного проектирования для решения задач синтеза инновационных имплантируемых металлоконструкций эндопротезов крупных суставов и позвоночника человека. В процессе проектирования и конструирования разрабатывались закрытые наножидкостные пары трения на основе фуллерена  $C_{60}$ . Конструкция и исполнение исследуемых изделий позволит существенно увеличить их ресурс. Для реальных трибологических испытаний данных конструкций спроектированы и изготовлены мультикоординатные экспериментальные стенды – симуляторы, работающие в соответствии с действующими стандартами ISO и ASTM.*

**Ключевые слова:** импланты, наножидкость, эндопротезы, ресурс, межпозвонковые диски, автоматизированное проектирование, стенды – симуляторы.

Практически все специалисты, работающие в области эндопротезирования крупных суставов человека, сходятся во мнении, что проблема разработки и производства эндопротезов тазобедренного сустава (ЭТБС), обладающих длительным сроком службы, еще ждет своего решения. Появление новых металлов, сплавов, керамических компонентов, полимерных композиционных материалов – практически решило вопросы биоинертности при их использовании в конструкциях эндопротезов крупных суставов и позвоночника человека. Однако, несмотря на интенсивное развитие эндопротезирования тазобедренного сустава, за последние десятилетия так и не удалось добиться значительного увеличения срока функционирования импланта в организме человека [1].

В практике эндопротезирования широко применяются различные типы и модели имплантируемых конструкций, к которым относятся: биартикулярные, однополюсные, тотальные, цементные, ревизионные, онкологические, бесцементные, анатомически адаптируемые, специальные, комбинированные, индивидуальные и другие системы. Практически все они нуждаются в увеличении срока службы и продлении периода выживаемости в организме человека. Поэтому проблема увеличения ресурса ЭТБС сегодня считается чрезвычайно актуальной и требует новых технических, конструкторских, материаловедческих и технологических решений для ее устранения.

В лаборатории биомеханики СевГУ выполнены разработка и патентование новой конструкции ЭТБС с увеличенным сроком службы, а также исследования трибологических характеристик новой пары трения в условиях, соответствующих действующим стандартам.

Статистически достоверные данные, свидетельствующие о росте травм и заболеваний позвоночника человека, приводят к идее разработки новых конструкций и технологий изготовления межтеловых спинальных имплантатов (МСИ), обеспечивающих высокое качество жизни пациентов после высокотехнологичных оперативных вмешательств. Основой решения подобных задач является тщательное изучение биомеханики межпозвонковых дисков. Известно, что механические свойства различных фрагментов межпозвонковых дисков, хотя и влияют на их характеристики в целом, но не исчерпываются их физико – механическими параметрами. Компрессионные силы, действующие на диски, могут частично трансформироваться в тангенциально направленные усилия растяжения фиброзного кольца и силы упругой деформации гиалиновых замыкательных пластин тел позвонков [2]. Благодаря наличию гистерезисных явлений, ударно – динамические нагрузки энергетически поглощаются, защищая, тем самым, спинной мозг от значительных импульсных воздействий. Таким образом, межпозвонковый диск выполняет функцию, своего рода демпфера – амортизатора. Угловые перемещения позвонков определяются действием и величиной изгибающих моментов сил. Комплексное воздействие групп сил и моментов вызывает достаточно сложное перераспределение напряжений и нагрузок, что, в

свою очередь, накладывает определенные ограничения и требования при конструировании и компоновке межтеловых имплантатов.

Целью работы является проведение цикла конструкторских и технологических исследований для организации последующего серийного производства спинальных имплантируемых наножидкостных металлоконструкций закрытого исполнения, применяющихся в травматологии, ортопедии, вертебрологии и нейрохирургии.

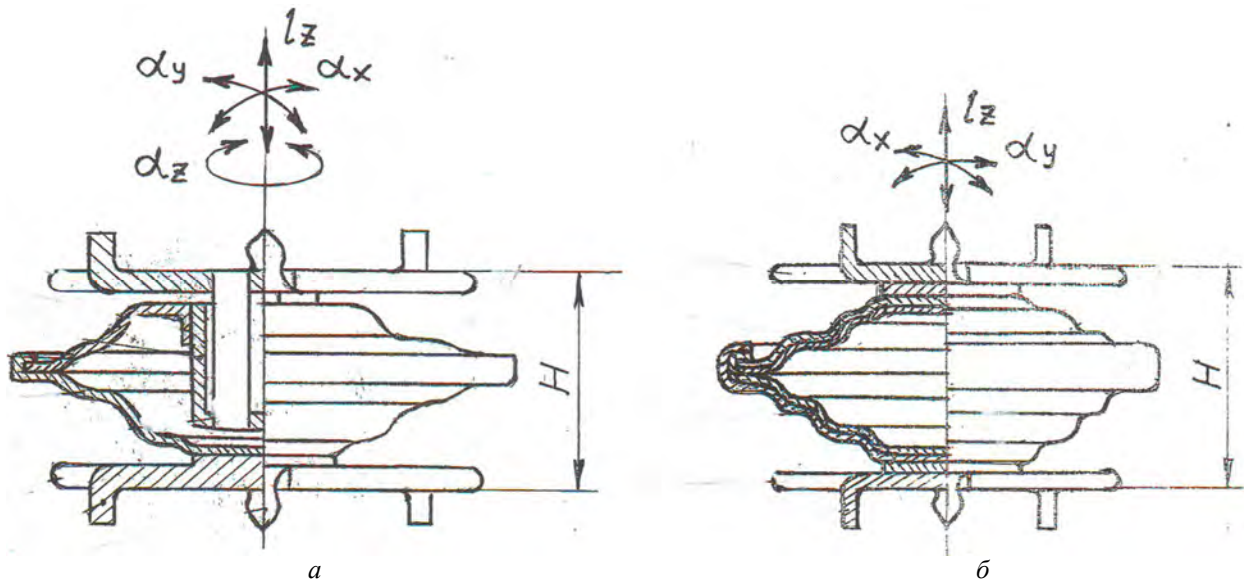


Рисунок 1 – Наножидкостные закрытые имплантаты МСИ:  
а – торсионногидрокамерный; б – гидрокамерный

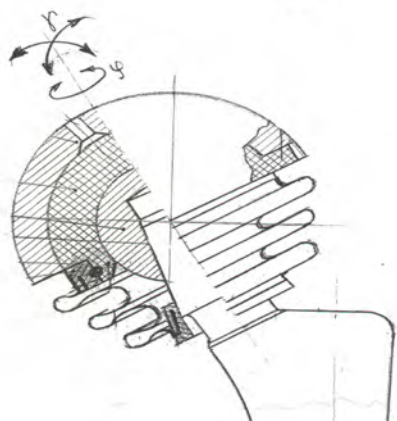
В ходе исследований решались проблемы выбора конструкционных материалов, вариантов фиксации компонентов эндопротезов в костных тканях, особенности дизайна чашек и ножек эндопротезов, а также варианты исполнения и компоновки сферической пары трения. Сегодня на мировом рынке предлагаются более восьмисот типов и моделей ЭТБС, а значит, есть возможность выбора необходимой конструкции для каждого конкретного клинического случая. Однако срок службы всех конструкций в достаточной степени ограничен, а значит, идеальный эндопротез тазобедренного сустава еще не создан. Задача разработки нового закрытого эндопротеза решалась в несколько этапов. В лаборатории биомеханики СевГУ был разработан и запатентован эндопротез тазобедренного сустава с частично регулярным микрорельефом [3]. Доказано, что нанесение на головку эндопротеза микрорельефа дает целый спектр положительных эффектов.

В частности – существенно улучшаются трибологические характеристики пары трения за счет того, что продукты износа накапливаются в лунках, они же удерживают компоненты смазывающих веществ, снижают коэффициент трения и меняют разновидность трения. Становится возможной замена пленочного или граничного трения на жидкостное трение. Однако, при решении этой задачи, существуют определенные трудности. Необходимо определить оптимальные параметры микрорельефа, к которым относятся: форма лунок, шаг, глубина рельефа, расположение их на поверхности головки, радиальное или тангенциальное исполнение, технология формирования, распределение и концентрация напряжений вокруг лунок, симметричность, периодичность расположения и другие [4]. Помимо этого прорабатывалась идея реализации сферической пары трения, выполненной в виде циркуляционной опоры с механизмом рекуперации наножидкости – в зону трения. Найдено оригинальное техническое решение для этого варианта пары трения эндопротеза (Заявка на изобретение РФ № 2015138637 от 10.09.2015 г.).

Подробно изучались результаты анализа данных по первичным и отдаленным итогам эндопротезирования поясничного отдела позвоночника, полученные после многолетнего изучения опыта работы ведущих европейских клиник вертебрологического профиля [5]. Использование в мировой практике эндопротезирования существующих и наиболее распространенных на рынке конструкций и типов межтеловых имплантатов доказало их несовершенство и выявило проблемы наиболее часто регистрируемые в сравнительно короткое время после оперативного вмешательства. К основным проблемам можно отнести

низкий срок службы из – за износа элементов эндопротезов и высокую вероятность «замыкания», т.е. потерю относительной подвижности элементов эндопротезов. Поскольку в реальных обстоятельствах всегда действуют комбинации системы сил и моментов, а анатомические движения структур позвоночника включают в себя сопряженные перемещения в пространственных координатах с углами ротации от  $1^\circ$  до  $47^\circ$  [6], то это приводит к однозначной потребности обеспечить множественность координат, реализованных на стадии синтеза серии эндопротезов межпозвонковых дисков. При решении этой задачи, были найдены конструктивные, технические и технологические решения, позволяющие кардинально снизить трение в элементах эндопротезов, что дает возможность резко увеличить ресурс и сроки выживаемости имплантируемых металлоконструкций.

Решение задачи конструирования нового наножидкостного эндопротеза тазобедренного сустава заключалось в создании закрытой зоны размещения и работы сферического шарнирного соединения, в которой становится возможным удерживать искусственную наножидкость и исключить попадание продуктов износа в близлежащие ткани организма человека. Для этого в традиционную конструкцию эндопротеза, содержащую ножку, чашку, вкладыш и сферическую головку, была включена коническая упругая тонкостенная гофрированная оболочка (рисунок 2).



**Рисунок 2 – Закрытый эндопротез тазобедренного сустава**

Одна сторона оболочки большего диаметра снабжена армирующим кольцом, образующим с ответным выступом вкладыша упорно – радиальный подшипник скольжения. Другой конец оболочки, меньшего диаметра, армирован кольцом с внутренним коническим отверстием, образующим с шейкой ножки герметичное соединение. На контактирующих поверхностях элементов эндопротеза и армирующих колец выполнены кольцевые канавки сферической формы, в которых размещаются стопорные кольца круглого поперечного сечения. Внутренняя полость гофрированной оболочки заполнена – биоинертной наножидкостью, содержащей фуллерен  $C_{60}$ , что способствует существенному уменьшению трения в сферическом шарнире ЭТБС. Такое конструктивное

решение дает двойной положительный эффект – предотвращает попадание продуктов износа элементов импланта в ткани организма и резко снижает коэффициент трения в паре головка – вкладыш. Еще одним плюсом данной конструкции является возможность ее использования в качестве ревизионного эндопротеза после удаления искусственного сустава с парой трения керамика – керамика или сапфир – сапфир, поскольку полностью удалить микрочастицы этих материалов из раны невозможно, а их наличие в зоне трения нового эндопротеза вызывает его ускоренный износ в геометрической прогрессии (Заявка на изобретение РФ № 2014147426 от 27.04.2014 г.).

С участием коллег из Крымского федерального университета была разработана серия имплантов, состоящая из десяти конструкций спинальных эндопротезов межпозвонковых дисков. Существенные отличительные особенности и принципиально новые конструктивные решения, найденные при синтезе имплантатов, позволили подать заявки на изобретения для всех разработанных конструкций эндопротезов. Существенная дифференциация медицинских показаний при эндопротезировании межпозвонковых дисков вызвала потребность в применении различных конструктивных решений, дающих возможность получить модели эндопротезов с тремя, четырьмя и даже с шестью степенями подвижности [7, 8].

Конструкции опорно – центрирующих узлов эндопротезов выполнены принципиально отличающимися друг от друга. Среди инновационных разработок имплантатов имеются жидкостные, моноблочные, торсионные, составные, ревизионные, комбинированные, мембранные и сильфонно – торсионные конструкции. Существенной отличительной особенностью разработанных имплантируемых металлоконструкций является их «закрытое» исполнение, т.е. опорно – центрирующие узлы трения помещены в замкнутую гофрированную оболочку, предотвращающую миграцию продуктов износа в ткани

организма, и не допускающую попадания в зону трения суставных жидкостей, сгустков крови, микрочастиц костной ткани и т.д. (рисунок 3).

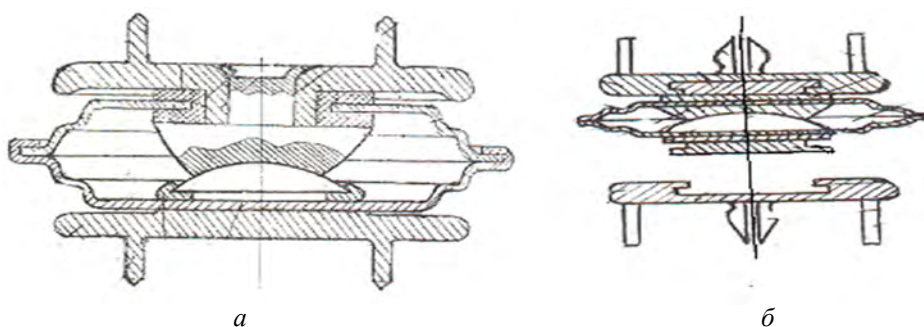


Рисунок 3 – Эндопротезы межпозвонковых дисков: а – шарнирногидрокамерный; б – ревизионный

Дополнительным фактором, положительно влияющим на ресурс эндопротезов, является введение в замкнутый объем эндопротезов немодифицированного углерода (фуллерена  $C_{60}$ ). Это позволяет, как было сказано выше, заменить режим граничного или пленочного трения на жидкостное трение, увеличив, тем самым срок службы. Для доклинических испытаний разработанных конструкций спроектирован и построен уникальный 6 – ти координатный стенд – симулятор на базе известной платформы Стюарта – Гауфа. Электронная система управления стенда выполнена на элементной базе и комплектующих концерна «FESTO» (Германия – Австрия), являющегося партнером Севастопольского государственного университета в области биомеханических и биомедицинских исследований.

Использование фуллерена  $C_{60}$  в конструкциях жидкостных закрытых эндопротезов тазобедренного сустава позволяет в 8 – 10 раз снизить величину коэффициента трения и, значит, существенно увеличить срок службы конструкции в целом. Образующиеся при эксплуатации продукты износа оседают и удерживаются в нижней части гофрированной оболочки, помогая избежать возникновения воспалительных процессов и сократить, время ревизионных оперативных вмешательств. Разрабатываемый эндопротез позволяет полностью восстановить опорность и функциональность работы опорно – двигательного аппарата человека с сохранением требуемого объема движения. Трибологические характеристики нового эндопротеза позволяют надеяться на увеличение надежности, стабильности, ресурса и выживаемости эндопротеза в организме человека.

Результаты выполненных исследований позволяют надеяться на то, что новые наножидкостные мультикоординатные эндопротезы межпозвонковых дисков с пролонгированным сроком службы, защищенные серией патентов на изобретения Российской Федерации, позволят применять их в любых клинических ситуациях, значительно облегчат труд нейрохирургов, травматологов, хирургов – вертебрологов и существенно повысят качество жизни пациентов, избавив их от необходимости выполнения ревизионных оперативных вмешательств.

Увеличение производительности труда, сокращение сроков проектирования, повышение качества разработки имплантов являются важнейшими задачами, качественное решение которых, определяет уровень ускорения научно-технического прогресса. При реализации инновационных проектов широко применяются информационные технологии, поднимающие проектную работу на качественно новый уровень, более обоснованно решались многие сложные инженерные задачи. К примеру, задачи многокритериальной оптимизации, которые раньше рассматривались в упрощенной постановке. Во многом это происходит благодаря использованию эффективных специализированных программ, которые могут быть как самостоятельными, так и приложениями к общетехническим программам. Проектирование выполняется с использованием современных систем автоматизированного проектирования (САПР) [9].

Одним из высокотехнологичных объектов, проектируемых с применением САПР КОМПАС–3D является 6–ти координатный гексапод.

Гексапод или платформа Стюарта – это разновидность параллельного манипулятора. Платформа имеет шесть степеней подвижности, реализуемых шестью независимыми актуаторами на шарнирных соединениях, длины которых можно изменять, что влияет на ориентацию платформы [10].



Гексаподы широко применяются в станкостроении, подводных исследованиях, летательных тренажёрах, позиционировании спутниковых антенн, в телескопах, в ортопедической хирургии и эндопротезировании [10].

Элементной базой спроектированного и изготовленного гексапода являются:

- 6 электрических линейных актуаторов концерна FESTO серии DNS (ISO 155652) типа EPCOZ6–1207a укомплектованных присоединительными деталями;
- спроектированная жесткая рама с 3-мя стойками;
- система управления с контроллерами FESTO типа CMMO – ST (рисунок 4).



*Рисунок 4 – Система управления стандом на базе CMMO – ST*

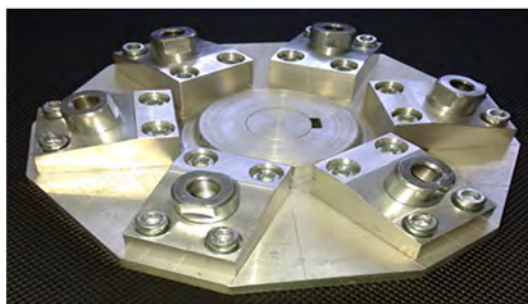


*Рисунок 5 – Стенд на базе платформы на заключительном этапе сборки*

Основная сложность проектирования заключалась в построении и воссоздании реальных анатомически адекватных движений шарнирных соединений и самонастраивающихся гибких соединений в полном соответствии со стандартами ASTM F2077, ISO 18197–1 и ASTM F2346.

Сферические шарниры имеют возможность вращения и наклона до  $8^\circ$  на каждую сторону.

Самонастраивающиеся гибкие соединения имеют 4 – х градусную компенсацию угла и служат для присоединения группы актуаторов к нижней платформе. С учетом особенностей конструкции основания и условия эксплуатации гексапода, спроектировали двенадцатигранный подвижный диск (рисунок 6) с угловыми опорами, которые обеспечивают нулевую предустановку актуаторов [11].



*Рисунок 6 – Нижняя платформа в сборе (вид снизу)*

В результате, спроектированные детали в полной мере соответствуют требуемым параметрам и обеспечивают все возможные перемещения подвижного диска без соприкосновений актуаторов между собой и с опорами. Все возможные перемещения воссозданы и проверены с помощью программы КОМПАС–3D. Спроектированная и изготовленная модель гексапода представленная на рисунках 4 – 6, проходит этап пусконаладочных работ.

Экспериментальная конструкция гексапода дает возможность исследовать трибологические свойства искусственных шарниров крупных суставов (коленных, тазобедренных, плечевых, локтевых, голеностопных) и эндопротезов межпозвонковых дисков человека.

Испытания искусственных элементов суставов и эндопротезов в гексапode выполняются следующим образом: имплант закрепляется между подвижной платформой и верхним регулируемым диском через силоизмерительный датчик типа С9В (номинальное усилие до 50 кН, класс точности 0,5) производства фирмы HBMGmbH, который может коммутироваться с универсальным усилителем QUANTUM X MX 440A. На испытуемый образец подается необходимая нагрузка через регулируемый диск, а нижней подвижной платформе (рисунок 6) задаются необходимые комбинации движений по 6-ти координатам.

Таким образом, отечественная САПР КОМПАС-3D позволяет за сравнительно небольшой промежуток времени с требуемой точностью, спроектировать модель и определить рабочее пространство, кинематическую схему платформы, заданные границы и параметры движения.

Применение спроектированного стенда в реальных испытаниях элементов эндопротезов крупных суставов и позвоночника человека, позволит качественно оценить ресурс испытуемых объектов и значительно увеличить конкурентоспособность имплантируемых изделий.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розенберг, О.А. Пути создания эндопротеза тазобедренного сустава нового поколения // Современные технологии в машиностроении / О.А. Розенберг, Н.В. Новиков, А.Н. Косяков. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2010. – Вып. 5. – 190 с.
2. Продан, А.И. Дегенеративные заболевания позвоночника / А.И. Продан, В.А. Радченко, Н.А. Корж. – Харьков: АМНУ, 2007. – 487 с.
3. Пат. 2303962 Российская Федерация, МПК Н 04 В 1/38, Н 04 J 13/00. Сферический шарнир эндопротеза тазобедренного сустава / М.И. Калинин, В.И. Пахалюк и др; заявитель и патентообладатель Севастопольский национальный технический университет. – № 2003102300/14; заявл. 27.01.2003; опубл. 10.08.2007, Бюл. № 16. – 3 с.
4. Горячева, И.Г. Механика контактного взаимодействия / И.Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
5. Новиков, Н.В. Эндопротезы суставов человека: Материалы и технологии / Н.В. Новиков, О.А. Розенберг, Й. Гавлик. – Киев: Синописис, 2011. – 528 с.
6. Пахалюк, В.И. Биологические реакции на частицы износа, образующиеся в традиционных и альтернативных парах трения при тотальном замещении тазобедренного сустава / В.И. Пахалюк, М.И. Калинин, Г.Д. Олиниченко // Ортопедия и травматология. – 2003. – № 4. – С. 162–169.
7. Радченко, В.А. Влияние изменений паравerteбральных мышц на результаты хирургического лечения дегенеративных заболеваний позвоночника / В.А. Радченко, А.Г. Скиданов // Материалы симпозиума «Актуальные вопросы современной ортопедии травматологии». – Днепропетровск. – 2015. – С. 71 – 72.
8. Образцов, И.Ф. Проблемы прочности в биомеханике / И.Ф. Образцов, И.С. Адамович. – М.: Высшая школа, 1988. – 312 с.
9. Большаков, В.П. Твердое моделирование деталей в CAD-системах: AutoCAD, КОМПАС-3D, SolidWorks, Inventor, Creo / В.П. Большаков. – М, 2014. – 304 с.
10. Bonev, I.A. The True Origins of Parallel Robots, ParalleMIC online review [Электронный ресурс] URL: <http://www.parallemic.org/Reviews/Review007.html>.
11. Кудрявцев, Е.М. КОМПАС-3D. Моделирование, проектирование и расчет механических систем / Е.М. Кудрявцев. – М.: ДМК Пресс, 2008. – 399 с.

### Калинин Михаил Иванович

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»,  
кандидат технических наук, доцент кафедры  
«Техническая механика и машиноведение»  
г. Севастополь,  
ул. Университетская, 33  
Тел. +7(8692) 435–161  
E-mail: kalininseva@mail.ru

### Поляков Александр Михайлович

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»,  
кандидат технических наук, доцент кафедры  
«Техническая механика и машиноведение»  
г. Севастополь,  
ул. Университетская, 33  
Тел. +7(8692) 435–161  
E-mail: a.m.poljakov@sevsu.ru

### Пашков Евгений Валентинович

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», доктор технических наук, профессор  
кафедры «Приборные системы и автоматизация  
технических процессов»  
г. Севастополь,  
ул. Университетская, 33  
Тел. +7(8692)550–077  
E-mail: pashkov@sevsu.ru

### Гайнуллина Яна Николаевна

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»,  
аспирант кафедры «Техническая механика и  
машиноведение»  
г. Севастополь,  
ул. Университетская, 33  
Тел. +7(8692) 435–161  
E-mail: medeya-ru@yandex.ru

M.I. KALININ, E.V. PASHKOV, A.M. POLYAKOV, Ya.N. GAINULLINA

## SYNTHESIS OF CLOSED STEEL LIQUID IMPLANTABLE USING ADVANCED CAD

*The paper deals with the problem of the use of modern computer-aided design to solve the problems of synthesis of innovative implantable endoprosthesis of large joints of steel structures and the human spine. In the process of designing and constructing used closed nanofluids friction pairs based on the C60 fullerene. The design and execution of the test product can significantly extend the life of implants. For real tribological test data structures are designed and manufactured multicoordinate test stands – simulators operating in accordance with applicable ISO and ASTM standards.*

**Keywords:** implants, nanofluids, endoprothesis, resource, intervertebral discs, computer-aided design.

## BIBLIOGRAPHY

1. Rozenberg, O.A. Puti sozdaniya endoproteza tazobedrennogo sustava novogo pokoleniya // *Sovremennyye tekhnologii v mashinostroyenii* / O.A. Rozenberg, N.V. Novikov, A.N. Kosyakov. – Kharkov: NTU «KHPI», 2010. – Vyp. 5. – 190 s.
2. Prodan, A.I. Degenerativnyye zabolovaniya pozvonochnika / A.I. Prodan, V.A. Radchenko, N.A. Korzh. – Kharkov: AMNU. 2007. – 487 s.
3. Pat. 2303962 Rossiyskaya Federatsiya, MPK N 04 V 1/38, N 04 J 13/00. Sfericheskiy sharnir endoproteza tazobedrennogo sustava / M.I. Kalinin, V.I. Pakhalvuk i dr; zavavitel i patentoobladatel Sevastopolskiy natsionalnyy tekhnicheskii universitet. – № 2003102300/14; zavavl. 27.01.2003; opubl. 10.08.2007, Byul. № 16. – 3 s.
4. Goryacheva, I.G. Mekhanika kontaktnogo vzaimodeystviya / I.G. Goryacheva. – M.: Nauka, 2001. – 478 s.
5. Novikov, N.V. Endoprotezy sustavov cheloveka: Materialy i tekhnologii / N.V. Novikov, O.A. Rozenberg, Y. Gavlik. – Kiev: Sinopsis, 2011. – 528 s.
6. Pakhalvuk, V.I. Biologicheskoye reaktivirovaniye na chastitsy iznosa, obrazuyushchiesya v traditsionnykh i alternativnykh parakh treniya pri totalnom zameshchenii tazobedrennogo sustava / V.I. Pakhalvuk, M.I. Kalinin, G.D. Olinichenko // *Ortopediya i travmatologiya*. – 2003. – № 4. – S. 162–169.
7. Radchenko, V.A. Vliyanie izmeneniya paravertebralnykh myshits na rezul'taty khirurgicheskogo lecheniya degenerativnykh zabolovaniy pozvonochnika / V.A. Radchenko, A.G. Skidanov // *Materialy simpoziuma «Aktualnyye voprosy sovremennoy ortopedii travmatologii»*. – Dnepropetrovsk. – 2015. – S. 71 – 72.
8. Obratsov, I.F. Problemy prochnosti v biomekhanike / I.F. Obratsov, I.S. Adamovich. – M.: Vysshaya shkola, 1988. – 312 s.
9. Bolshakov, V.P. Tverdoye modelirovaniye detaley v CAD-sistemakh: AutoCAD, KOMPAS-3D, SolidWorks, Inventor, Creo / V.P. Bolshakov. – M. 2014. – 304 s.
10. Bonev, I.A. The True Origins of Parallel Robots, ParalleMIC online review [Elektronnyy resurs] URL: <http://www.parallemic.org/Reviews/Review007.html>.
11. Kudryavtsev, Ye.M. KOMPAS-3D. Modelirovaniye, proyektirovaniye i raschet mekhanicheskikh sistem / Ye.M. Kudryavtsev. – M.: DMK Press, 2008. – 399 s.

### Kalinin Mikhail Ivanovich

Sevastopol State University,  
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the  
Department «Technical Mechanics and Engineering»,  
Sevastopol, Str. University, 33,  
Tel. +7(8692) 435-161  
E-mail: kalininsev@mail.ru

### Polyakov Aleksandr Mikhaylovich

Sevastopol State University,  
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the  
Department «Technical Mechanics and Engineering»,  
Sevastopol,  
Str. University, 33,  
Tel. +7(8692) 435-161  
E-mail: a.m.poljakov@sevsu.ru

### Pashkov Yevgeny Valentinovich

Sevastopol State University,  
Doctor of Technical Sciences, Professor of the  
Department «Instrument Systems and automation of  
technical processes»  
Sevastopol,  
Str. University, 33,  
Tel. +7(8692) 550-007  
E-mail: pashkov@sevsu.ru

### Gainullina Yana Nikolaevna

Sevastopol State University,  
Graduate student of the Department «Technical  
Mechanics and Engineering», Sevastopol,  
Str. University, 33,  
Tel. +7(8692) 435-161  
E-mail: medeya-ru@yandex.ru

УДК 681.5.08

М.Д. ХОРОШЕВСКИЙ, П.С. ИВАНКОВ, Р.Н. КУЛАГИН, М.Г. КРИСТАЛЬ

## РАЗРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ПРОЦЕССА ВИБРОЧАСТОТНОГО ИЗМЕРЕНИЯ ДИАМЕТРОВ ОТВЕРСТИЙ МАЛОГО НОМИНАЛА

*Приведен анализ известных виброконтактных средств измерения линейных размеров деталей. Показано, что используемые в них методы измерения линейных размеров по амплитуде колебаний измерительного щупа не обеспечивают точность, необходимую для групповой взаимозаменяемости при сортировке отверстий на размерные группы. Предложено виброконтактное средство измерения малых диаметров отверстий для сортировки при селективной сборке, использующие в качестве выходного сигнала изменяющуюся частоту колебаний измерительного щупа. Такой подход позволяет существенно снизить погрешность измерительных средств, что актуально при малом групповом допуске.*

**Ключевые слова:** виброконтактное устройство, контроль диаметров, токопроводящая деталь, виброгенератор, частотный выходной сигнал.

В горнодобывающей промышленности используют буровые коронки, сборка корпусов которых с твёрдосплавными зубками выполняют запрессовкой в отверстия по методу групповой взаимозаменяемости. Это предусматривает стопроцентное измерение диаметров сопрягаемых поверхностей с сортировкой на размерные группы. При этом величина группового допуска, как правило, не превышает 5 мкм, что обуславливает погрешность средств измерения в пределах  $\pm 0,7$  мкм. Затруднительным является измерение отверстий малого диаметра, порядка 4...12 мм, в которые и запрессовывают указанные выше зубки. Для измерения малых диаметров отверстий нами предложено использование виброконтактных средств [3]. Важной оценкой качества функционирования таких устройств является исследование динамических характеристик такого виброконтактного устройства.

Анализ виброконтактных устройств, используемых для измерения линейных размеров малого номинала, показал, что во всех устройствах размеры оценивают по амплитуде колебаний вибратора, что ввиду погрешности оценки амплитуды (рисунок 1), не обеспечивает высокую точность измерения [5, 6].

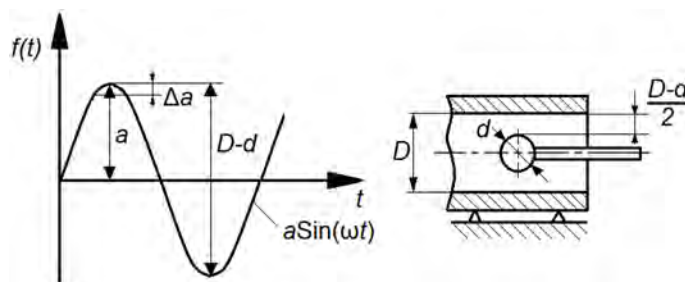


Рисунок 1 – Погрешность оценки амплитуды

Также на погрешность измерения амплитуды влияет погрешность используемых отсчетных приборов измерения ЭДС. Таким образом, проанализированные устройства не могут обеспечить требуемую точность измерения для их размерной сортировки отверстий в корпусах буровых коронок [5, 6].

Для повышения точности измерительных средств, авторами предложено измерять не амплитуду, а частоту перемещения измерительного наконечника, формируемую особым способом. Ниже приведен один из вариантов разработанных авторами устройств для измерения отверстий токопроводящих деталей.

Виброконтактное измерительное устройство [1] содержит (рисунок 2) корпус 1, основание 2, виброгенератор 3, возбудитель колебаний 4, измерительный щуп 5, жестко закрепленный на якоре 6 виброгенератора, который связан с корпусом посредством упругого элемента 7, и отсчетное устройство 8, причем виброгенератор 3 выполнен в виде



закрепленного в основании 2 постоянного кольцевого магнита 9, внутри которого расположена, с возможностью перемещения, обмотка 10 якоря 6 с закрепленным на нем диэлектрическим штоком 11, жестко связанным с установленным перпендикулярно его оси измерительным щупом 5, выполненным токопроводящим и соединенным с входом возбuditеля колебаний 4, выполненным в виде счетного триггера 12, выходы которого соединены с входами вычитающего операционного усилителя 13, который через потенциометр 14, инвертирующий интегратор 15 и усилитель мощности 16 соединен с обмоткой 10 якоря 6 виброгенератора, причем общий провод счетного триггера 12 соединен с измеряемой деталью 17, а его инверсный выход подключен к отсчетному устройству 8, выполненному в виде цифрового частотомера.

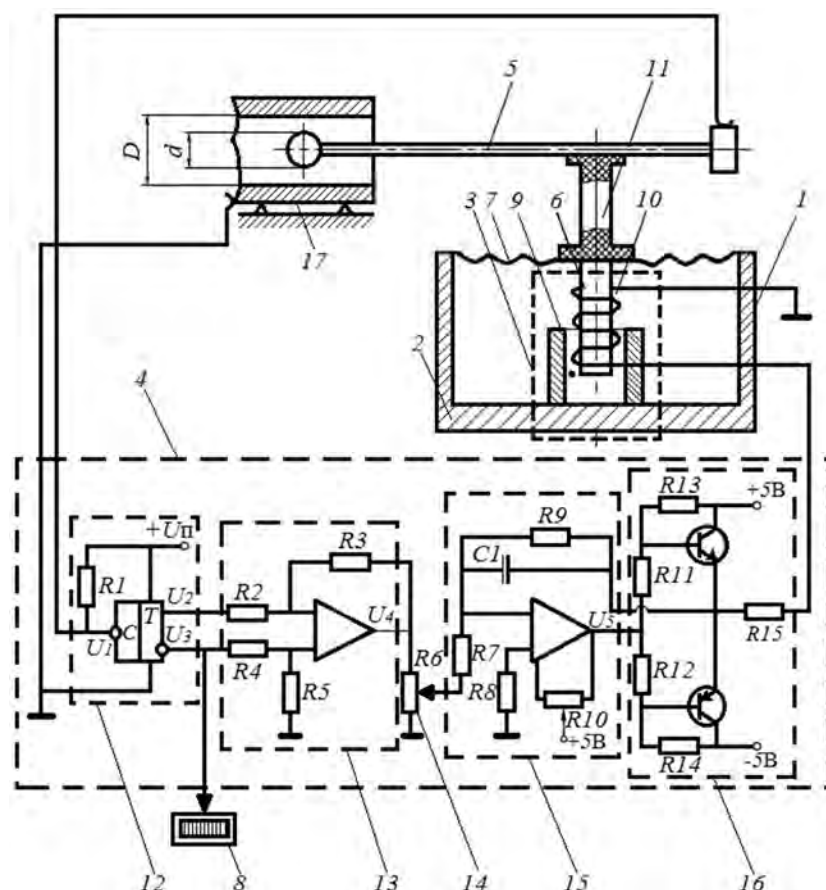
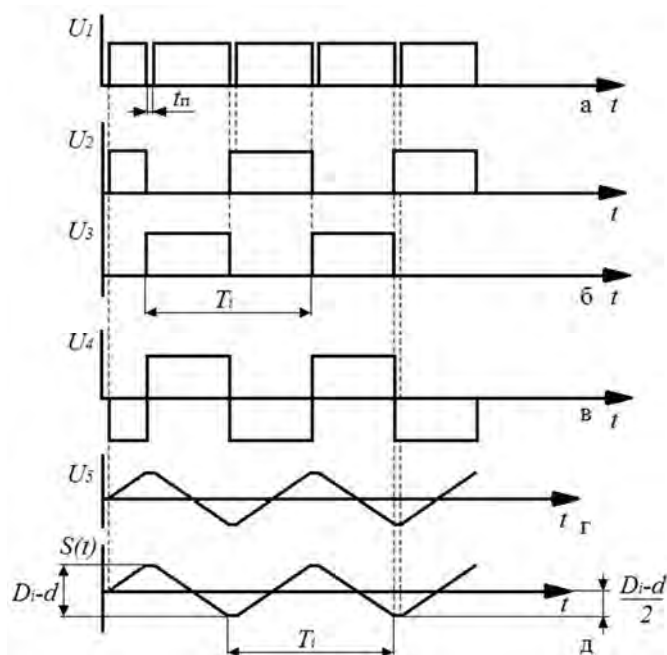


Рисунок 2 – Виброконтактное измерительное устройство

Устройство работает следующим образом. Для измерения диаметра  $D_i$  отверстия детали в нужном сечении измерительный щуп вводится в измеряемое отверстие детали, после чего на триггер 12 подается напряжение питания  $U_{\text{п}}$ , обеспечивающее формирование на его выходах сигналов противоположных уровней (рисунок 3, б), когда на одном выходе, например, прямом, возникает единичный сигнал  $U_2$ , а на другом, инверсном, нулевой сигнал  $U_3$ . Эти сигналы вычитаются с помощью вычитающего операционного усилителя 13, в результате чего на выходе вычитателя образуется знакопеременное напряжение прямоугольной формы  $U_4$  (рисунок 3, в), что создает условия для реверсивного движения якоря 6 виброгенератора и закрепленного на нем диэлектрического штока 11 с измерительным щупом 5. Сигнал с выхода вычитателя подается через потенциометр 14 на вход инвертирующего интегратора 15, причем потенциометр позволяет регулировать величину входного сигнала интегратора, а также осуществлять калибровку устройства по образцовой детали. При отрицательном выходном напряжении вычитателя, на выходе инвертирующего интегратора формируется линейно нарастающее напряжение  $U_5$  (рисунок 3, г), которое через усилитель мощности 16 поступает на обмотку 10 якоря 6 виброгенератора 3, что приводит якорь и закрепленный на нем диэлектрический шток 11 с

измерительным щупом 5 в движение в прямом направлении (рисунок 3, д) под действием силы Ампера до касания одной из поверхностей отверстия измеряемой детали 17. В момент касания токопроводящим измерительным щупом поверхности детали триггер 12 переключается через малый промежуток времени переключения  $t_n$  (рисунок 3, а, б), что вызывает положительное напряжение  $U_4$  на выходе вычитателя 13 (рисунок 3 в), которое поступает на вход инвертирующего интегратора 15, в результате чего на его выходе формируется линейно убывающее напряжение  $U_5$  (рисунок 3, г), которое через усилитель мощности 16 подается обмотку 10 якоря 6 виброгенератора 3, что приводит якорь и закрепленный на нем диэлектрический штوك 11 с измерительным щупом 5 в движение в обратном направлении (рисунок 3 д) под действием силы Ампера до касания противоположной поверхности отверстия измеряемой детали 17. Касание измерительным щупом поверхности отверстия переключает триггер 12 в противоположное состояние (рисунок 3, а, б), далее цикл повторяется, тем самым создаются автоколебания якоря и измерительного щупа  $S(t)$  с периодом  $T_i$  (рисунок 3, д), ограниченные диаметром измеряемой детали.



**Рисунок 3 – Временные диаграммы работы виброконтактного измерительного устройства при измерении диаметра отверстия  $D_i$  :**

а – сигнал на входе счетного триггера; б – сигналы на выходе счетного триггера;  
в – сигнал на выходе вычитателя; г – сигнал на выходе инвертирующего интегратора;  
д – функция автоколебаний вибратора с измерительным щупом.

При равномерно возрастающей и равномерно убывающей, после переключения триггера управления, скорости движения измерительного щупа с уменьшением отверстия, частота переключений триггера повышается, а с увеличением диаметра отверстия – уменьшается. Следовательно, частота возникающих при этом автоколебаний якоря и измерительного стержня, измеряемая цифровым частотомером, соединенным с инверсным выходом счетного триггера, позволит измерять величину диаметра отверстия детали 17, обратно пропорциональную этой частоте, с более высокой точностью.

Повышенная точность в приведенном варианте достигается за счет высокой точности измерительного частотомера. Так, например, при измерении диаметра отверстия, равного 4 мм, наконечником диаметром 3 мм, с частотой колебаний вибратора 10 Гц, погрешность измерения ориентировочно составит 0,01 мкм. Погрешность же оценки диаметра по амплитуде колебаний с использованием, например, вольтметра В7–72 класса точности 0,001, при тех же значениях измеряемого диаметра составит 2 мкм [2, 3].

Для исследования динамических характеристик процесса виброконтактного измерения линейных размеров была собрана экспериментальная установка (рисунок 4). Установка содержит электрическую (рисунок 4, а) и механическую (рисунок 4, б) части.

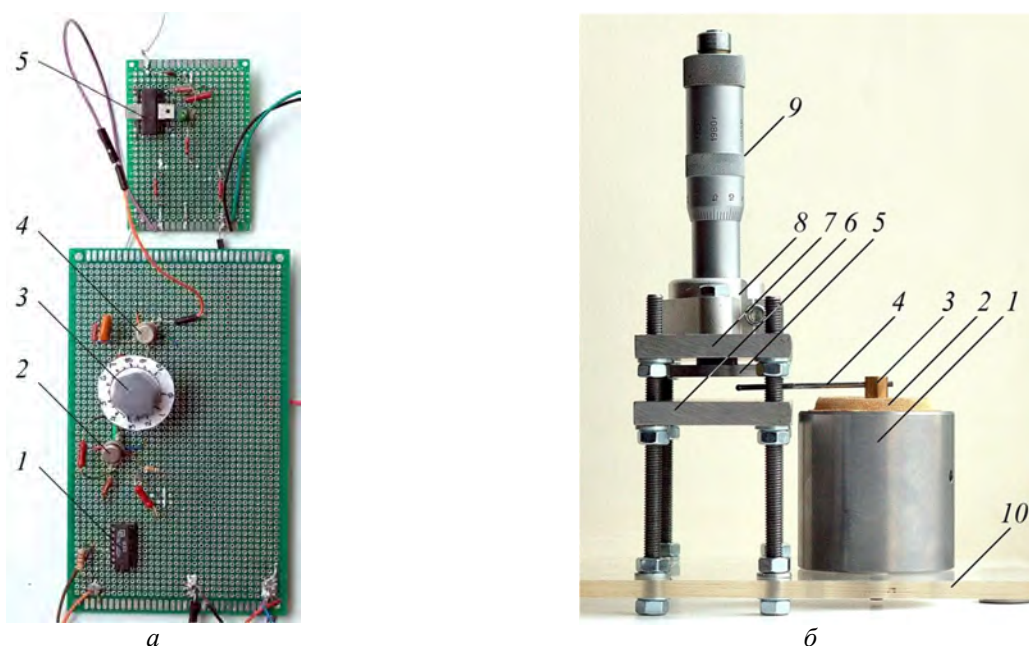


Рисунок 4 – Экспериментальная установка: а – электрическая часть; б – механическая часть

Электрическая часть установки реализована на макетных платах и представляет собой возбудитель колебаний, который приводит в действие механическую часть. Возбудитель колебаний состоит из счетного триггера 1, вычитателя 2, переменного резистора 3, инвертирующего интегратора 4 и усилителя мощности 5.

Механическая часть (рисунок 4, б) состоит из корпуса виброгенератора 1, закрепленного на основании 10. Внутри корпуса 1 расположены постоянный магнит и обмотка возбуждения, на корпусе 1 закреплен упругий элемент 2, центрирующий подвижный щуп 3, в котором закреплен измерительный щуп 4. Измерительный щуп 4 совершает колебания между измеряемыми пластинами 5 и 6, причем измеряемая пластина 5 соединена с микрометром 9, который закреплен на крепежной пластине 7 посредством фиксатора 8.

Предлагаемый подход в измерении малых диаметров отверстий токопроводящих деталей более приемлем для задач сортировки на селективные группы отверстий в корпусах буровых коронок перед запрессовкой в эти отверстия отсортированных твердосплавных зубков. Разработанная экспериментальная установка позволяет произвести оценку динамических характеристик процесса виброконтактного измерения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виброконтактное измерительное устройство: заявка на полезную модель № 2015150412 РФ; приор. от 24.11.2015 / Кристаль М.Г., Кулагин Р.Н., Иванков П.С., Хорошевский М.Д., Ярошик Д.В.
2. Виброконтактное устройство для контроля диаметров токопроводящих деталей / Кристаль М.Г., Кулагин Р.Н., Хорошевский М.Д., Иванков П.С., Ярошик Д.В. // Сборка в машиностроении, приборостроении. – 2016. – № 2. – С. 31–34.
3. Виброконтактные измерительные средства для сортировки деталей перед селективной сборкой / Хорошевский М.Д., Ярошик Д.В., Иванков П.С., Кристаль М.Г. // Современные технологии сборки: матер. IV междунар. науч.–техн. семинара (г. Москва, 22–23 окт. 2015 г.) / Московский гос. машиностроит. ун-т (МАМИ), ВолгГТУ, Ковровская гос. технол. акад. им. В.А. Дегтярёва. – Москва. – 2015. – С. 75–80.
4. П. м. 159109 РФ, МПК G01B7/12. Виброконтактное измерительное устройство / Кулагин Р.Н., Кристаль М.Г., Иванков П.С., Хорошевский М.Д.; ВолгГТУ. – 2016.
5. Хорошевский, М.Д. Анализ известных виброконтактных средств измерения внешних и внутренних размеров деталей / Хорошевский М.Д., Иванков П.С., Кристаль М.Г. // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика: сб. науч. тр. по матер. междунар. заочн. науч.–практ. конф. № 7 (часть 3): матер. междунар. науч.–практ. конф. «Молодёжный форум: технические и математические науки» (9–12 нояб. 2015 г.) / ФГБОУ ВО «Воронежский гос. лесотехн. ун-т им. Г.Ф. Морозова» (ВГЛТУ). – Воронеж. – 2015. – С. 152–156.
6. Хорошевский, М.Д. Анализ известных виброконтактных средств измерения линейных размеров / Хорошевский М.Д., Ярошик Д.В. // Безопасность и проектирование конструкций в машиностроении: матер. междунар. науч.–техн. конф. (25–26 сент. 2015 г.) / отв. ред. М.С. Разумов; Юго-Западный гос. ун-т [и др.]. – Курск. – 2015. – С. 11–14.

**Хорошевский Максим Дмитриевич**

Волгоградский государственный технический университет, г. Волгоград  
Аспирант кафедры Автоматизация производственных процессов  
E-mail: drugvlg@mail.ru

**Иванков Павел Сергеевич**

Волгоградский государственный технический университет, г. Волгоград  
Магистрант 6-го курса кафедры Автоматизация производственных процессов  
E-mail: mesatvir@yandex.ru

**Кулагин Роберт Николаевич**

Волгоградский государственный технический университет, г. Волгоград  
Кандидат технических наук, доцент кафедры Автоматизация производственных процессов  
E-mail: app@vstu.ru

**Кристал Марк Григорьевич**

Волгоградский государственный технический университет, г. Волгоград  
Доктор технических наук, профессор кафедры Автоматизация производственных процессов  
E-mail: crysmar@mail.ru

M.D. KHOROSHEVSKIY, P.S. IVANKOV, R.N. KULAGIN, M.G. KRISTAL

**DEVELOPMENT OF EXPERIMENTAL SETUP TO STUDY  
THE DYNAMICS OF VIBROFREQUENCY MEASUREMENTS  
HOLE DIAMETER LOW VALUE**

*The analysis of the existing vibrocontact devices of linear dimensions measurement is given. These devices are not provided the adequate accuracy of measurement. The vibrocontact device for small holes measurement by means of output signals changing, using for sorting in selective assembly operations is developed. Output signal is the frequency of fluctuations of the measuring probe. Such devices are able to decrease measurement error. That is necessary for holes measurement with selective groups small tolerance.*

**Keywords:** vibratory contacting device, control the diameters, conductive parts, vibration generator, frequency output signal.

**BIBLIOGRAPHY**

1. Vibrokontaktnoye izmeritelnoye ustroystvo: zavavka na poleznuyu model № 2015150412 RF; prior. ot 24.11.2015 / Kristal M.G., Kulagin R.N., Ivankov P.S., Khoroshevskiy M.D., Yaroshik D.V.
2. Vibrokontaktnoye ustroystvo dlya kontrolya diametrov tokoprovodnykh detalей / Kristal M.G., Kulagin R.N., Khoroshevskiy M.D., Ivankov P.S., Yaroshik D.V. // Sbornik v mashinostroyenii, priborostroyenii. – 2016. – № 2. – С. 31–34.
3. Vibrokontaktnyye izmeritelnyye sredstva dlya sortirovki detalей pered selektivnoy sborkoy / Khoroshevskiy M.D., Yaroshik D.V., Ivankov P.S., Kristal M.G. // Sovremennyye tekhnologii sborki: mater. IV mezhdunar. nauch.–tekhn. seminar (g. Moskva, 22–23 okt. 2015 g.) / Moskovskiy gos. mashinostroit. un-t (MAMI), VolgGTU, Kovrovskaya gos. tekhnol. akad. im. V.A. Degtyarova. – Moskva. – 2015. – С. 75–80.
4. P. m. 159109 RF, MPK G01B7/12. Vibrokontaktnoye izmeritelnoye ustroystvo / Kulagin R.N., Kristal M.G., Ivankov P.S., Khoroshevskiy M.D.; VolgGTU. – 2016.
5. Khoroshevskiy, M.D. Analiz izvestnykh vibrokontaktnykh sredstv izmereniya vneshnikh i vnutrennikh razmerov detalей / Khoroshevskiy M.D., Ivankov P.S., Kristal M.G. // Aktualnyye napravleniya nauchnykh issledovaniy XXI veka: teoriya i praktika: sb. nauch. tr. po mater. mezhdunar. zaochn. nauch.–prakt. konf. № 7 (chast 3): mater. mezhdunar. nauch.–prakt. konf. «Molodozhnyy forum: tekhnicheskiye i matematicheskiye nauki» (9–12 noyab. 2015 g.) / FGBOU VO «Voronezhskiy gos. lesotekhn. un-t im. G.F. Morozova» (VGLTU). – Voronezh. – 2015. – С. 152–156.
6. Khoroshevskiy, M.D. Analiz izvestnykh vibrokontaktnykh sredstv izmereniya lineynykh razmerov / Khoroshevskiy M.D., Yaroshik D.V. // Bezopasnost i proyektirovaniye konstruksiy v mashinostroyenii: mater. mezhdunar. nauch.–tekhn. konf. (25–26 sent. 2015 g.) / otv. red. M.S. Razumov; Yugo-Zapadnyy gos. un-t [i dr.]. – Kursk. – 2015. – С. 11–14.

**Khoroshevskiy Maksim Dmitriyevich**

Volgograd State Technical University, Volgograd  
Postgraduate Department of Automation of production processes  
E-mail: drugvlg@mail.ru

**Ivankov Pavel Sergeevich**

Volgograd State Technical University, Volgograd  
Master of 6-year Department of Automation of production processes  
E-mail: mesatvir@yandex.ru

**Kulagin Robert Nikolaevich**

Volgograd State Technical University, Volgograd  
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of automation of production processes  
E-mail: app@vstu.ru

**Kristal Mark Grigorovich**

Volgograd State Technical University, Volgograd  
Doctor of Technical Sciences, Department of Automation of production processes  
E-mail: crysmar@mail.ru

УДК 618.718.4

Я.Н. ГАЙНУЛЛИНА, Е.В. ПАШКОВ, М.И. КАЛИНИН, П.К. СОПИН, В.И. ПАХАЛЮК

## ИССЛЕДОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА УСТРОЙСТВА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ НАТЯЖЕНИЯ НЕРВНОГО КОРЕШКА ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ НЕЙРОХИРУРГИЧЕСКИХ И ВЕРТЕБРОЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

*Работа посвящена проблеме повышения качества нейрохирургических и вертебологических операций на спинном мозге человека за счет контроля натяжения нервного корешка и механизма давления на него. С этой целью было разработано и изготовлено специальное электронное устройство, позволяющее экспериментально в реальном режиме времени, оценить степень давления ретрактора и иного хирургического инструмента на нервный корешок. Зная величину реального давления хирург – вертеболог получит возможность определить время безопасного вмешательства при выполнении операций на спинном мозге позвоночных структур человека.*

**Ключевые слова:** тензометрия, напряжения, деформации, спинной мозг, нейрохирургия, нервный корешок, вертебродология, давление.

Как известно, конкретные методы измерений определяются видом измеряемых величин, их размерами, требуемой точностью результата, быстротой процесса измерения, условиями, при которых проводятся измерения, и рядом других признаков.

Каждую физическую величину можно измерить несколькими методами, которые могут отличаться друг от друга особенностями как технического, так и методического характера. Существует несколько методик проведения измерений.

Один из методов – это метод непосредственной оценки. Он дает значение измеряемой величины, непосредственно без каких – либо дополнительных действий со стороны лица, проводящего измерение, и без вычислений, кроме умножения его показаний на постоянную измерительного прибора или цену деления. Наиболее многочисленной группой средств регистрации, служащих для измерений методом непосредственной оценки, являются показывающие приборы и в том числе так называемые стрелочные приборы. Давление на объект и, как следствие, смещение его в сторону может фиксироваться отклоняющей стрелкой прибора. Затем полученные результаты с помощью расчетных формул пересчитываются в соответствии с конкретной задачей анализа.

Быстрота процесса измерения методом непосредственной оценки делает его часто незаменимым для практического использования, хотя точность измерения бывает обычно ограниченной.

Существует также нулевой метод. В общем виде нулевой метод заключается в следующем: измеряемую величину сравнивают с эталонной величиной, значение которой известно. Последнюю выбирают таким образом, чтобы разность между измеряемой и известной величинами равнялась «0». Совпадение значений этих величин отмечают при помощи нулевого указателя (нуль – индикатора). В частности, при использовании электрических измерений по этой методике, широко применяются мосты для измерения сопротивления.

Растяжение или сжатие некоторых материалов в пределах их упругости вызывает изменение их электрического сопротивления. Это явление дает возможность применять электротензометры и измерять малые деформации тел и усилия в условиях, при которых измерение другими методами невозможно.

Для решения задачи измерения давления на корешок нерва при выполнении вертебродологических операций на спинном мозге использован именно этот эффект изменения электрического сопротивления тензодатчика. Тензометрия, основанная на применении тензорезисторных преобразователей (тензорезистор, тензодатчик), получила большое распространение для исследования самых различных процессов. Используя преобразователи в различных контрольных схемах можно измерять усилия, напряжения,

деформации, параметры колебательных процессов и другие исследуемые величины. Тензорезистор представляет собой проводник, изменяющий свое электрическое сопротивление при деформациях растяжения – сжатия. При деформации проводника изменяется его длина  $l$  и площадь поперечного сечения. Деформация кристаллической решетки приводит к изменению удельного сопротивления  $\rho$ . Эти изменения приводят к изменению сопротивления проводника  $R$ .

$$R = \frac{\rho l}{Q} \quad (1)$$

Этим свойством обладают в той или иной степени все проводники. В настоящее время находят применение проволочные, пленочные и фольговые проводники и полупроводниковые тензорезисторы. Одним из распространенных материалов для изготовления проводниковых тензорезисторов является константан [1]. Зависимость сопротивления  $R$  от относительной деформации  $\epsilon$  с достаточной точностью описывается линейным уравнением.

$$R = R_0(1 + S_T \cdot \epsilon), \quad (2)$$

где  $R_0$  – сопротивление тензорезистора без деформации;

$S_T$  – тензочувствительность материала.

Тензочувствительность константана лежит в пределах  $2,0 \div 2,1$ . Нелинейность функции преобразования не превышает 1 %.

Фольговые тензорезисторы представляют собой тонкую лаковую пленку, на которую нанесена фольговая тензочувствительная решетка из константана толщиной  $4 \div 12$  мкм (рисунки 1). Решетка сверху покрыта лаком. Фольговые тензорезисторы нечувствительны к поперечной деформации вследствие малого сопротивления перемычек, соединяющих тензочувствительные элементы.

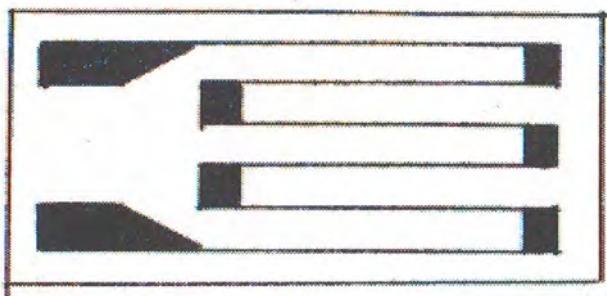


Рисунок 1 – Тензорезистор

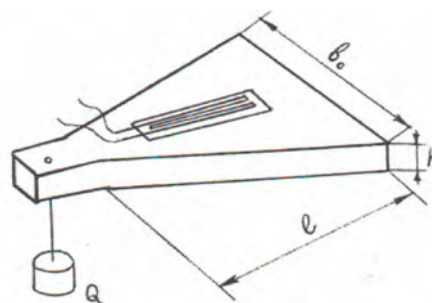


Рисунок 2 – Тарировочная балка

Проволочный тензорезистор имеет аналогичное устройство, но его решетка выполняется из константановой проволоки толщиной  $20 \div 50$  мкм. По своим характеристикам проволочные преобразователи уступают фольговым.

Фольговые и проволочные тензорезисторы обычно имеют длину  $5 \div 20$  мм, ширину  $3 \div 10$  мм. Их номинальное сопротивление равно 50, 100, 200, 400 и 800 Ом. Точность и надежность работы тензодатчиков зависят от качества закрепления датчика и его выводов на измеряемом объекте или промежуточном преобразовательном элементе. Так как база чувствительного элемента мала, требуется осторожность при работе с тензорезисторами.

Основными технологическими операциями подготовки и наклеивания тензодатчиков на объект или промежуточный преобразовательный элемент являются:

- тщательная механическая подготовка и очистка рабочей поверхности для тензодатчика, причем подготавливаемая площадь в  $1,5 \div 2$  раза превышает площадь занимаемую датчиком;
- разметка рабочей поверхности для правильной ориентации тензодатчика;
- обезжиривание и нагрев рабочей поверхности до температуры указанной в инструкции для каждой марки клея или силикона с помощью электроламп или ламп инфракрасного излучения;
- соблюдение инструкций по применению того или иного клеящего состава.

Прежде чем приступить к измерениям тех или иных параметров, необходимо произвести тарировку датчиков с целью определения надежности и точности показаний, а



также для определения текущего масштаба, зависящего от настройки усилительной аппаратуры [2, 3]. Тарировка датчиков в большинстве случаев производится на балке равного сопротивлению изгибу (рисунок 2).

Тарировка датчиков производится следующим образом: из партии датчиков с одинаковым номинальным сопротивлением отбирают 5÷10 % и каждый из них наклеивают на балку. Методика тарировки заключается в определении ожидаемого среднего разброса показаний датчиков, измеряемого в процентах. Если эта величина в пределах 1 % (для обычных экспериментальных исследований), то вся партия датчиков считается годной для измерений.

После наклейки датчика и настройки усилительной и измерительной аппаратуры (осциллографа) балку нагружают не менее трех раз определенными грузами, например, 1, 2 и 3 кг (10, 20 и 30 Н), записывая для каждого датчика напряжение  $\sigma$  при данном грузе и отклонение  $S$  – световой точки шлейфа осциллографа. График линейной зависимости  $S$  от  $\sigma$  при нагружении и разгрузке покажет, что петли гистерезиса, т.е. остаточных напряжений нет и сечение балки и эталонные грузы подобраны в соответствии с законом Гука. Напряжение  $\sigma$  подсчитывают по формуле:

$$\sigma = \sqrt{b \cdot l / b_0 \cdot n^2}. \quad (3)$$

Для объекта подвергающегося изгибу, подойдет конструкция балки на рисунке 3. После тарировки тензодатчики устанавливаются на окончательно выбранную конструкцию балки. Для того, чтобы измерить изменение сопротивления тензорезистора с помощью электронных приборов, необходимо преобразовать изменение напряжения или тока, в зависимости от того, какой прибор предполагается использовать для отображения процесса.

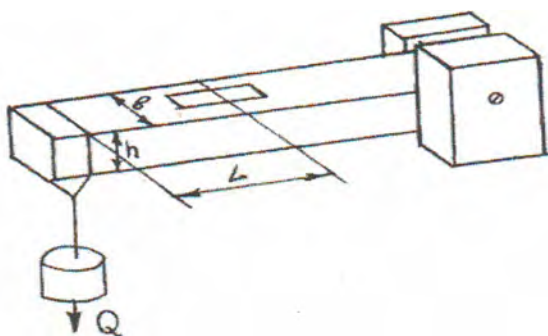


Рисунок 3 – Определитель изгибных напряжений

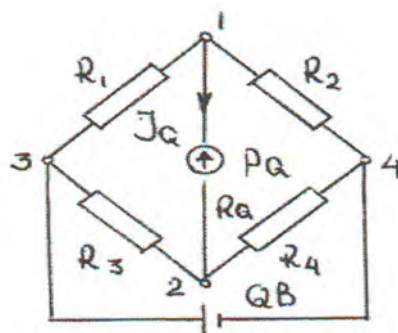


Рисунок 4 – Замкнутый кольцевой контур

Тарировочное напряжение определяется по формуле:

$$\sigma_{\text{тар}} = \frac{6QL}{bh^2} \quad (4)$$

Существуют два метода, с помощью которых можно осуществить требуемые преобразования:

- делитель напряжения (полумост);
- измерительный мост.

Для данного исследования выбран измерительный мост, как наиболее точный и информативный вариант[4, 5]. Важным классом устройств, предназначенных для измерения параметров электрических цепей сопротивления, силы тока, напряжения и др., а в тензометрии за этими величинами в результате тарировок тензодатчиков подразумевается неэлектрические величины – напряжения, деформации, усилия и др., являются мосты. В простейшем случае мостовая схема содержит 4 резистора, соединенных в кольцевой замкнутый контур (рисунок 4).

Такую схему имеет одинарный мост постоянного тока. Резисторы  $R_1, R_2, R_3, R_4$  этого контура называются плечами моста, а точки соединения соседних плеч – вершинами моста.

Цепи, соединяющие противоположные вершины, называют диагоналями. Одна из диагоналей (3 – 4) содержит источник питания GB и называется питающей, а другая (1–2) – указатель равновесия или отклонения от него PG – измерительной. Мост будет уравновешенным, если разность потенциалов между точками 1 и 2 равна нулю, т.е.

напряжение на диагонали, содержащей индикатор нуля, отсутствует и сила тока идущего через индикатор равна нулю.

Соотношение между сопротивлениями плеч, при котором мост уравновешен, называется условием равновесия моста. Это условие можно получить, используя законы Кирхгофа для расчета мостовой схемы.

Например, для одинарного моста постоянного тока зависимость протекающего через индикатор нуля (гальванометр)  $I_G$  тока от сопротивлений плеч, сопротивления гальванометра  $R_G$  и напряжения питания  $U$  имеет вид:

$$I_G = \frac{U(R_1 R_4 - R_2 R_3)}{R_G(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2(R_3 + R_4) + R_3 R_4(R_1 + R_2)}, \quad (5)$$

причем  $I_G = 0$ , при  $R_1 R_4 = R_2 R_3$ .

Это и есть условие равновесия одинарного моста постоянного тока, которое можно сформулировать следующим образом:

– для того чтобы мост был уравновешен, произведения сопротивлений противолежащих плеч должны быть равны.

Если сопротивление одного из плеч неизвестно (например,  $R_1 = R_x$ ), то последнее условие будет иметь вид:

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4}. \quad (6)$$

Таким образом, измерение при помощи одинарного моста можно рассматривать как сравнение неизвестного сопротивления  $R_x$  с образцовым сопротивлением  $R_2$  при сохранении неизменным отношения  $R_3/R_4$ . По этой причине плечо  $R_2$  называют плечом сравнения, плечи  $R_3$  и  $R_4$  плечами отношений.

Датчики, реагирующие на деформацию одного знака, могут включаться последовательно в одно плечо (рисунок 5).

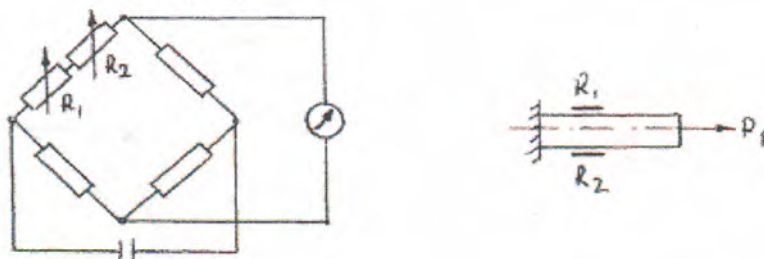


Рисунок 5 – Датчики деформации

Чувствительность мостовой схемы увеличивается вдвое включением этих датчиков в противоположные плечи моста (рисунок 6).

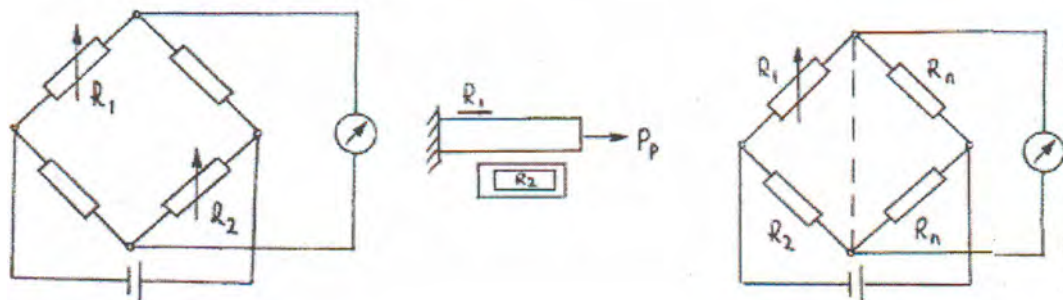


Рисунок 6 – Мостовая схема повышенной чувствительности

Возможны варианты наклейки одного активного датчика с включением его в мостовую схему или полумост.

При замере напряжений (деформаций) изгиба можно использовать следующие схемы:

– Полумост, составленный из двух активных тензорезисторов.



– Полный мост, с учетом того, что датчики, реагирующие на деформации разного знака, включаются в смежные плечи моста. Как известно, нижние слои балки сжимаются, а верхние – растягиваются при схеме нагрузки, указанной ниже (рисунок 7).

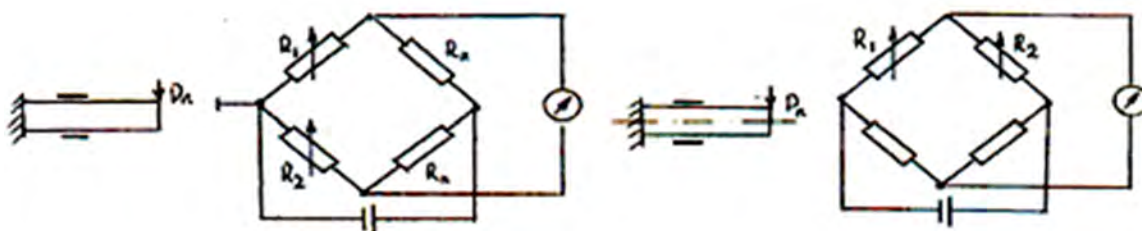


Рисунок 7 – Схема применяемого датчика давления

По принципу схемы построен датчик для измерителя давления на корешок (рисунок 8). Тензорезисторы с помощью силикона приклеены сверху и снизу балки. Для повышения чувствительности прибора в балке проделано сквозное отверстие, позволяющее сильно деформировать несущую конструкцию датчика.

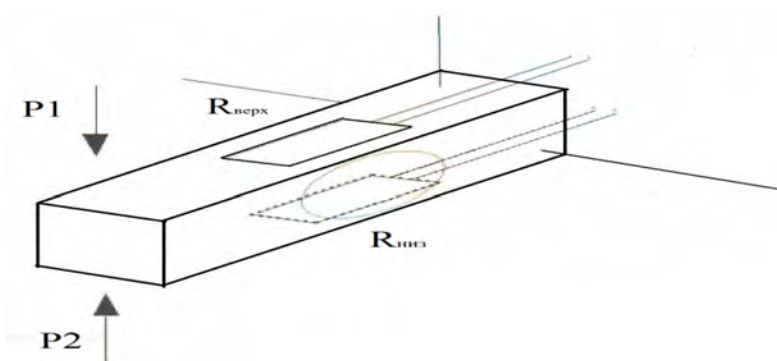


Рисунок 8 – Прибор для измерения давления на нервный корешок

Прилагаемое усилие на конец балки вызывает адекватное реагирование тензорезисторов. Деформация приводит к изменению параметров резистивного моста. Сигнал рассогласования усиливается, обрабатывается и выводится на индикацию как показано на блок-схеме устройства (рисунок 9). Для формирования достоверной информации о приложенном усилии, на резистивный мост должно подаваться стабилизированное напряжение от источника питания или от отдельного источника напряжения (например – миниаккумулятора).

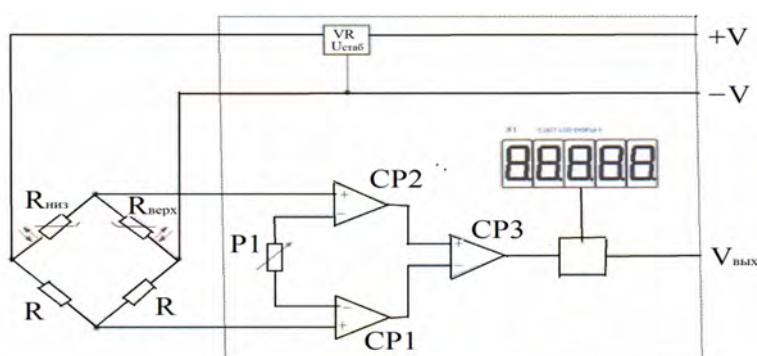


Рисунок 9 – Структурная схема работы измерителя натяжения нервного корешка

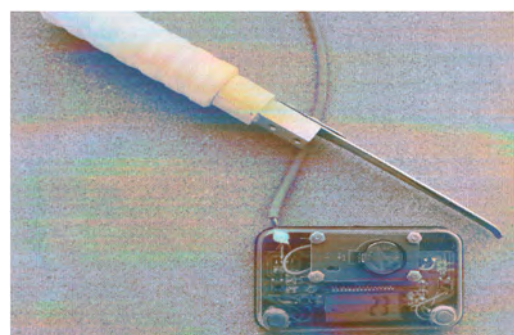


Рисунок 10 – Устройство для измерения давления на нервный корешок спинного мозга

Максимальный сигнал тензодатчика составляет всего несколько десятков милливольт.

Устройства с датчиками давления, в которых обычно используется линеаризация для получения точной величины выходного сигнала, выигрывают от применения усилителя с малым напряжением смещения и малым дрейфом этого напряжения. Исходя из этого, в устройстве применяется специализированная микросхема, позволяющая с высокой степенью достоверности обработать сигнал рассогласования, поступающий с тензодатчиков.

В работу микросхемы на основе микропроцессора включены следующие функции:

- отключение питания от миниаккумулятора происходит автоматически через 20 секунд, если нет сигнала от тензодатчиков;
- ручное включение и выключение питания;
- установка показаний прибора в «0» для компенсации внешних факторов давления на анализатор;
- размещение балки тензодатчиков с анализатором на расстоянии более одного метра от самого прибора для удобства работы и возможности проведения стерилизации.

Разработанное устройство (рисунок 10) предоставляет уникальные возможности для экспериментальных исследований сжатия нервного корешка в ране вследствие легкого хирургического воздействия и определенной длины нервного корешка [6, 7].

Данные, полученные в результате экспериментальных исследований, позволяют предотвратить формирование отеков нервного корешка, обеспечить гарантированное восстановление кровотока, оптимизировать длительность сдавливания спинальных структур и тем самым, существенно повысить эффективность и качество оперативных действий при проведении вертебрологических и нейрохирургических операций на спинном мозге.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков, Н.В. Эндопротезы суставов человека: Материалы и технологии / Н.В. Новиков. - Киев, 2011. – 528 с.
2. Абакумов, В.Г. Системы отображения в медицине / В.Г. Абакумов. – Киев: Юниверс, 2001. – 334 с.
3. Образцов, И.Ф. Проблемы прочности в биомеханике / И.Ф. Образцов. – М.: Высшая школа, 1998. – 312 с.
4. Feltes, C. Effects of nerve root retraction in lumbar discectomy / C. Feltes // Fountas K. Neurosurg focus, 2012. – 59 p.
5. Matsui, H. Physiologic changes of nerve root during posterior lunbar discectomy / Kitagawa H., Kawaguchi Y., etel. SPINE, 2005. – 659 p.
6. Takahashi, K. Nerve root pressure in lumbar disc nerniation / K. Takahashi, Shimal I, Porter R. SPINE, 2006. – 358 p.
7. Yancaler, R. An experimental animal model of spinal root compression syndrome: an analyssys of morphological changes of myelinated axons during compression radiculopathy and after decompression/ R. Yancaler, P. Dubovy // Experimental brain research volume 179, Number 1. – p.p. 111 – 119.

### **Гайнуллина Яна Николаевна**

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»,  
аспирант кафедры «Техническая механика и машиноведение»  
г. Севастополь, ул. Университетская, 33  
Тел. +7(8692) 435-161  
E-mail: medeya-ru@yandex.ru

### **Пашков Евгений Валентинович**

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», доктор технических наук, профессор  
кафедры «Приборные системы и автоматизация технических процессов»  
г. Севастополь, ул. Университетская, 33  
Тел. +7(8692)550-077  
E-mail: pashkov@sevsu.ru

### **Калинин Михаил Иванович**

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»,  
кандидат технических наук, доцент кафедры  
«Техническая механика и машиноведение»  
г. Севастополь, ул. Университетская, 33  
Тел. +7(8692) 435-161  
E-mail: kalininsev@mail.ru

### **Сопин Павел Константинович**

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»,  
кандидат технических наук, доцент кафедры  
«Автомобильный транспорт»  
г. Севастополь, ул. Университетская, 33  
Тел. +7(8692) 435-161  
E-mail: pavel.sopin@gmail.com

### **Пахалюк Владимир Иванович**

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»,  
кандидат технических наук, доцент кафедры «Техническая механика и машиноведение»  
г. Севастополь, ул. Университетская, 33  
Тел. +7(8692) 435-161  
E-mail: vpakhaliuk@gmail.com

Ya.N. GAINULLINA, E.V. PASHKOV, M.I. KALININ, P.K. SOPIN, V.I. PAKHALYUK

## RESEARCH AND DEVELOPMENT OF DEVICE FOR MEASURING THE TENSION NERVE ROOTS IN THE PERFORMANCE OF NEUROSURGICAL AND SPINE OPERATIONS

*The work deals with the problem of improving the quality and vertebral neurosurgical operations on the spinal cord of a person by controlling the tension of nerve root and mechanism of pressure on him. With this aim, we developed and manufactured special electronic device allowing experiments in real time, to assess the degree of pressure of the retractor or other surgical instrument to the nerve root. Knowing the magnitude of the actual pressure spine surgeon will be able to determine the time of safe interval of operation in operations on the spinal cord of the vertebrate structure of man.*

**Keywords:** strain measurement, stress, strain, spinal cord, neurosurgery, nerve root, vertebral, pressure.

### BIBLIOGRAPHY

1. Novikov, N.V. Endoprotezy sustavov cheloveka: Materialy i tekhnologii / N.V. Novikov. - Kiyev, 2011. – 528 s.
2. Abakumov, V.G. Sistemy otobrazheniya v meditsine / V.G. Abakumov. – Kiyev: Yunivers, 2001. – 334 s.
3. Obratsov, I.F. Problemy prochnosti v biomekhanike / I.F. Obratsov. – M.: Vysshaya shkola, 1998. – 312 s.
4. Feltes, S. Effects of nerve root retraction in lumbar discectomy / S. Feltes // Fountas K. Neurosurg focus, 2012. – 59 p.
5. Matsui, H. Physiologic changes of nerve root during posterior lumbar discectomy / Kitagawa H., Kawaguchi Y., et al. SPINE, 2005. – 659 p.
6. Takahashi, K. Nerve root pressure in lumbar disc herniation / K. Takahashi, Shimada I, Porter R. SPINE, 2006. – 358 p.
7. Yancaler, R. An experimental animal model of spinal root compression syndrome: an analysis of morphological changes of myelinated axons during compression radiculopathy and after decompression/ R. Yancaler, P. Dubovy // Experimental brain research volume 179, Number 1. – p.p. 111 – 119.

#### **Gainullina Yana Nikolaevna**

Sevastopol State University,  
Graduate student of the Department «Technical  
Mechanics and Engineering»,  
Sevastopol, Str. University, 33,  
Tel. +7(8692) 435-161  
E-mail: medeya-ru@yandex.ru

#### **Pashkov Yevgeny Valentinovich**

Sevastopol State University,  
Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department  
«Instrument Systems and automation of technical  
processes»  
Sevastopol, Str. University, 33,  
Tel. +7(8692) 550-007  
E-mail: pashkov@sevsu.ru

#### **Kalinin Mikhail Ivanovich**

Sevastopol State University,  
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor  
of the Department «Technical Mechanics and  
Engineering»,  
Sevastopol, Str. University, 33,  
Tel. +7(8692) 435-161  
E-mail: kalininsev@mail.ru

#### **Sopin Pavel Konstantinovich**

Sevastopol State University,  
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the  
Department «Road transport»,  
Sevastopol, Str. University, 33,  
Tel. +7(8692) 435-161  
E-mail: pavel.sopin@gmail.com

#### **Pakhalyuk Vladimir Ivanovich**

Sevastopol State University, Candidate of Technical Sciences,  
Associate Professor of the Department «Technical Mechanics and Engineering»,  
Sevastopol, Str. University, 33,  
Tel. +7(8692) 435-161  
E-mail: vpakhaliuk@gmail.com

А.М. ПОЛЯКОВ, П.А. БУГАЕВ, М.А. КОЛЕСОВА

## СИНТЕЗ ПРОТОТИПА БИОПОДОБНОГО КОЛЕННОГО СУСТАВА ТРАНСФЕМОРАЛЬНОГО ПРОТЕЗА

*Многопараметрический синтез искусственного коленного сустава с полицентрическим механизмом выполнен в соответствии с критерием качества реализуемых центроид. Использование такого сустава в качестве модуля трансфеморального протеза позволяет инвалиду осуществлять в процессе ходьбы походки, близкие к естественным. Кроме этого, при управлении биоподобным суставом непосредственно могут быть использованы образцы естественных движений конечностей здоровых людей при нормальной ходьбе, что способствует более качественному распознаванию намерений инвалидов осуществить то или иное движение в ближайшей перспективе.*

*В отличие от естественного коленного сустава обе центроиды в относительном движении звеньев (как критериальные кривые) в процессе синтеза были заданы выпуклыми, что объясняется попыткой получить более технологичную конструкцию. Но, как свидетельствуют результаты анализа трехмерных моделей разработанного сустава, кинематика его звеньев, практически соответствует кинематике элементов естественного сустава, что позволяет относить его к типу биоподобных.*

*Первый вариант прототипа конструкции биоподобного коленного сустава изготовлен методом 3D-печати. Его функциональные характеристики полностью соответствуют принятым на этапе постановки задачи синтеза.*

**Ключевые слова:** трансфеморальный протез, искусственный коленный сустав, полицентрический механизм, центроида, многопараметрический синтез.

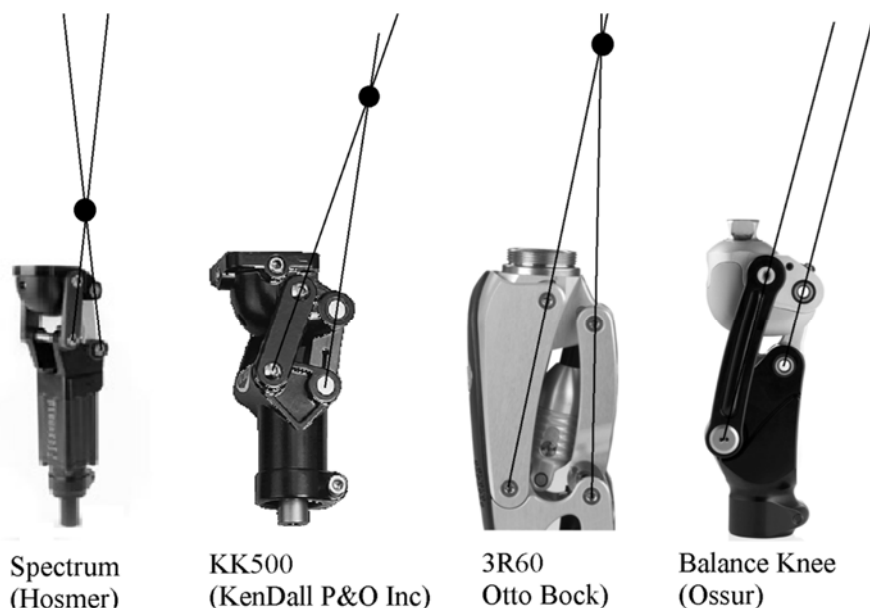
Одна из основных задач, стоящая на протяжении длительного периода времени перед конструкторами протезов конечностей, состоит в поиске варианта конструкции, который позволил бы как можно более полно заменить утраченную конечность и обеспечить инвалиду высокий уровень качества жизни. Многочисленные попытки ее решения привели к созданию множества конструкций, каждая из которых отличается функциональными особенностями, позволяющими (в общем случае) обеспечить определенное качество. Развитие технологий приводило, в свою очередь, к развитию конструкций протезов, многие из которых к настоящему времени позволяют удовлетворить большинство потребностей инвалидов. Однако и такие конструкции нельзя считать совершенными.

Например, все трансфеморальные протезы, в составе которых используются коленные модули могут быть условно разделены на два вида: одноосевые и полицентрические [1]. Одноосевые конструктивно проще, но способны обеспечить требуемый уровень устойчивости в опорной фазе только при возможности управления ими. Устойчивость полицентрических обеспечивается особенностями конструкции, в большинстве случаев представляющей собой шарнирный механизм с конечным числом звеньев и, следовательно, они имеют меньшую конструктивную надежность по сравнению с одноосевыми. Очевидно, что создание коленного модуля, сочетающего в себе преимущества одноосевых и полицентрических суставов, является актуальной задачей.

Полицентрические механизмы серийно выпускаемых искусственных коленных суставов весьма многообразны, что свидетельствует о том, что каждый из них проектировался с целью наилучшего обеспечения различных характеристик. В качестве примера на рисунке 1 показаны некоторые серийно выпускаемые коленные модули с шарнирными полицентрическими механизмами, обеспечивающими вращение сустава.

Особенности функционирования полицентрического механизма в процессе ходьбы инвалида во многом определяются формами центроид в относительном движении голенной части коленного модуля относительно бедренной [2]. Но в традиционных полицентрических искусственных коленных суставах, формы центроид в относительном движении звеньев существенно отличаются от центроид естественного сустава. Одна из них (неподвижная

центроида при вращении большеберцовой кости относительно бедренной) показана на рисунке 2.



**Рисунок 1 – Некоторые конструкции серийно выпускаемых модулей с полицентрическими механизмами искусственного коленного сустава**



**Рисунок 2 – Образование центроида при вращении в коленном суставе большеберцовой кости относительно бедренной**

Эта центроида имеет вид спиралеобразной кривой и располагается в пространстве дистальной части бедренной кости. Следовательно, как показано в [2], само по себе естественное колено не обеспечивает устойчивость конечности в опорной фазе движения. Но в коленный сустав входит большое число связок и мышц, которые увеличивают его жесткость и способствуют устойчивой ходьбе человека.

Большую роль в целостности коленного сустава и в обеспечении его жесткости играют передняя и задняя крестообразные связки. Передняя удерживает большеберцовую кость в суставе и не дает ей соскользнуть вперед, а задняя – назад. В результате криволинейные поверхности мыщелков бедренной кости удерживаясь в криволинейном большеберцовом плато и образуют целостный сустав.

Известно, что большеберцовая кость в движении относительно бедренной кости в сагиттальной плоскости совершает сложное движение, включающее осевое вращение,

качение и скольжение [3]. Как отмечал П.Ф. Лесгафт, такое движение обеспечивается формой суставных поверхностей. Следовательно, их сечения в сагиттальной плоскости не представляют собой центры в относительном движении. Но, как доказано в теории механизмов, такие центры существуют [4] и могут быть реализованы с помощью некоторого шарнирного механизма, например – шарнирного четырехзвенника с перекрещивающимися звеньями, последовательные положения которого при сгибании колена схематично показаны на рисунке 3.



*Рисунок 3 – Последовательные положения звеньев шарнирного четырехзвенника, моделирующего сгибание коленного сустава в сагиттальной плоскости*

Попытки создания искусственного коленного сустава на основе такого механизма ранее уже осуществлялись [5]. Однако вплоть до настоящего времени, несмотря на очевидные преимущества перед традиционными конструкциями, подобные коленные блоки в трансфеморальных протезах не применяются.

Одно из наиболее значимых преимуществ состоит в возможности реализации на конструктивном уровне биологической кинематики сустава, способствующей естественной ходьбе инвалида и улучшению косметических свойств протеза. При управлении таким коленным модулем в составе трансфеморального протеза могут непосредственно использоваться образцы нормальной ходьбы здорового человека, что позволяет повысить качество распознавания намерений инвалида осуществить то или иное двигательное действие в краткосрочной перспективе.

Многопараметрический синтез искусственного коленного сустава с полицентрическим механизмом на основе четырехзвенного шарнирного механизма с перекрещивающимися звеньями выполнен в соответствии с критерием качества реализуемых центров. При этом была использована разработанная нами ранее методика и программа многокритериальной оптимизации [6, 7], основанная на систематическом исследовании пространства параметров, равномерно распределенных в конечномерном кубе [8]. Пробные точки вычислялись по алгоритму, предложенному в [9]:

$N := 100000; n := 3:$

$r := \text{Matrix}([ [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 3, 5, 15, 17, 51, 85, 255, 257, 771, 1285, 3855, 4369, 13107, 21845], [1, 1, 7, 11, 13, 61, 67, 79, 465, 721, 823, 4091, 4125, 4141, 28723], [1, 3, 7, 5, 7, 43, 49, 147, 439, 1013, 727, 987, 5889, 6915, 166647], [1, 1, 5, 3, 15, 51, 125, 141, 177, 759, 267, 1839, 6929, 16241, 16565], [1, 3, 1, 1, 9, 59, 25, 89, 321, 835, 833, 4033, 3913, 11643, 18777], [1, 1, 3, 7, 31, 47, 109, 173, 181, 949, 471, 2515, 6211, 2147, 3169], [1, 3, 3, 9, 9, 57, 43, 43, 225, 113, 1601, 579, 1731, 11977, 7241] ]):$

**for**  $i$  **from** 1 **to**  $N$  **do**  $mm[i] := eval\left(1 + \text{trunc}\left(\frac{\ln(i)}{\ln(2)}\right)\right)$  **end do**;  
**for**  $i$  **from** 1 **to**  $N$  **do**  $m := mm[i]$  : **for**  $j$  **from** 1 **to**  $n$  **do**  $q[i, j]$   
 $:= \sum_{k=1}^m \left( 2^{-k+1} \cdot \text{frac}\left(\frac{1}{2} \cdot \sum_{l=k}^m (\text{trunc}(2 \cdot \text{frac}(i \cdot 2^{-l})) \cdot \text{trunc}(2 \cdot \text{frac}('r'[j, l] \cdot 2^{k-1-l}))) \right) \right)$  **end do end do**;

где  $N$  – число пробных точек исследуемого пространства параметров;

$n$  – число варьируемых параметров;

$g$  – матрица числителей.

Длина бедренного компонента синтезируемого механизма была принята равной единице, а длины остальных трех звеньев использовались в качестве безразмерных параметров синтеза.

Как показано в [10], в случаях, когда значение якобиана механизма близко к нулю, он плохо управляем, т.к. небольшие изменения обобщенной координаты входного звена приводят к большим изменениям координаты выходного звена. В связи с этим, в качестве функционального ограничения в процессе синтеза использовалось минимально возможное абсолютное значение якобиана, который вычислялся на каждом шаге определения координат реализуемых центроид.

И, наконец, учитывая основную цель синтеза – создание полицентрического механизма искусственного коленного сустава с кинематическими свойствам, подобными свойствам естественного сустава, в критериальном ограничении учитывалась близость форм желаемых и реализуемых центроид в относительном движении звеньев. Формы центроид считаются близкими, если выполняется условие:

$$J = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^k \sqrt{(x_{rji} - x_{dji})^2 + (y_{rji} - y_{dji})^2} \Rightarrow \min, \quad (1)$$

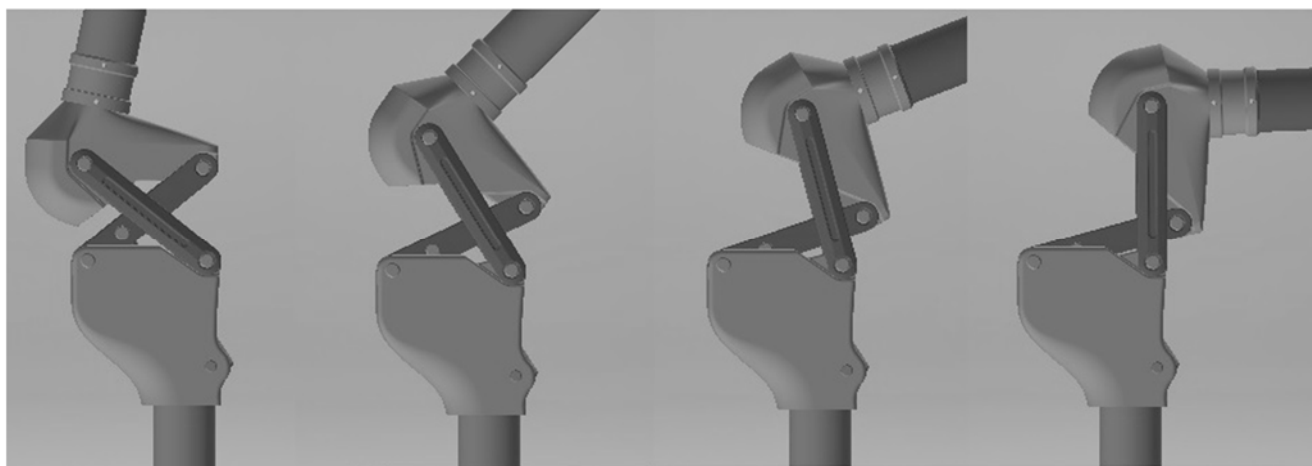
где  $j$  – номер центроиды (1 – условно подвижная; 2 – условно неподвижная);

$i$  – номер конфигурации механизма;

$(x_{roi}, y_{roi})$ ,  $(x_{doi}, y_{doi})$  – координаты реализуемых  $r$  и желаемых  $d$  центроид, соответственно.

Значения координат и якобиан механизма вычислялись в соответствии с методикой, изложенной в [10].

В результате оптимизации были получены относительные размеры звеньев механизма, центроиды которых очень близки к заданным на этапе постановки задачи синтеза. Учитывая реальные размеры естественного сустава, размеры звеньев механизма были адаптированы к ним и использованы при разработки 3D-модели искусственного коленного сустава, которая в различных конфигурациях показана на рисунке 4.

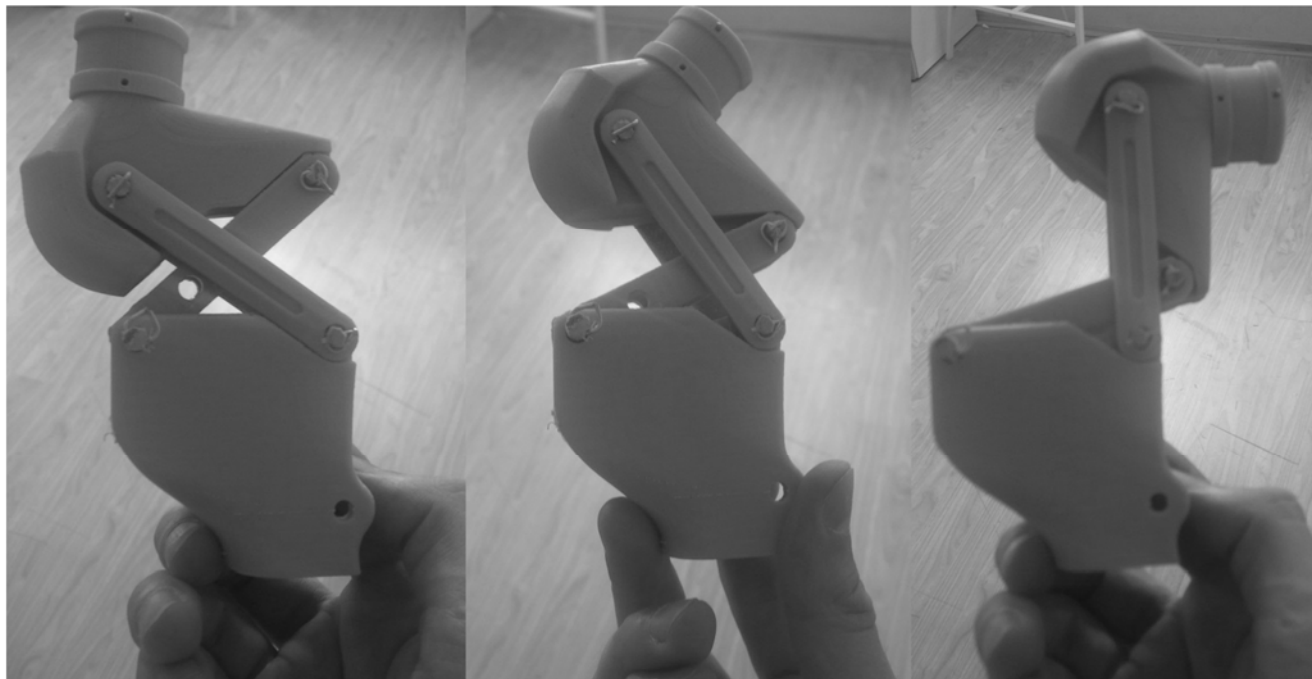


*Рисунок 4 – 3D-модель искусственного коленного сустава на основе четырехзвенного шарнирного механизма с перекрещивающимися звеньями*

После проверки работоспособности модели и уточнений некоторых конструктивных элементов методом 3D-печати был изготовлен прототип коленного сустава (рисунок 5), функциональные характеристики которого полностью соответствуют принятым на этапе постановки задачи синтеза.

**Выводы.** Как отмечается многими исследователями, кинематические характеристики естественного коленного сустава могут быть представлены с помощью центроид. В

сагиттальной плоскости они имеют очень сложную форму, что объясняется сложным характером относительного движения элементов сустава, включающем в себя на различных этапах осевое вращение, качение и скольжение. Поэтому реализовать их с помощью шарнирного четырехзвенника практически невозможно [11]. Но можно представить плоско-параллельное движение большеберцовой кости относительно бедренной в предположении отсутствия связей в суставе.



*Рисунок 5 – Прототип искусственного коленного сустава на основе четырехзвенного шарнирного механизма с перекрещивающимися звеньями*

В этом случае траектория мгновенного центра вращения в относительном движении будет представлять собой гладкую плоскую фигуру. Таким же образом можно представить и движение бедренной кости относительно большеберцовой. Следовательно, сохраняя кинематику естественного сустава, можно определить формы кривых, отличных от естественных, по которым в относительном движении будут перекатываться без скольжения бедренный и голенный компоненты искусственного сустава. Учитывая это, в отличие от естественного коленного сустава обе центроиды в относительном движении звеньев (как критериальные кривые) в процессе синтеза механизма были заданы выпуклыми, что объясняется, прежде всего, попыткой получить более технологичную конструкцию. Но, как свидетельствуют результаты анализа трехмерных моделей разработанного сустава, кинематика его звеньев, практически соответствует кинематике элементов естественного сустава, что позволяет относить его к типу биоподобных.

Перекрестные звенья разработанного шарнирного механизма можно считать аналогом крестообразных связей, которые обеспечивают замыкание сустава и ограничивают движения его элементов. Поэтому для обеспечения прочности коленного модуля он должен быть дополнен избыточной связью в виде центроидного механизма, контактные поверхности звеньев которого будут воспринимать основную нагрузку в период опорной фазы ходьбы.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что метод систематического исследования пространства параметров оказывается весьма эффективным при кинематическом синтезе шарнирных механизмов по заданным гладким центроидам, а его основной недостаток состоит в необходимости исследования большого числа пробных точек.

Дальнейшие исследования в данной области будут посвящены оптимизации конструкции на основе конечно-элементного анализа ее напряженно-деформированного состояния. Кроме этого в конструкцию разработанного коленного модуля предполагается



встроить управляемый магнитореологический демпфер с целью обеспечения переменной жесткости сустава в процессе ходьбы инвалида.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерством образования и науки Российской Федерации в рамках базовой части государственного заказа в сфере научной деятельности с регистрационным номером 115041610028.*

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Michael, J.W. Modern prosthetic knee mechanisms / J.W. Michael // Clinical Orthopaedics & Related Research. – 1999. – Vol. 361. – № 4. – P. 39–47.
2. Redcliffe, C.W. Four-bar linkage prosthetic knee mechanisms: kinematics, alignment and prescription criteria / C.W. Redcliffe // Prosthetics and Orthotics International. – 1994. – Vol. 18. – № 3. – P. 159–173.
3. Gunston, F.H. Polycentric knee arthroplasty. Prosthetic simulation of normal knee movement / F.H. Gunston // Journal of Bone and Joint Surgery. – 1971. – Vol. 53. – № 2. – P. 272–277.
4. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский. – М.: Наука, 1988. – 640 с.
5. Etoundi, A.C. A bio-inspired condylar knee joint for knee prosthetics / A.C. Etoundi, R.J. Lock, R. Vaidyanathan, S.C. Burgess // International Journal of Design & Nature and Ecodynamics. – 2013. – Vol. 8. – № 3. – P. 213–225.
6. Poliakov, O. Multicriteria synthesis of a polycentric knee prosthesis for transfemoral amputees / O. Poliakov, O. Chepenyuk, Y. Pashkov, M. Kalinin, V. Kramar // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 2012. – Vol. 6. – P. 257–262.
7. Чепенюк, Е.А. Многокритериальная кинематическая оптимизация четырехзвенного механизма протеза коленного сустава / Е.А. Чепенюк, А.М. Поляков // Вестник СевНТУ. Сер. Механика, энергетика, экология: сб. науч. трудов. – 2012. – Вып. 133. – С. 204–213.
8. Статников, Р.Б. Решение многокритериальных задач конструирования машин на основе изучения пространства параметров / Р.Б. Статников // Многокритериальные задачи принятия решений / Под ред. Р.Б. Статникова. – М.: Машиностроение. – 1978. – С. 148–155.
9. Соболев, И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И.М. Соболев, Р.Б. Статников. – М.: Наука, 1981. – 111 с.
10. Поляков, А.М. Альтернативное доказательство теоремы Грасгофа на основе анализа кинематических передаточных функций механизма / А.М. Поляков // Вестник СевНТУ. Сер. Механика, энергетика, экология. – Севастополь. – 2011. – Вып. 119. – С. 5–17.
11. Shih, T-S. Emulating the human tibiofemoral joint by using a four-bar linkage, condylar shapes and slip ratio variation / T-S. Shih, I. Her, K. Mostafa // International Journal of Robotics and Automation. – 2015. – Vol. 30. – № 1. – P. 1–9.

**Поляков Александр Михайлович**  
ФГАОУ ВО «Севастопольский  
государственный университет»;  
кандидат технических наук, доцент  
кафедры «Машиноведение и  
техническая механика», ведущий  
научный сотрудник лаборатории  
биомеханики;  
ул. А. Косарева, 14а, г.  
Севастополь, Россия;  
Тел.: +7 978 703 88 26  
E-mail: a.m.poljakov@sevsu.ru

**Бугаев Павел Александрович**  
ФГАОУ ВО «Севастопольский  
государственный университет»;  
кандидат технических наук,  
доцент кафедры «Судовождение и  
безопасность судоходства»;  
ул. Н. Музыки, 75, г. Севастополь,  
Россия;  
Тел.: +7 978 855 61 40  
E-mail: pasha\_ba@mail.ru

**Колесова Марина Александровна**  
ФГАОУ ВО «Севастопольский  
государственный университет»;  
преподаватель кафедры «Высшая  
математика»;  
ул. А. Кесаева, 7/3, г. Севастополь,  
Россия;  
Тел.: +7 978 045 69 82  
E-mail: marishaclass@mail.ru

---

A.M. POLIAKOV, P.A. BUGAYEV, M.A. KOLESOVA

## **THE SYNTHESIS OF PROTOTYPE OF BIOSIMILAR KNEE JOINT FOR TRANSFEMORAL PROSTHESES**

*Multiparameter synthesis of an artificial knee joint with polycentric mechanism in accordance with the quality criterion of realized centroids was executed. The using of this joint as a module of transfemoral prosthesis allows disabled person to carry out gaits during walking, close to natural. In addition, at the joint control the natural samples of healthy peoples limb movements in*

*normal walking can be used directly, which contributes to a better recognition of disabled intentions to carry out this or that movement in the short term.*

*Unlike the natural knee joint, two centroids in relative links motion (as criterial curves) during synthesis were given in convex forms, due to an attempt to obtain more technological design. But, as evidenced by the results of the three-dimensional models analysis of developed joint, the kinematics of its links, practically corresponds to the kinematics of natural joint, which allows to attribute it to the biosimilar type.*

*The first embodiment prototype of biosimilar knee joint was manufactured by 3D-printing method. Its functional features fully comply with accepted at the stage of synthesis task.*

**Keywords:** *transfemoral prosthesis, artificial knee joint, polycentric mechanism, centroid, multiparameter synthesis.*

## BIBLIOGRAPHY

1. Michael, J.W. Modern prosthetic knee mechanisms / J.W. Michael // *Clinical Orthopaedics & Related Research*. – 1999. – Vol. 361. – № 4. – P. 39–47.
2. Redcliffe, C.W. Four-bar linkage prosthetic knee mechanisms: kinematics, alignment and prescription criteria / C.W. Redcliffe // *Prosthetics and Orthotics International*. – 1994. – Vol. 18. – № 3. – P. 159–173.
3. Gunston, F.H. Polycentric knee arthroplasty. Prosthetic simulation of normal knee movement / F.H. Gunston // *Journal of Bone and Joint Surgery*. – 1971. – Vol. 53. – № 2. – P. 272–277.
4. Artobolevskiy, I.I. *Teoriya mekhanizmov i mashin* / I.I. Artobolevskiy. – M.: Nauka, 1988. – 640 s.
5. Etoundi, A.C. A bio-inspired condylar knee joint for knee prosthetics / A.C. Etoundi, R.J. Lock, R. Vaidyanathan, S.C. Burgess // *International Journal of Design & Nature and Ecodynamics*. – 2013. – Vol. 8. – № 3. – P. 213–225.
6. Poliakov, O. Multicriteria synthesis of a polycentric knee prosthesis for transfemoral amputees / O. Poliakov, O. Chepenyuk, Y. Pashkov, M. Kalinin, V. Kramar // *World Academy of Science, Engineering and Technology*. – 2012. – Vol. 6. – P. 257–262.
7. Chepenyuk, Ye.A. *Mnogokriterialnaya kinematicheskaya optimizatsiya chetyrekhzvennogo mekhanizma proteza kolennogo sustava* / Ye.A. Chepenyuk, A.M. Polyakov // *Vestnik SevNTU. Ser. Mekhanika, energetika, ekologiya: sb. nauch. trudov*. – 2012. – Vyp. 133. – S. 204–213.
8. Statnikov, R.B. Resheniye mnogokriterialnykh zadach konstruirovaniya mashin na osnove izucheniya prostranstva parametrov / R.B. Statnikov // *Mnogokriterialnyye zadachi prinyatiya resheniy* / Pod red. R.B. Statnikova. – M.: Mashinostroyeniye. – 1978. – S. 148–155.
9. Sobol, I.M. *Vybor optimalnykh parametrov v zadachakh so mnogimi kriteriyami* / I.M. Sobol, R.B. Statnikov. – M.: Nauka, 1981. – 111 s.
10. Polyakov, A.M. *Alternativnoye dokazatelstvo teoremy Gragofa na osnove analiza kinematicheskikh peredatochnykh funktsiy mekhanizma* / A.M. Polyakov // *Vestnik SevNTU. Ser. Mekhanika, energetika, ekologiya*. – Sevastopol. – 2011. – Vyp. 119. – C. 5–17.
11. Shih, T-S. Emulating the human tibiofemoral joint by using a four-bar linkage, condylar shapes and slip ratio variation / T-S. Shih, I. Her, K. Mostafa // *International Journal of Robotics and Automation*. – 2015. – Vol. 30. – № 1. – P. 1–9.

**Polyakov Aleksandr Mikhaylovich**  
Sevastopol State University;  
PhD, associate professor of the chair  
of Engineering Science and Technical  
Mechanics, leading research fellow at  
the Laboratory of Biomechanics;  
A. Kosareva str., 14a, Sevastopol,  
Russian Federation;  
Phone: +7 978 703 88 26  
E-mail: a.m.poljakov@sevsu.ru

**Bugayev Pavel Aleksandrovich**  
Sevastopol State University;  
PhD, associate professor of the chair  
of Navigation and Safety of Shipping;  
N. Muziki str., 75, Sevastopol,  
Russian Federation;  
Phone: +7 978 855 61 40  
E-mail: pasha\_ba@mail.ru

**Kolesova Marina Aleksandrovna**  
Sevastopol State University;  
lecturer of the chair of Higher  
Mathematics;  
A. Kesaeva str., 7/3, Sevastopol,  
Russian Federation;  
Phone: +7 978 045 69 82  
E-mail: marishaclass@mail.ru

В.А. ФИЛИППЕНКО, В.А. ТАНЬКУТ, С.Е. БОНДАРЕНКО,  
М. АКОНДЖОМ, А.В. ЯРЕСЬКО

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДИКИ КОСТНОЙ АУТОПЛАСТИКИ СТЕНОК ВЕРТЛУЖНОЙ ВПАДИНЫ У БОЛЬНЫХ С ОСТЕОПОРОЗОМ ПРИ ТОТАЛЬНОМ ЭНДОПРОТЕЗИРОВАНИИ ТАЗОБЕДРЕННОГО СУСТАВА

*С помощью трёхмерного моделирования и метода конечных элементов анализируются механические характеристики костной ткани в области вертлужной впадины в условиях остеопороза при нагружении в трёх фазах шага до и после выполнения костной пластики, что позволяет оптимизировать стабильность фиксации эндопротеза в костной ткани у больных с остеопорозом и улучшить результаты лечения.*

**Ключевые слова:** остеопороз, вертлужная впадина, костная аутопластика, фазы шага, механические характеристики костной ткани.

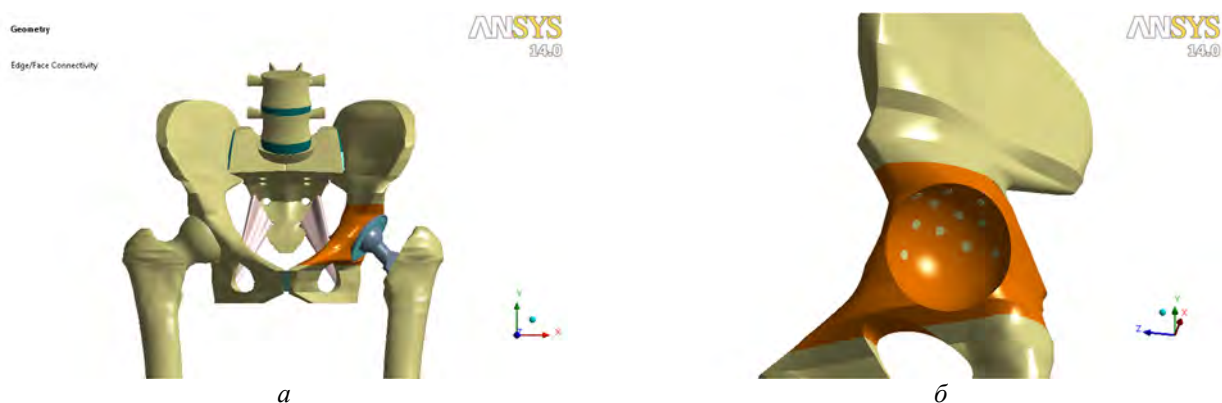
**Введение.** Важным условием для стабильной фиксации эндопротеза в костной ткани является её хорошие прочностные характеристики.

Остеопороз приводит к ухудшению как качественных, так и количественных свойств костной ткани, что ведёт к ослаблению её метаболизма, ускоряет остеокластогенез и, как следствие, к её резорбции [1–4]. Все эти факторы являются неблагоприятными для установки и прочной фиксации компонентов эндопротеза [5–8].

Несмотря на большое количество биомеханических исследований, посвященных анализу напряженно-деформированного состояния (НДС) вертлужной впадины при эндопротезировании, вопросы фиксации чашки при остеопорозных изменениях костной ткани остаются дискуссионными и недостаточно исследованными [9–12]. В значительной степени это связано с недостаточными данными о механических свойствах остеопорозной ткани.

Исследования, проводимые на моделях с остеопорозом, в большей степени касались надежности фиксации чашки эндопротеза в костной ткани и в меньшей степени – изучению влияний различных характеристик костной ткани на поведение модели таза в целом [6, 13]. Проведенные в последние годы исследования Jimenez–Palomar I. [14], L. Fradet [15], посвященные изучению механических характеристик остеопорозной костной ткани, позволяют использовать полученные результаты в математическом моделировании НДС таза при эндопротезировании тазобедренного сустава в условиях остеопороза.

**Цель исследования.** Целью данной работы является биомеханическое обоснование методики уплотнения стенок вертлужной впадины при имплантации чашки эндопротеза в условиях остеопороза.



**Рисунок 1** – Расчетная математическая модель таза: с установленным эндопротезом (а), с уплотнением костной ткани вертлужной впадины (б)

**Материал и методы исследования.** Данная работа является продолжением проведенных ранее исследований на математической модели таза [16, 17]. В данных исследованиях было заложено два варианта моделей. В первом варианте – модель таза с установленным эндопротезом с полиэтиленовым вкладышем (рисунок 1, а). При этом для области вертлужной впадины (на рисунке 1 показано другим цветом) свойства костной ткани условно приняты как остеопорозные.

Во втором варианте рассматривали модель с установленным эндопротезом в условиях уплотнения остеопорозных стенок вертлужной впадины костными аутотрансплантатами цилиндрической формы диаметром 6 мм и варьируемой длины от 6 мм до 13 мм (рисунок 1, б).

В своих исследованиях данные о свойствах остеопорозной костной ткани мы брали из работ Jimenez–Palomar I. et al. в соответствии с ранее проведенными исследованиями [14] (таблица 1).

Таблица 1 – Механические характеристики остеопорозной костной ткани

Ткань	E (МПа)	$\nu$
Остеопорозная кортикальная кость	1500	0,3
Остеопорозная губчатая кость	150	0,3

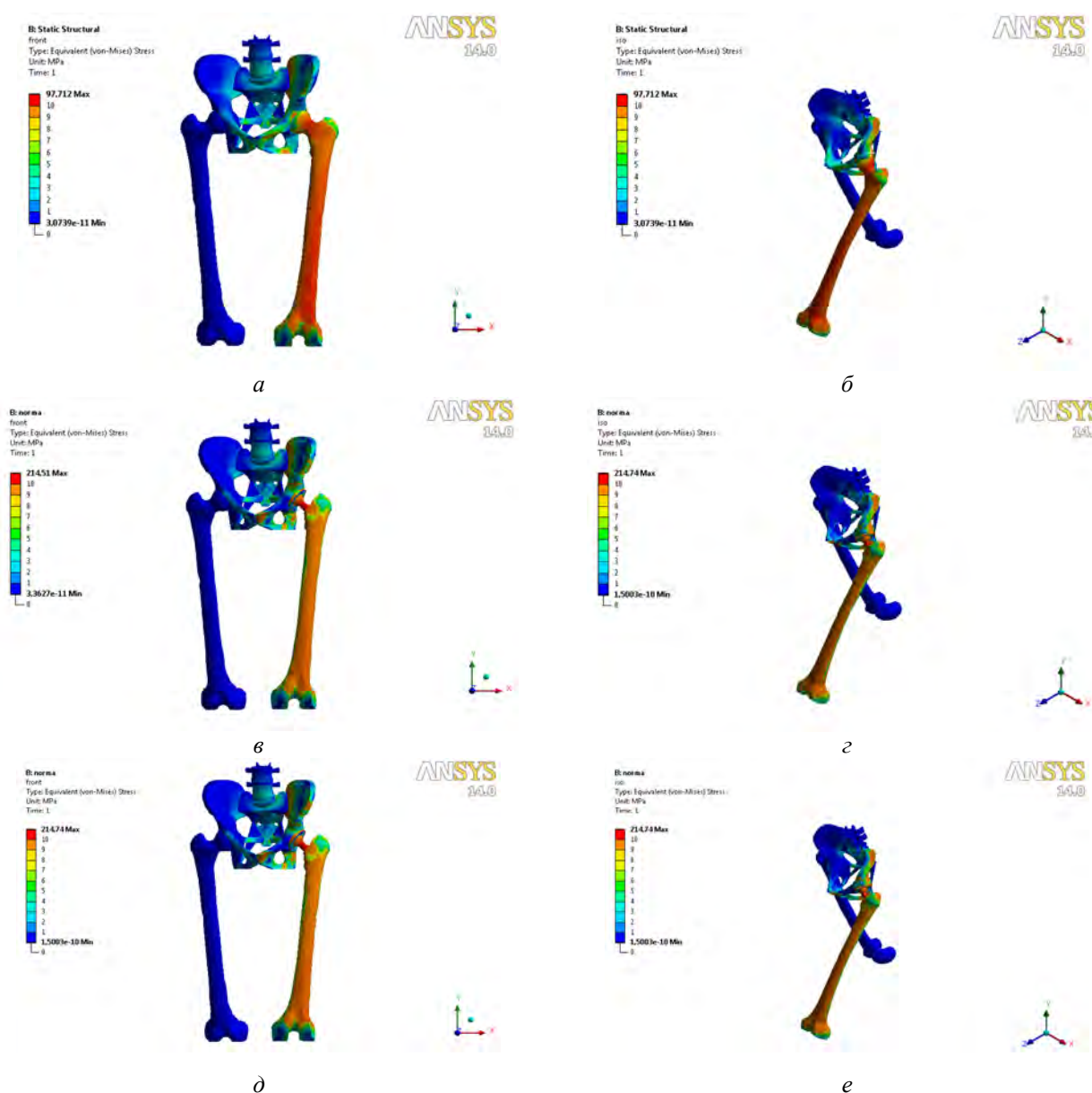


Рисунок 2 – Распределение напряжений Мизеса для первой фазы шага:

а, б – норма; в, г – остеопорозная вертлужная впадина;

д, е – остеопорозная вертлужная впадина, уплотнённая костными аутотрансплантатами

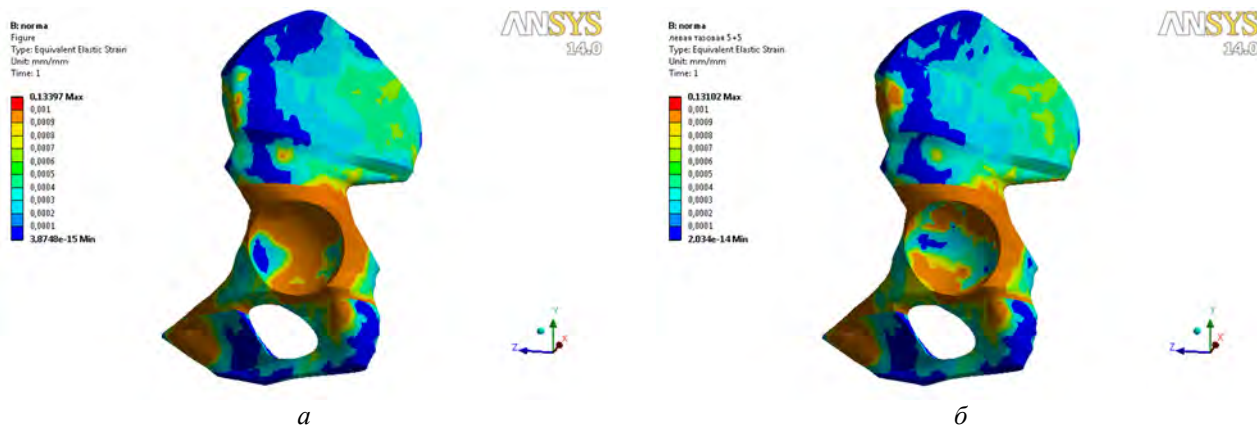


Рисунок 3 – Распределение деформаций в костях левой половины таза для первой фазы шага (эндопротез не показан для наглядности): а – модель с остеопорозной вертлужной впадиной; б – модель с остеопорозной вертлужной впадиной, уплотнённой костными аутотрансплантатами

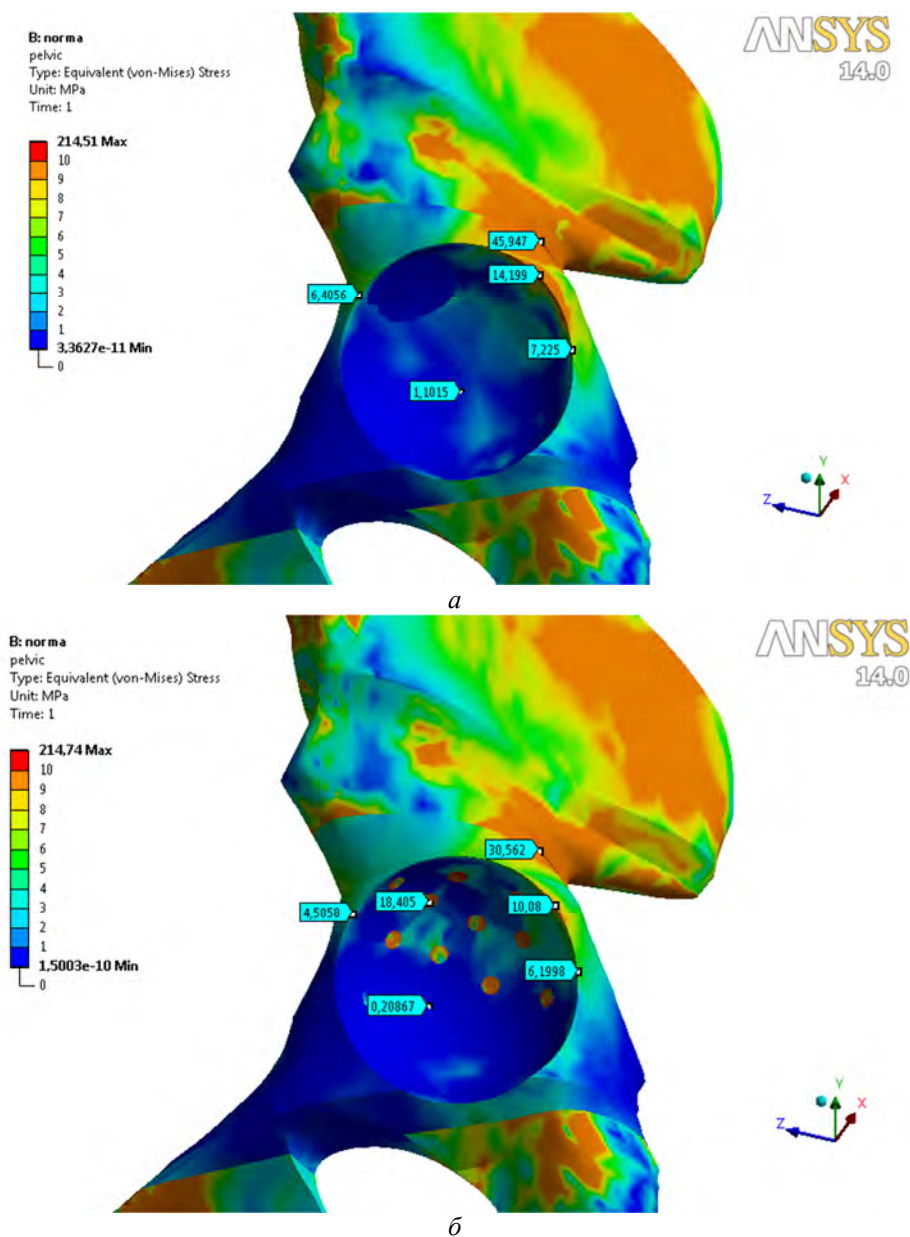


Рисунок 4 – Распределение напряжений Мизеса в костях левой половины таза для первой фазы шага (эндопротез не показан для наглядности): а – модель с остеопорозной вертлужной впадиной; б – модель с остеопорозной вертлужной впадиной, уплотнённой костными аутотрансплантатами



Основной нагрузкой в рассматриваемых моделях является вес тела, который принимается равным  $P = 700$  Н. При этом рассматривались три фазы шага: момент отрыва носка стопы неопорной ноги, полное одноопорное положение и удар пятки неопорной ноги.

В математических расчётах использовали программу ANSYS 14.0. Более подробно условия нагружения рассмотрены в наших предыдущих исследованиях [16, 17].

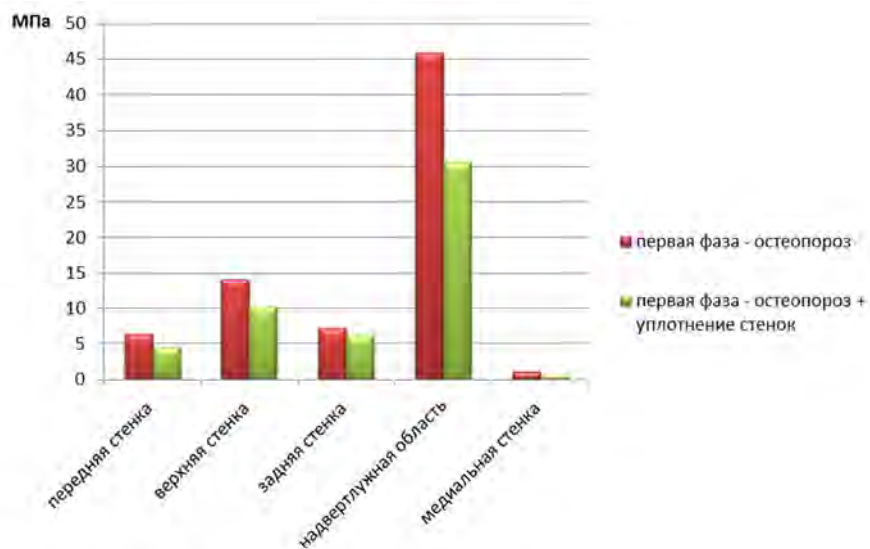
**Результаты исследования и их обсуждение.** 1. Анализ результатов исследования в **первой фазе шага** показал (рисунок 2), что общий характер распределения НДС по сравнению с моделью таза в норме (без эндопротеза) (рисунок 2 а, б) изменился [17]. Изменения в основном касаются распределения НДС в левой бедренной и тазовой костях. Более подробно распределение НДС в левой тазовой кости представлено на рисунке 3.

Для первой модели с остеопорозной костной тканью вертлужной впадины деформация в области вертлужной впадины наибольшая (рисунок 3, а), т.к. остеопорозная костная ткань менее жесткая по сравнению с нормальной костной тканью. Для модели с уплотнением (рисунок 3, б) распределение деформаций изменилась в сторону уменьшения.

Распределение напряженного состояния и величины напряжений по Мизесу в модели с остеопорозной костной тканью и в модели с уплотнением стенок вертлужной впадины костными аутооттрансплантатами показаны на рисунке 4.

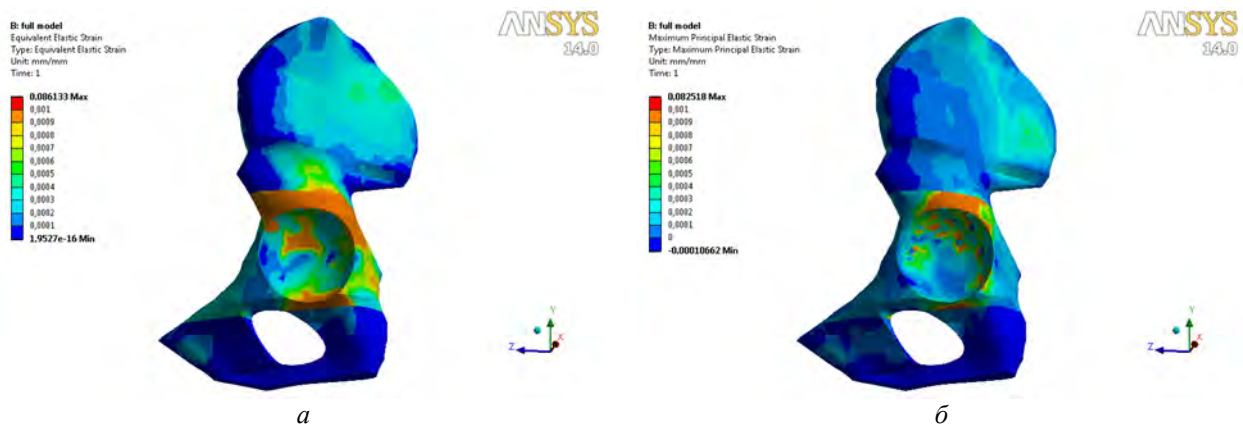
Из рисунка 4 следует, что в области вертлужной впадины обеих моделей наблюдаются три зоны концентрации напряжений. В ее передней стенке напряжения Мизеса достигают 6,4 МПа (4,5 МПа – для модели с уплотнением). На верхне-задней стенке вертлужной впадины напряжения Мизеса равняются 14,2 МПа (10,1 МПа – для модели с уплотнением). На задней стенке вертлужной впадины напряжения Мизеса равняются 7,2 МПа (6,2 МПа – для модели с уплотнением). На медиальной стенке вертлужной впадины – 1,1 МПа (0,2 МПа – для модели с уплотнением и 18,4 МПа – на костном аутооттрансплантате). Для надвертлужной области уровень напряженного состояния достигает значений 45,9 МПа (30,6 МПа – для модели со вставками).

Сравнительный анализ напряжений Мизеса (в МПа) в области вертлужной впадины для двух вариантов исследования в первой фазе шага представлен на рисунке 5.

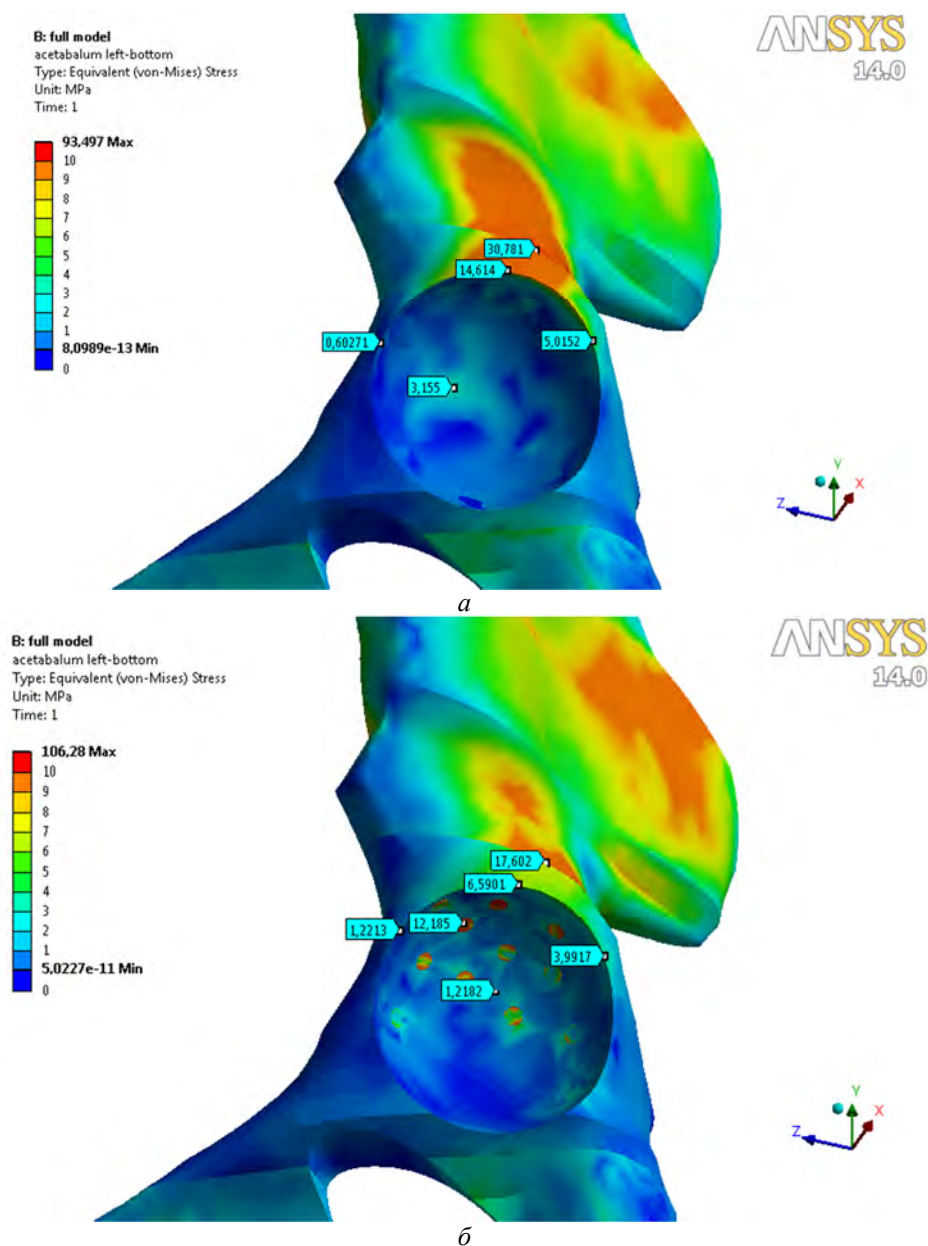


**Рисунок 5 – Сравнительный анализ напряжений Мизеса (в МПа) в области вертлужной впадины для двух вариантов исследования в первой фазе шага**

2. Анализ результатов исследования НДС таза во **второй фазе шага** для моделей с остеопорозной вертлужной впадиной и при моделировании уплотнения костной ткани показал, что так же, как и для первой фазы шага, общий характер распределения НДС по сравнению с нормой изменился [17], что представлено на рисунке 6.



**Рисунок 6 – Распределение деформаций в костях левой половины таза для второй фазы шага (эндопротез не показан для наглядности): а – модель с остеопорозной вертлужной впадиной; б – модель с остеопорозной вертлужной впадиной, уплотнённой костными аутооттрансплантатами**



**Рисунок 7 – Распределение напряжений Мизеса в костях левой половины таза для второй фазы шага (эндопротез не показан для наглядности): а) модель с остеопорозной вертлужной впадиной; б) модель с остеопорозной вертлужной впадиной, уплотнённой костными аутооттрансплантатами**

Для модели без уплотнения, в отличие от первой фазы шага, наибольшая деформация в области вертлужной впадины затрагивает в основном ее верхнюю стенку (рисунок 6, а). Для модели с уплотнением характер распределения деформации не изменился (рисунок 6, б). В области вертлужной впадины деформация тазовой кости уменьшилась.

Распределение напряженного состояния и величины напряжений по Мизесу в модели с остеопорозной костной тканью и в модели с костными аутооттрансплантатами показаны на рисунке 7.

Из рисунка 7 следует, что в области вертлужной впадины обеих моделей наблюдается зона концентрации напряжений в верхней стенке. В передней стенке вертлужной впадины напряжения Мизеса достигают 0,6 МПа (1,2 МПа – для модели с уплотнением). На ее верхней стенке напряжения Мизеса равняются 14,6 МПа (6,6 МПа – для модели с уплотнением). На задней стенке вертлужной впадины напряжения Мизеса равняются 5 МПа (4 МПа – для модели с уплотнением). На медиальной стенке вертлужной впадины – 3,1 МПа (1,2 МПа – для модели с уплотнением и 12,1 МПа – на костном аутооттрансплантате). Для надвертлужной области уровень напряженного состояния достигает значений 30,8 МПа (17,6 МПа – для модели с уплотнением).

Сравнение уровня напряженного состояния в вертлужной впадине обеих моделей представлено на рисунке 8.

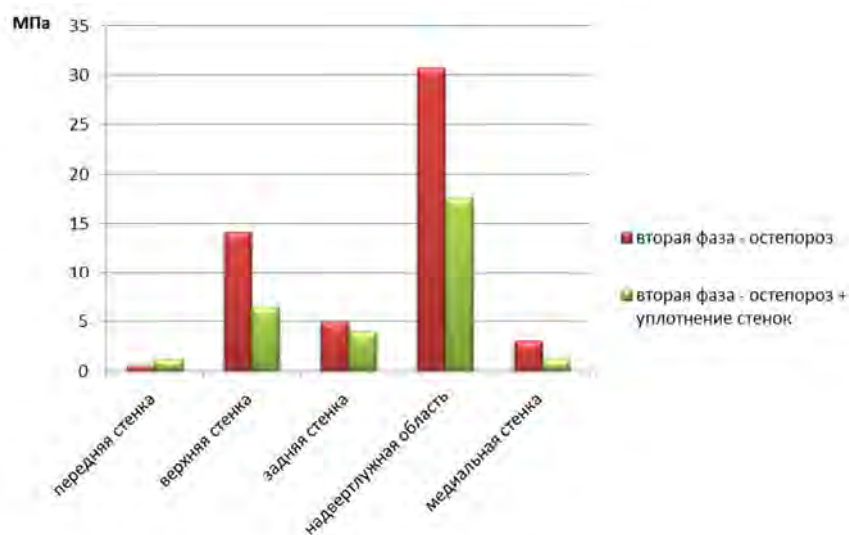


Рисунок 8 – Сравнительный анализ напряжений Мизеса (в МПа) в области вертлужной впадины для двух вариантов исследования во второй фазе шага

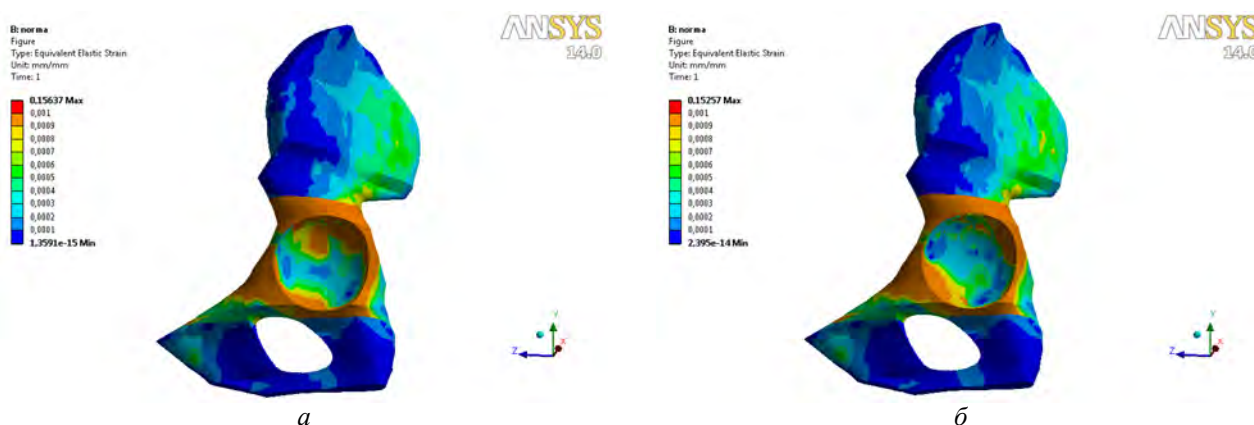


Рисунок 9 – Распределение деформаций в костях левой половины таза для третьей фазы шага (эндопротез не показан для наглядности): а – модель с остеопорозной вертлужной впадиной; б – модель с остеопорозной вертлужной впадиной, уплотнённой костными аутооттрансплантатами

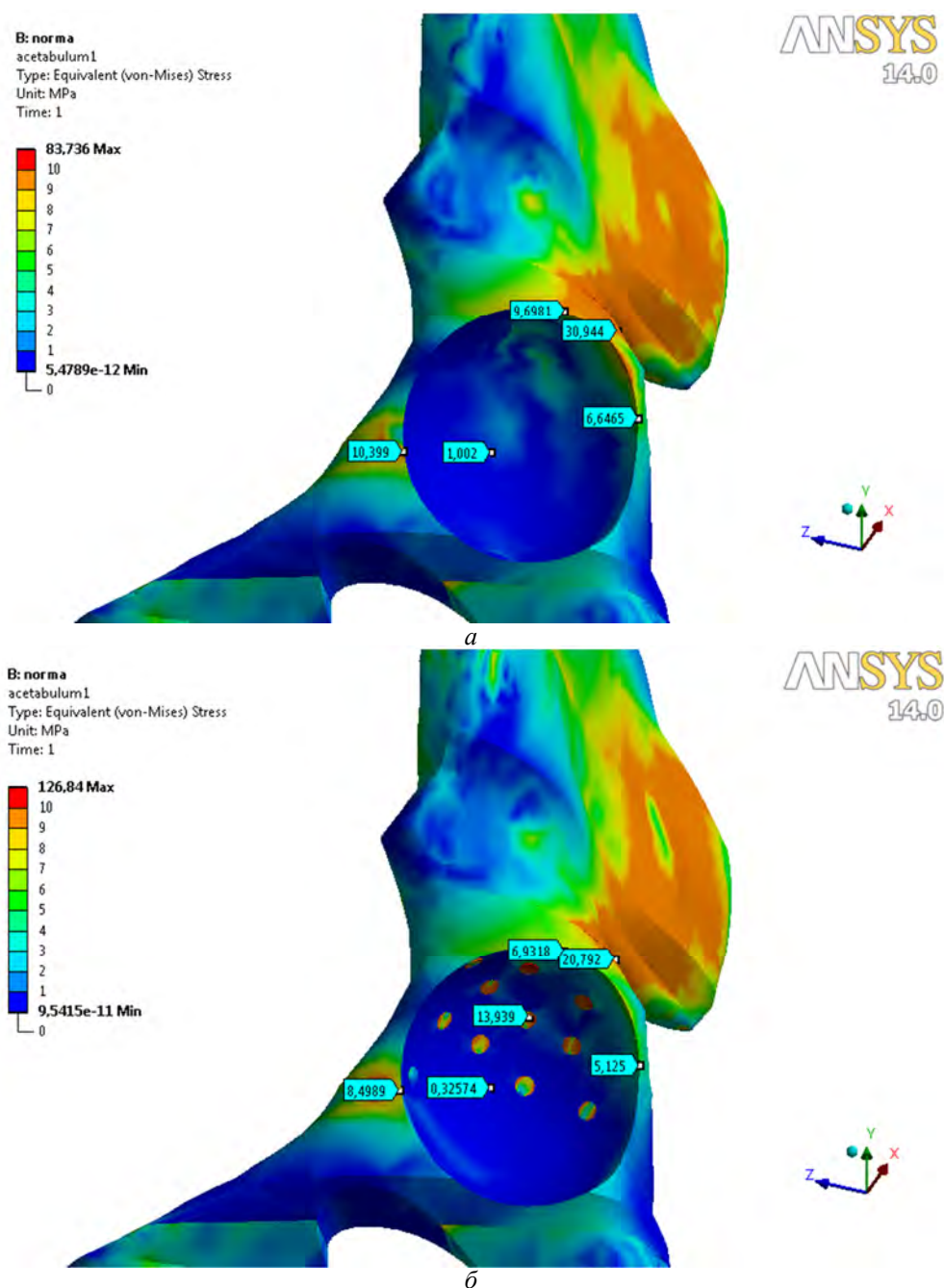
3. Анализ результатов исследования НДС таза в **третьей фазе шага** для моделей с остеопорозной вертлужной впадиной и при моделировании уплотнения костной ткани показал, что общий характер распределения НДС по сравнению с нормой изменился [17].



Более подробно распределение напряженного состояния в костях левой половины таза представлено на рисунке 9.

Для обеих моделей наибольший уровень деформации наблюдается в верхней, задней и в передней стенках вертлужной впадины. Для модели с уплотнением (рисунок 9, б) уровень деформаций в этих областях ниже, чем для модели без уплотнения.

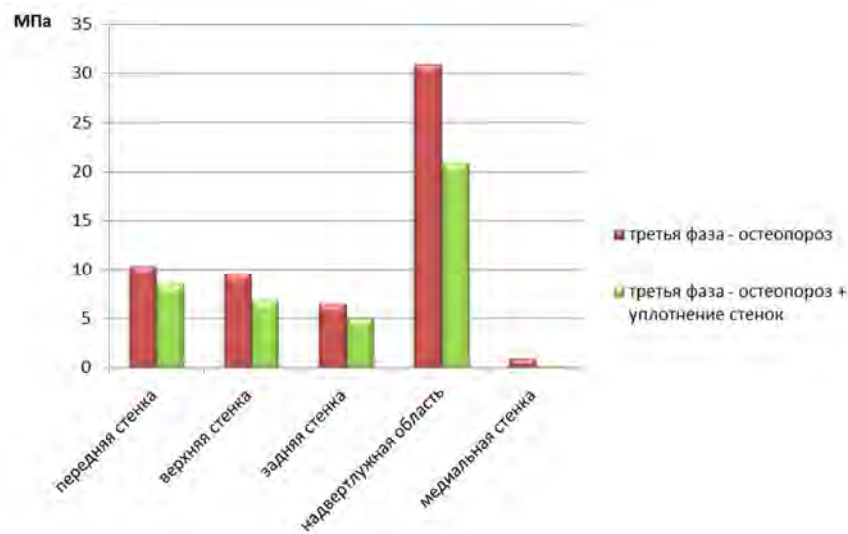
Распределение напряженного состояния и величины напряжений Мизеса в модели с остеопорозной костной тканью и в модели с уплотнением костными аутооттрансплантатами показаны на рисунке 10.



**Рисунок 10 – Распределение напряжений Мизеса в костях левой половины таза для третьей фазы шага (эндопротез не показан для наглядности): а – модель с остеопорозной вертлужной впадиной; б – модель с остеопорозной вертлужной впадиной, уплотнённой костными аутооттрансплантатами**

Из рисунка 10 следует, что, как и для первой фазы шага, в области вертлужной впадины обеих моделей наблюдаются три зоны концентрации напряжений. В ее передней стенке напряжения Мизеса достигают 10,4 МПа (8,5 МПа – для модели с уплотнением). На верхне-задней стенке вертлужной впадины напряжения Мизеса равняются 9,7 МПа (6,9 МПа – для модели с уплотнением). На задней стенке вертлужной впадины напряжения Мизеса равняются 6,6 МПа (5,1 МПа – для модели с уплотнением). На медиальной стенке

вертлужной впадины – 1 МПа (0,3 МПа – для модели с уплотнением и 13,9 МПа – на костном аутооттрансплантате). Для надвертлужной области уровень напряженного состояния достигает значений 30,9 МПа (20,8 МПа – для модели с уплотнением). Сравнение уровня напряженного состояния в вертлужной впадине обеих моделей более наглядно отображено на рисунке 11.



**Рисунок 11 – Сравнительный анализ напряжений Мизеса (в МПа) в области вертлужной впадины для двух вариантов исследования в третьей фазе шага**

Таким образом, сравнительный анализ напряжений Мизеса (в МПа) в двух моделях для трёх фаз шага показал, что в первой фазе шага напряжение достигает максимальных значений в надвертлужной области (соответственно 45 МПа и 30 МПа), во второй и третьей фазах шага эти показатели снижаются (соответственно 41 МПа и 17 МПа, 31 МПа и 21 МПа). Наряду с этим, максимальное напряжение в верхней стенке вертлужной впадины возникает во второй и третьей фазах шага (соответственно 14 МПа и 7 МПа, 9 МПа и 7 МПа).

**Закключение.** Учитывая результаты проведенного нами анализа напряжённо–деформированного состояния в области вертлужной впадины в трёх фазах шага в моделях с установленным эндопротезом в условиях остеопороза стенок вертлужной впадины и после их уплотнения костными аутооттрансплантатами, следует заключить:

1. Наличие остеопороза существенно изменяет НДС в области вертлужной впадины.
2. Остеопороз приводит к увеличению степени деформации в области вертлужной впадины и повышению напряженного состояния, при этом максимально – в надвертлужной области.
3. Использование костных аутооттрансплантатов для уплотнения стенок вертлужной впадины позволяет понизить степень деформаций в области вертлужной впадины и уровень напряженного состояния в надвертлужной области.
4. При ходьбе, для всех трёх фаз шага, в случае использования предложенной нами методики уплотнения стенок вертлужной впадины костными аутооттрансплантатами наблюдается снижение напряжений в надвертлужной области от 30% до 45%.
5. При остеопорозе вертлужной впадины для достижения первичной стабильной фиксации тазового компонента эндопротеза целесообразно и оправдано применение костной аутопластики её стенок, что даёт возможность снизить напряжение в наиболее нагружаемой области вертлужной впадины и, тем самым, улучшить функциональное состояние эндопротеза в организме человека на более длительный период.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fini, M. Bone remodeling, humoral networks and smart biomaterial technology for osteoporosis / M. Fini, A. Carpi, V. Borsari [et al.] // Front Biosci (Schol Ed). – 2010. – № 1, 2. – P.P. 468–482.
2. Fini, M. Osteoporosis and biomaterial osteointegration / M. Fini, G. Giavaresi, P. Torricelli [et al.] // Biomed Pharmacother. – 2004. – № 58 (9). – P.P. 487–493.
3. Sartori, M. Collagen type I coating stimulates bone regeneration and osteointegration of titanium implants in the osteopenic rat / M. Sartori, G. Giavaresi, A. Parrilli [et al.] // International Orthopaedics. – 2015. – № 39 (10). – P.P. 2041–2052.

4. Корж, Н.А. Остеопороз: эпидемиология, клиника, диагностика, профилактика, лечение / Н.А. Корж, В.В. Поворознюк, Н.В. Дедух, И.А. Зупанец. – Харьков: Золотые страницы, 2002. – 646 с.
5. Schwarzkopf, R. Salvage Treatment of Hip Fractures After Failure of Surgical Fixation: A Systematic Review / R. Schwarzkopf, G. Manzano, S. Woolwine, J. Slover // Orthopaedic Knowledge Online Journal. – 2015. – Vol. 13. – № 3.
6. Лоскутов, А.Е. Выбор ацетабулярного компонента при бесцементном эндопротезировании тазобедренного сустава у пациентов с остеопорозом / А.Е. Лоскутов, А.В. Дегтярь, Д.А. Синегубов, А.В. Алтанец // Збірник наукових праць XVI з'їзду ортопедів–травматологів України. – Харків. – 2013. – С. 89.
7. Shilnikov, V.A. Total hip replacement with pseudoarthrosis of the femoral neck / V.A. Shilnikov, R.M. Tikhilov, A.O. Denisov, I.I. Shubnyakov // Abstract book of poster papers: 36th SICOT Orthopaedic World Congress, 17–19 September 2015, Guangzhou, China [electronic resource], 2015. – Access to materials: <http://www.sicot.org/sites/default/files/images/Guangzhou/Abstract%20Book%20-%20Posters.pdf>.
8. Корж, Н.А. Применение чашки эндопротеза тазобедренного сустава с танталовым покрытием при дефектах стенок вертлужной впадины и остеопорозе / Н.А. Корж, В.А. Филиппенко, В.А. Танькут [и др.] // Материалы IX съезда травматологов–ортопедов Республики Беларусь. – Минск. – 2014. – С. 260–266.
9. Gonzalez, M. Cementless Acetabular Revision with Rim Acetabular Defects: Experimental and FEA Investigation / M. Gonzalez // THESIS Submitted as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Mechanical Engineering in the Graduate College of the University of Illinois at Chicago, 2014.
10. Zivkovic, I. The Effect of Under-Reaming on the Cup. Bone Interface of a Press Fit Hip Replacement/ I. Zivkovic, M. Gonzalez, F. Amirouche // Journal of Biomedical Engineering. – 2010. – vol. 132. – № 4. – P.P. 41008.
11. Barreto, S. The Influence of the Pelvic Bone on the Computational Results of the Acetabular Component of a Total Hip Prosthesis / S. Barreto // Journal of Biomechanical Engineering MAY, 2010, Vol. 132.
12. Amirouchea, F. Primary cup stability in THA with augmentation of acetabular defect. A comparison of healthy and osteoporotic bone / F. Amirouchea, G. Solitro, S. Broviaka, W. Goldsteina, M. Gonzaleza, R. Barmada // Orthopaedics & Traumatology: Surgery & Research. – 2015. – vol. 101– P.P. 667–673.
13. Wirth, A.J. Computational analyses of small endosseous implants in osteoporotic bone / A.J. Wirth, R. Muller, G.H. van Lenthe // Eur Cell Mater. – 2010. – P.P. 58–71.
14. Jimenez–Palomar, I. Mechanical behavior of osteoporotic bone at sub–lamellar length scales / I. Jimenez–Palomar, A. Shipov, R. Shahar, A.H. Barber // Frontiers in Materials. – 2015. – Vol. 2. – Article 9. – P.P. 1–7.
15. Fradet, L. Prediction of bone anisotropic mechanical properties in osteoporotic human vertebral body from microstructural parameters / L. Fradet, A. Vachon, A. Levasseur, P.J. Arnoux, Y. Petit // Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. – 2013. – Vol. 16. – № S1. – P.P. 326–327.
16. Тяжелов, А.А. Математическая модель таза для расчета его напряженно–деформированного состояния / А.А. Тяжелов, В.А. Филиппенко, А.В. Яреско, С.Е. Бондаренко // Ортопедия, травматология и протезирование. – 2015. – № 1. – С. 25–33.
17. Филиппенко, В.А. Напряженно–деформированное состояние модели таза и тазобедренного сустава в различных фазах шага / В.А. Танькут, С.Е. Бондаренко, В.А. Стауде, А.В. Яреско, М. Аконджом // Ортопедия, травматология и протезирование. – 2015. – № 4. – С. 31–37.

**Филиппенко Владимир Акимович**

ГУ «ІППС ім. проф. М.І. Ситенко НАМНУ»  
ул. Пушкинская 80, г. Харьков, Украина, 61024  
доктор медицинских наук, профессор, руководитель  
клиники  
E-mail: [filippenko@valor.ua](mailto:filippenko@valor.ua)

**Танькут Владимир Алексеевич**

ГУ «ІППС ім. проф. М.І. Ситенко НАМНУ»  
ул. Пушкинская 80, г. Харьков, Украина, 61024  
доктор медицинских наук, профессор, гл. науч.  
сотрудник  
E-mail: [vtankut@valor.ua](mailto:vtankut@valor.ua)

**Аконджом Мандус**

ГУ «ІППС ім. проф. М.І. Ситенко НАМНУ»  
ул. Пушкинская 80, г. Харьков, Украина, 61024  
клинический ординатор  
E-mail: [mandus4gcfr2032@gmail.com](mailto:mandus4gcfr2032@gmail.com)

**Яреско Александр Васильевич**

ГУ «ІППС ім. проф. М.І. Ситенко НАМНУ»  
ул. Пушкинская 80, г. Харьков, Украина, 61024  
инженер лаборатории биомеханики  
E-mail: [avyresko@gmail.com](mailto:avyresko@gmail.com)

**Бондаренко Станислав Евгеньевич**

ГУ «ІППС ім. проф. М.І. Ситенко НАМНУ»  
ул. Пушкинская 80, г. Харьков, Украина, 61024  
кандидат медицинских наук, старший научный сотрудник  
E-mail: [bondarenko@gmail.com](mailto:bondarenko@gmail.com)

V.A. FILIPPENKO, V.A. TANKUT, S.Ye. BONDARENKO,  
M. AKONDZHOM, A.V. YARESKO

# MATHEMATICAL JUSTIFICATION TECHNIQUES BONE GRAFTING OF THE ACETABULUM WALL IN PATIENTS WITH OSTEOPOROSIS DURING TOTAL HIP ARTHROPLASTY

*Optimization of stability fixation implant in bone in patients with osteoporosis and improving treatment outcomes by using three-dimensional modeling and finite element analysis of mechanical characteristics bone tissue in the acetabulum in conditions of osteoporosis under loading in three phases steps before and after bone grafting.*

**Keywords:** *osteoporosis, acetabular bone grafting, step phase, the mechanical properties of bone.*

## BIBLIOGRAPHY

1. Fini, M. Bone remodeling, humoral networks and smart biomaterial technology for osteoporosis / M. Fini, A. Carpi, V. Borsari [et al.] // *Front Biosci (Schol Ed)*. – 2010. – № 1. 2. – P.P. 468–482.
2. Fini, M. Osteoporosis and biomaterial osteointegration / M. Fini, G. Giavaresi, P. Torricelli [et al.] // *Biomed Pharmacother*. – 2004. – № 58 (9). – P.P. 487–493.
3. Sartori, M. Collagen type I coating stimulates bone regeneration and osteointegration of titanium implants in the osteopenic rat / M. Sartori, G. Giavaresi, A. Parrilli [et al.] // *International Orthopaedics*. – 2015. – № 39 (10). – P.P. 2041–2052.
4. Korzh, N.A. Osteoporoz: epidemiologiya, klinika, diagnostika, profilaktika, lecheniye / N.A. Korzh, V.V. Povoroznyuk, N.V. Dedukh, I.A. Zupanets. – Kharkov: Zolotyve stranitsy, 2002. – 646 s.
5. Schwarzkopf, R. Salvage Treatment of Hip Fractures After Failure of Surgical Fixation: A Systematic Review / R. Schwarzkopf, G. Manzano, S. Woolwine, J. Slover // *Orthopaedic Knowledge Online Journal*. – 2015. – Vol. 13. – № 3.
6. Loskutov, A.Ye. Vybory atsetabulyarnogo komponenta pri bestsementnom endoprotezirovanii tazobedrennogo sustava u patsientov s osteoporozom / A.Ye. Loskutov, A.V. Degtvar, D.A. Sinegubov, A.V. Altanets // *Zbírnik naukovikh prats XVI z'zdu ortopediv-travmatologiv Ukraïni*. – Kharkiv. – 2013. – S. 89.
7. Shilnikov, V.A. Total hip replacement with pseudoarthrosis of the femoral neck / V.A. Shilnikov, R.M. Tikhilov, A.O. Denisov, I.I. Shubnyakov // *Abstract book of poster papers: 36th SISOT Orthopaedic World Congress, 17–19 September 2015, Guangzhou, China [electronic resource]*, 2015. – Access to materials: <http://www.sicot.org/sites/default/files/images/Guangzhou/Abstract%20Book%20-%20Posters.pdf>.
8. Korzh, N.A. Primeneniye chashki endoproteza tazobedrennogo sustava s tantalovym pokrytiem pri defektakh stenok vertluzhnov vpadiny i osteoporoze / N.A. Korzh, V.A. Filippenko, V.A. Tankut [i dr.] // *Materialy IX s'yezda travmatologov-ortopedov Respubliki Belarus*. – Minsk. – 2014. – S. 260–266.
9. Gonzalez, M. Cementless Acetabular Revision with Rim Acetabular Defects: Experimental and FEA Investigation / M. Gonzalez // *THESIS Submitted as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Mechanical Engineering in the Graduate College of the University of Illinois at Chicago*, 2014.
10. Zivkovic, I. The Effect of Under-Reaming on the Cup. Bone Interface of a Press Fit Hip Replacement / I. Zivkovic, M. Gonzalez, F. Amirouche // *Journal of Biomedical Engineering*. – 2010. – vol. 132. – № 4. – P.P. 41008.
11. Barreto, S. The Influence of the Pelvic Bone on the Computational Results of the Acetabular Component of a Total Hip Prosthesis / S. Barreto // *Journal of Biomechanical Engineering* MAY, 2010. Vol. 132.
12. Amirouche, F. Primary cup stability in THA with augmentation of acetabular defect. A comparison of healthy and osteoporotic bone / F. Amirouche, G. Solitro, S. Broviaka, W. Goldsteina, M. Gonzaleza, R. Barmada // *Orthopaedics & Traumatology: Surgery & Research*. – 2015. – vol. 101– P.P. 667–673.
13. Wirth, A.J. Computational analyses of small endosseous implants in osteoporotic bone / A.J. Wirth, R. Muller, G.H. van Lenthe // *Eur Cell Mater*. – 2010. – P.P. 58–71.
14. Jimenez-Palmar, I. Mechanical behavior of osteoporotic bone at sub-lamellar length scales / I. Jimenez-Palmar, A. Shipov, R. Shahar, A.H. Barber // *Frontiers in Materials*. – 2015. – Vol. 2. – Article 9. – P.P. 1–7.
15. Fradet, L. Prediction of bone anisotropic mechanical properties in osteoporotic human vertebral body from microstructural parameters / L. Fradet, A. Vachon, A. Levasseur, P.J. Arnoux, Y. Petit // *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. – 2013. – Vol. 16. – № S1. – P.P. 326–327.
16. Tyazhelov, A.A. Matematicheskaya model taza dlya rascheta vego napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya / A.A. Tyazhelov, V.A. Filippenko, A.V. Yaresko, S.Ye. Bondarenko // *Ortopediya, travmatologiya i protezirovaniye*. – 2015. – № 1. – S. 25–33.
17. Filippenko, V.A. Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye modeli taza i tazobedrennogo sustava v razlichnykh fazakh shaga / V.A. Tankut, S.Ye. Bondarenko, V.A. Staude, A.V. Yaresko, M. Akondzhom // *Ortopediya, travmatologiya i protezirovaniye*. – 2015. – № 4. – S. 31–37.

### Filippenko Vladimir Akimovich

GU «IPPS them. prof. M.I. Sitenko NAMNU»  
Str. Pushkinskaya 80, Kharkiv, Ukraine, 61024  
M.D., professor, head of the clinic  
E-mail: filippenko@valor.ua

### Tankut Vladimir Alekseevich

GU «IPPS them. prof. M.I. Sitenko NAMNU»  
Str. Pushkinskaya 80, Kharkiv, Ukraine, 61024  
M.D., Professor, Ch. scientific. employee  
E-mail: vtankut@valor.ua

### Akondzhom Mundus

GU «IPPS them. prof. M.I. Sitenko NAMNU»  
Str. Pushkinskaya 80, Kharkiv, Ukraine, 61024  
clinical intern  
E-mail: mandus4gcfr2032@gmail.com

### Yaresko Alexander Vasilievich

GU «IPPS them. prof. M.I. Sitenko NAMNU»  
Str. Pushkinskaya 80, Kharkiv, Ukraine, 61024  
Engineer biomechanics laboratory  
E-mail: avyresko@gmail.com

### Bondarenko Stanislav Evgenievich

GU «IPPS them. prof. M.I. Sitenko NAMNU»  
Str. Pushkinskaya 80, Kharkiv, Ukraine, 61024  
Ph.D., Senior Researcher  
E-mail: bondarenko@gmail.com

## **КОНТРОЛЬ, ДИАГНОСТИКА, ИСПЫТАНИЯ**

УДК: 620.178.3

О.А. ТРОИЦКИЙ, В.И. СТАШЕНКО, О.Б. СКВОРЦОВ

### **ВЛИЯНИЕ МАТЕРИАЛА ОБРАЗЦОВ, ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСОВ И АМПЛИТУДЫ ТОКА НА ВЕЛИЧИНУ СОБСТВЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОКА И ВИБРАЦИЮ КРУГЛЫХ ОБРАЗЦОВ ОТ ПИНЧ-ДЕЙСТВИЯ ТОКА**

*В работе рассматривается вопрос контроля вибрации в различных частях металлического образца при пропускании через него импульсов тока. Измерения выполнялись синхронно несколькими трехкомпонентными датчиками вибрации.*

**Ключевые слова:** вибрация, пинч-эффект, магнитное поле, импульс тока.

**Введение.** Сплошные и трубчатые проводники, применяемые в технике в качестве токопроводящих элементов в мощных генераторах, трансформаторах и других электротехнических конструкциях испытывают значительные механические колебания, в том числе в условиях повышенных температур под действием пондеромоторных сил тока (пинч – эффекта). Обеспечение прочности таких элементов конструкций является актуальной задачей с точки зрения обеспечения безопасности. Оценка вибрационной прочности токопроводящих элементов наряду с другими причинами требует также учета вибрационных эффектов, возникающих в самом проводнике как следствии скин-эффекта и пинч – эффекта [1, 2]. В основе пинч-эффекта лежит взаимодействие импульсного тока проводника с вызванным им магнитным полем, приводящее к появлению в проводнике или в элементах машин, механических напряжений и колебаний напряжений с частотой следования импульсов тока. Согласно теоретическим оценкам величина возникающих механических напряжений и средний уровень сдвиговых механических напряжений в металле, обусловленных электродинамическим давлением магнитного поля тока (пинч-эффект) пропорционален квадрату плотности тока и площади сечения проводника. Пинч-эффект при прохождении импульсов тока по проводникам можно фиксировать и исследовать с помощью пьезоэлектрических преобразователей – датчиков вибрации [3].

В работе измерялось одновременно магнитное поле и вибрации в различных частях металлического образца при пропускании импульсов ток. Измерения выполнялись несколькими трехкомпонентными датчиками вибрации и линейным датчиком магнитного поля на основе эффекта Холла (рисунок 2 МА). Выходное напряжение датчика находилось в линейной зависимости с величиной магнитного поля. Датчик обладал высокой нагрузочной способностью, линейной характеристикой преобразования в рабочем диапазоне магнитных полей, широким диапазоном рабочих температур и питающих напряжений.

Первый и второй пьезоэлектрические трехкомпонентные акселерометры АП20 закреплены циакриновым клеем через ситаловые подложки соответственно на краю образца и в центре (рисунок 1). Небольшие габариты и малый вес акселерометров снижают влияние установленных на образце датчиков на результаты испытаний. К краям образца подключен источник импульсного тока. Выходы акселерометров подключены к входам модуля сбора данных NIUSB 4431 реализующего совместно с компьютером и программным пакетом LabVIEW виртуальную измерительную систему [4]. Система (рисунок 1) обеспечивает контроль (рисунок 2) составляющих вибрации: радиальных  $V1r$ ;  $V2r$ , и осевых  $V1a$ ;  $V2a$ .

Датчик магнитного поля устанавливался на расстоянии 3 мм от проводника. Датчик выполнен в виде печатной платы и микросхемы MLX90242. Он применялся для контроля величины магнитной индукции, обеспечивая измерения в диапазоне  $\pm 0,25T$ . Значения магнитной индукции проводника, были использованы для оценки тока и плотности тока через образец. Для контроля рассчитываемые значения сравнивались с замерами тока (по напряжению на эталонном сопротивлении) и при необходимости вносилась корректировка в коэффициент преобразования. Датчик закрепляется на образце через диэлектрическую

прокладку или может устанавливаться на изолированном основании без механического контакта с образцом.

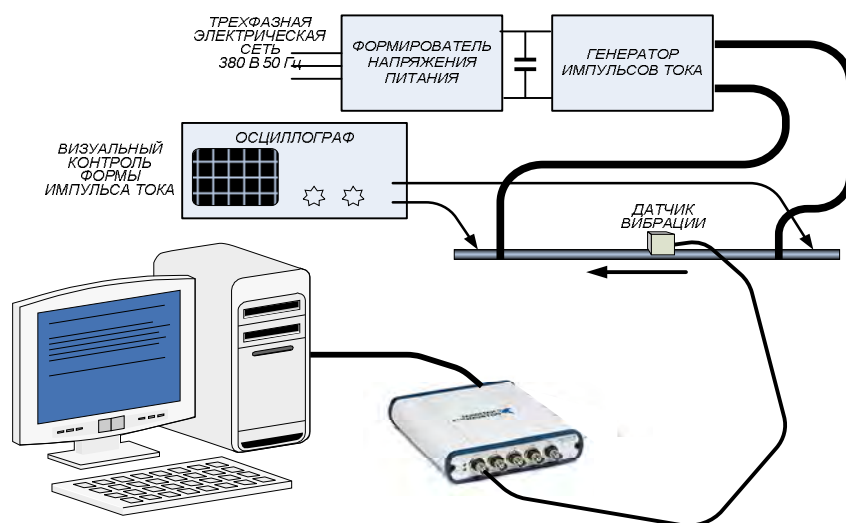


Рисунок 1 – Стенд измерения вибраций с подключением цилиндрического образца

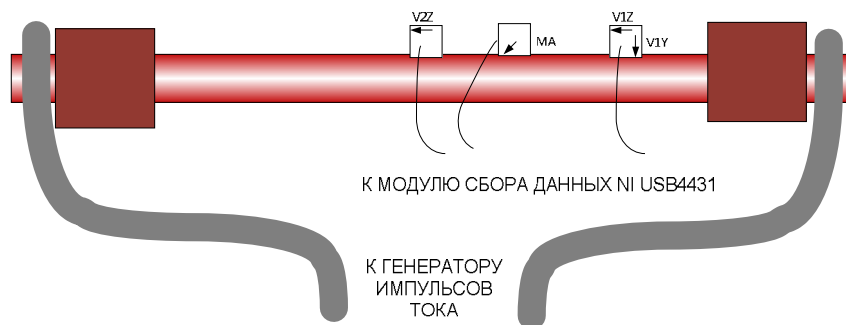


Рисунок 2 – Расположение датчиков на испытываемом образце

Напряженность магнитного поля на расстоянии  $R$  от проводника тока с величиной тока  $I$  определяется соотношением:

$$H = \frac{I}{2\pi \cdot R}$$

Индукция магнитного поля связана с его напряженностью соотношением:

$$B = \mu_0 \cdot \mu \cdot H$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная ( $\mu_0 = 1,25663706 \cdot 10^{-6}$  Гн/м);

$\mu$  – магнитная проницаемость материала, в котором проводится измерение ( $\mu \approx 1$ )

Отсюда величина измеряемой магнитной индукции связана с током соотношением:

$$B[\text{Тс}] = 1,257 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{\text{А}}{\text{м}} \right] \cdot \mu \cdot H \left[ \frac{\text{А}}{\text{м}} \right]$$

При пропускании импульсов тока в образце возникают деформации [1, 2] и возникают радиальные и осевые вибрационные колебания за счет пинч-эффекта.

Амплитуда колебаний по результатам измерения ускорения зависит от величины тока и линейно связанной с ним величины магнитной индукции. Пример такой зависимости приведен на рисунке 3.

Помехи, созданные системой формирования мощных импульсов тока (из-за питания ее трехфазной сетью переменного тока) оказывали значительное влияние на каналы контроля вибрации, поскольку датчики имели высокий внутренний импеданс. Для снижения влияния таких помех при обработке сигналов вибрации выполнялась дополнительная фильтрация с применением цифровых адаптивных режекторных фильтров на частотах соответствующих помехам.

На каждом измерительном канале проводилась оценка средней амплитуды (пикового значения)  $A$  контролируемого параметра – ускорения, скорости или перемещения.



где  $A = \frac{\sum V_{\max}}{n}$ ;  $V_{\max} = MAX \langle |V_1|, |V_2|, \dots, |V_N| \rangle$ .

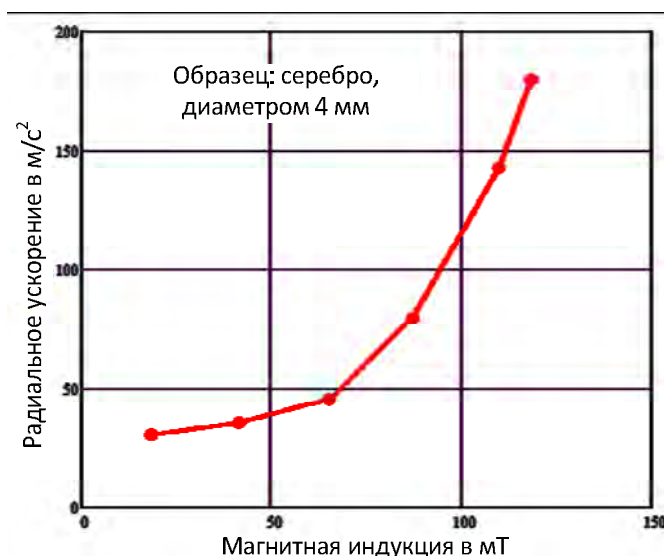


Рисунок 3 – Зависимость радиального ускорения от амплитуды магнитной индукции

Такая оценка выполнялась для каждого действующего импульса тока в образце. С целью повышения точности такие оценки усреднялись для каждого значения импульса тока, с погрешностью результата менее 5%.

Для контроля стационарности в каждой серии испытаний выполнялся контроль среднего значения, дисперсии, СКО (среднее квадратичное отклонение) и отношения СКО к среднему значению  $\delta$  (таблице 1).

Таблица 1 – Оценка погрешностей измерения радиальных и осевых значений вибрации

Среднее пиковое ускорения	Среднее $\bar{A}$ , $m/c^2$	Дисперсия $D$	СКО ( $\sqrt{D}$ )	$\delta$ , % (СКО·100/ $\bar{A}$ )
Радиальное (с краю) V1r	17.638	0.142	0.377	2.135
Осевое (с краю) V1a	18.431	0.087	0.294	1.596
Радиальное (в центре) V2r	17.26	0.08	0.282	1.635
Осевое (в центре) V2a	15.126	0.068	0.262	1.73

Процессы в образце при пропускании импульса тока можно разделить на два этапа. Первый связан с активным воздействием импульса. На этом этапе происходит нарастание и тока и затем его перераспределение по окончании влияния скин-эффекта. Во время действия импульса тока механическое воздействие проявляется как пинч-эффект. По завершению импульса и затухания магнитного поля тока снова появляется скин-эффект.

Второй этап связан с появлением затухающих механических колебаний в образце, как следствие деформаций возникающих на первом этапе. Длительность второго этапа может существенно превышать время действия импульса тока и в значительной степени определяется свойствами образца, материалом, геометрическими размерами, наличием дефектов и особенностями его крепления. Вибрационный отклик на действие импульса тока представлен на рисунке 4.

Анализ вибрационных характеристик на втором этапе с учетом особенностей первого целесообразно использовать при оценке неразрушающего контроля в ток несущих элементах конструкций.

На рисунке 5 приведена зависимость вибрационного отклика и производной от величины магнитного поля. Видно, что максимальные изменения магнитного потока соответствуют пиковым значениям величины ускорения во время активного действия импульса тока.

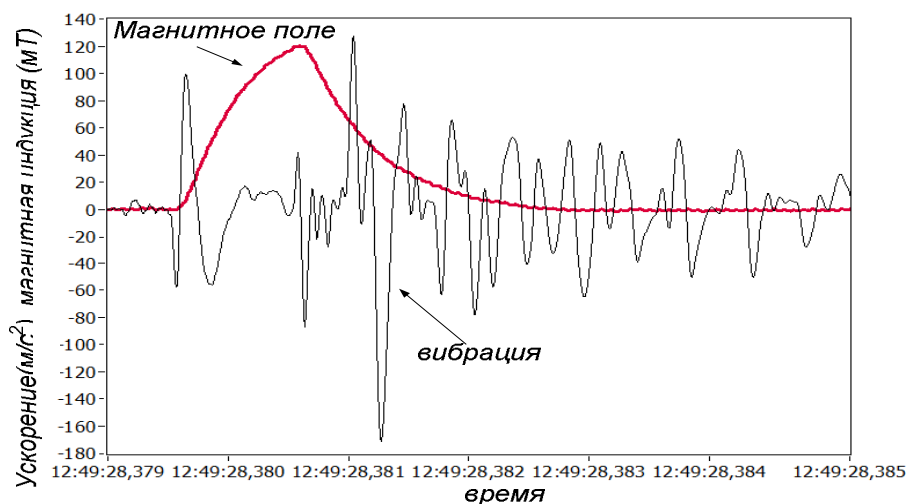


Рисунок 4 – Зависимость осевого ускорения и магнитного поля для датчика на краю образца

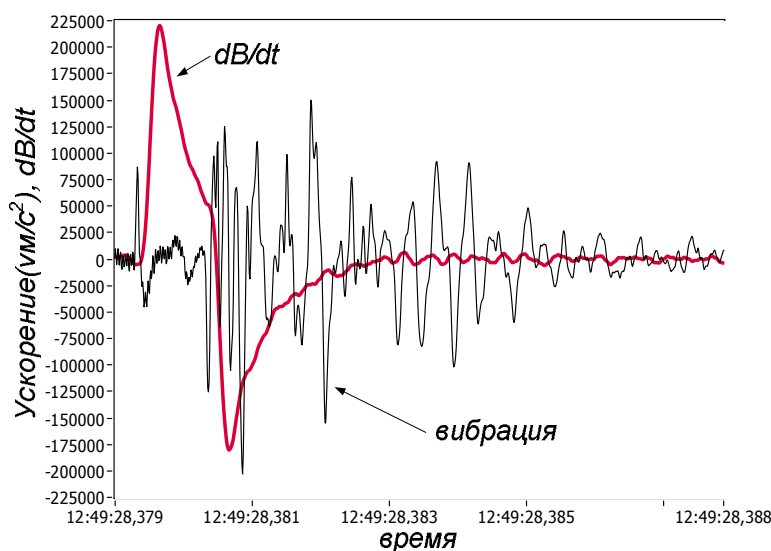


Рисунок 5 – зависимость вибрационного отклика и производной от величины магнитного поля

Длительность второго этапа может существенно превышать время действия импульса тока и в значительной степени определяется свойствами образца, материалом, геометрическими размерами, наличием дефектов и особенностями его крепления.

На рисунке 6 представлена зависимость амплитуды тока от величины магнитной индукции. Эта зависимость показывает хорошую линейность и может служить основанием для использования измерения магнитного поля для контроля тока в проводнике.

Частоты колебаний на втором этапе могут быть довольно высокими, т.к. определяются процессами на первом. Представляет интерес подробнее рассмотреть взаимосвязи вибрационных составляющих на первом этапе. При анализе результатов экспериментов с использованием двух датчиков вибрации было замечено, что механические колебания на первом этапе характеризуются большими коэффициентами корреляции для процессов для  $V1r$  и  $V2a$ , а также для  $V1a$  и  $V2r$ . Это иллюстрируется временными диаграммами на рисунках 7 и 8.

Коэффициенты корреляции для таких сигналов достигают 0,75–0,9. Коэффициенты корреляции других пар составляющих менее 0,4. Такие высокие корреляции могут быть связаны как с проявлением коэффициента Пуассона, но могут также косвенно свидетельствовать о турбулентности магнитогидродинамических процессов.

Рассматриваемые процессы характеризуются затухающими корреляционными функциями, что можно рассматривать в качестве подтверждения эргодичности таких процессов.



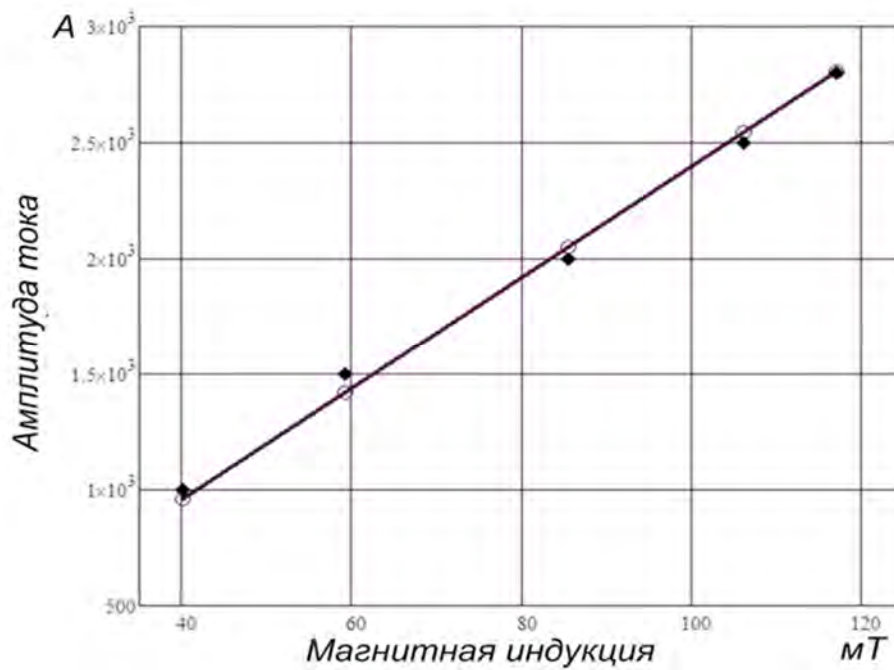


Рисунок 6 – зависимость амплитуды тока от величины магнитной индукции

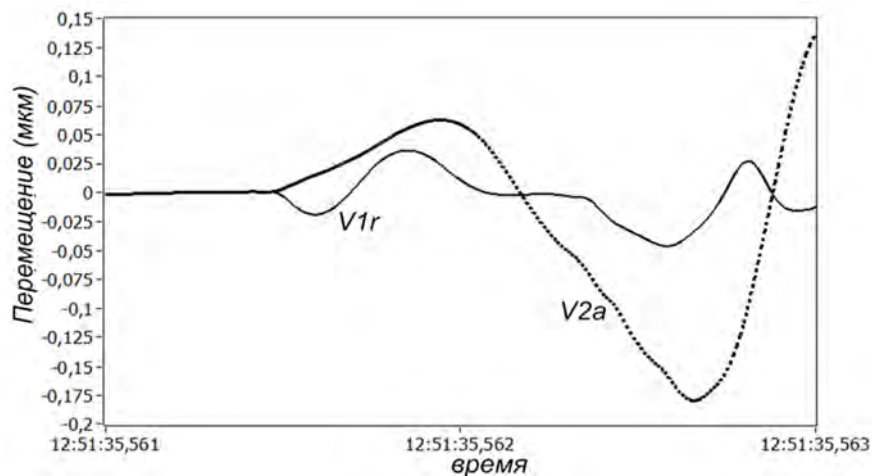


Рисунок 7 – Первая временная диаграмма

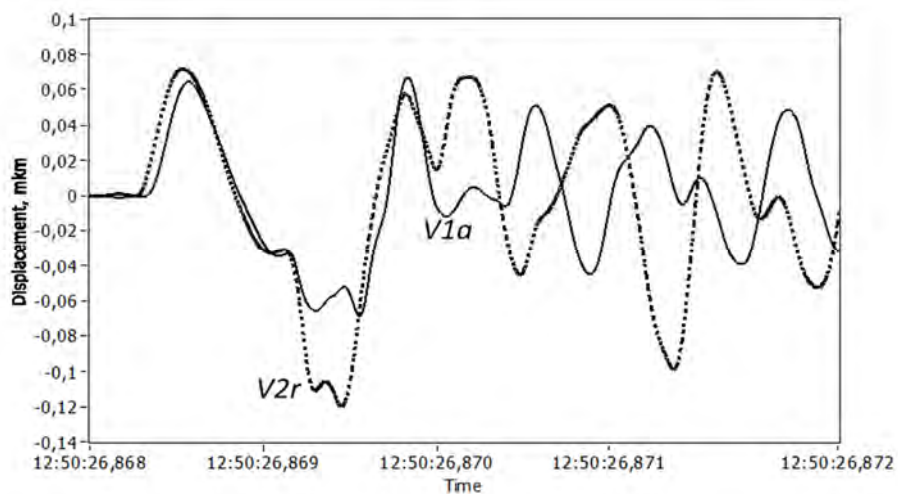


Рисунок 8 – Вторая временная диаграмма

Обоснование эргоичности позволяет заменить проведение большого количества образцов на эквивалентное более длительное испытание изделий, представляющих элементы обмоток мощного энергетического оборудования [5].

Пример автокорреляционной функции приведен на рисунке 9.

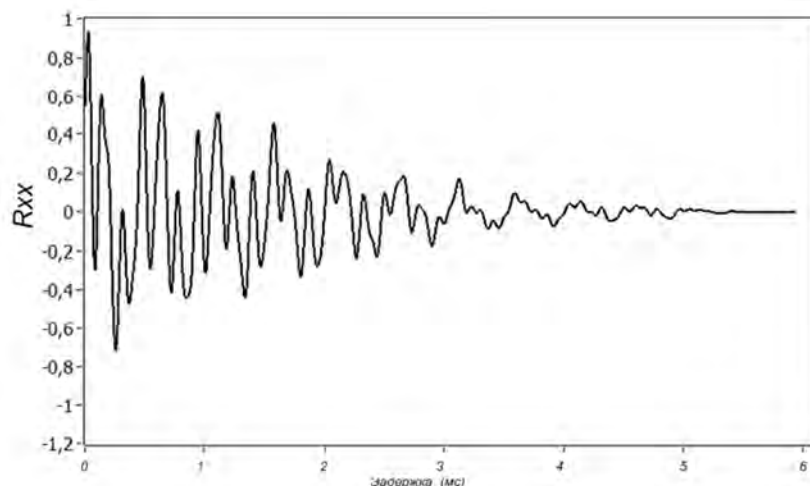


Рисунок 9 – Автокорреляционная функция процесса вибрации

Результаты зависимости пиковых значений вибрации в осевом направлении в центре образцов диаметром 3 мм от величины тока для различных металлов приведены на рисунке 10.

Более высокие уровни вибрационного отклика типичны и для образцов из металлов с более высокой плотностью, для рассматриваемой группы металлов с близкими магнитными свойствами.

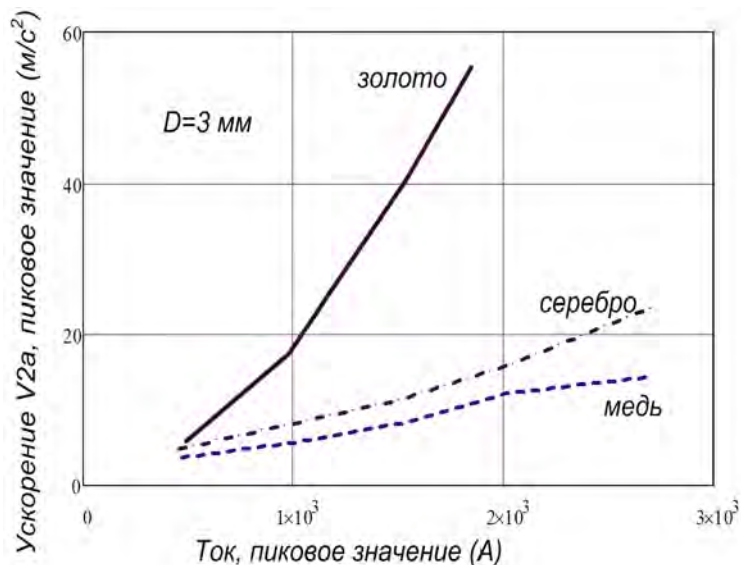


Рисунок 10 – Зависимости пиковых значений вибрации в осевом направлении от величины тока для различных металлов

Представленные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. Во время активного действия импульса тока пиковые значения амплитуды ускорения вибрационного отклика близки к моментам максимального значения производной значения магнитного поля.
2. При постоянной амплитуде импульсов тока пиковое значение вибрационного отклика больше для образцов с меньшим диаметром и для материалов с более высокой удельной плотностью.
3. При постоянной амплитуде плотности тока пиковое значение ускорения вибрационного отклика больше для образцов с меньшим диаметром поперечного сечения.

**Заключение.** Полученные результаты указывают на сложный характер механизма возбуждения механических колебаний в металлических проводниках при пропускании импульсов тока высокой плотности и это необходимо учитывать в исследованиях по циклической прочности элементов мощного электрооборудования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федосов, В.П. Цифровая обработка звуковых и вибросигналов в LabView. Справочник функций системы NI Sound and Vibration LabVIEW / В.П. Федосов. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 1296 с.
2. Троицкий, О.А. Физические основы и технологии обработки современных материалов (теория, технологии, структура и свойства), том 1 и том 11 / О.А. Троицкий. – Москва – Ижевск: АНО ИКИ, 2004 г., 563 стр. и 467 с.
3. Троицкий, О.А. Пластическая деформация металла, вызванная пинч-эффектом / О.А. Троицкий // Изв. АН СССР. – 1977. – № 6. – С. 118 – 122.
4. Sofronas, Anthony. Case histories in vibration analysis and metal fatigue for the practicing Engineer / Anthony Sofronas. – John Wiley & Sons, Inc., 2012. – 295 p.
5. Nový, F. Ultra long fatigue life of structural materials / F. Nový, O. Bokůvka, L. Kunz, G. Nicoletto. – URL: [http://das.tuwien.ac.at/fileadmin/mediapool-das/Diverse/Publications/BoA\\_Siofok/files/p031.pdf](http://das.tuwien.ac.at/fileadmin/mediapool-das/Diverse/Publications/BoA_Siofok/files/p031.pdf).

**Троицкий Олег Александрович**  
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,  
Доктор технических наук,  
профессор, главный научный  
сотрудник  
101990, Москва, Малый  
Харитоньевский переулок, 4  
E-mail: oatroitsky@rambler.ru

**Сташенко Владимир Иванович**  
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, 101990,  
кандидат физико-математических  
наук, ведущий научный сотрудник  
Москва, Малый Харитоньевский  
переулок, 4  
E-mail: vis20-11@rambler.ru

**Скворцов Олег Борисович**  
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, 101990,  
кандидат технических наук,  
старший научный сотрудник  
Москва, Малый Харитоньевский  
переулок, 4  
E-mail: skv@balansmash.ru

O.A. TROITSKY, V.I. STASHENKO, O.B. SKVORTSOV

## EFFECT OF MATERIAL SAMPLES OF DURATION PULSES AND AMPLITUDE OF THE CURRENT ON THE VALUE OF THE INTRINSIC MAGNETIC FIELD OF THE CURRENT AND VIBRATION CIRCULAR PATTERN FROM PINCH OF CURRENT

*The paper discusses the control of vibration in various parts of the metal sample by passing current pulses therethrough. The measurements were carried out simultaneously in several three-way vibration sensors.*

**Keywords:** vibration, pinch effect, the magnetic field, a current pulse.

## BIBLIOGRAPHY

1. Fedosov, V.P. Tsifrovaya obrabotka zvukovykh i vibrosignalov v LabView. Spravochnik funktsiy sistemy NI Sound and Vibration LabVIEW / V.P. Fedosov. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 1296 с.
2. Troitskiy, O.A. Fizicheskiye osnovy i tekhnologii obrabotki sovremennykh materialov (teoriya, tekhnologii, struktura i svoystva), tom 1 i tom 11 / O.A. Troitskiy. – Moskva – Izhevsk: ANO IKI, 2004 g., 563 str. i 467 s.
3. Troitskiy, O.A. Plasticheskaya deformatsiya metalla, vyzvannaya pinch-effektom / O.A. Troitskiy // Izv. ANSSSR. – 1977. – № 6. – S. 118 – 122.
4. Sofronas, Anthony. Case histories in vibration analysis and metal fatigue for the practicing Engineer / Anthony Sofronas. – John Wiley & Sons, Inc., 2012. – 295 p.
5. Nový, F. Ultra long fatigue life of structural materials / F. Nový, O. Bokůvka, L. Kunz, G. Nicoletto. – URL: [http://das.tuwien.ac.at/fileadmin/mediapool-das/Diverse/Publications/BoA\\_Siofok/files/p031.pdf](http://das.tuwien.ac.at/fileadmin/mediapool-das/Diverse/Publications/BoA_Siofok/files/p031.pdf).

**Troitsky Oleg Aleksandrovich**  
Institute of Mechanical Engineering  
A.A. Blagonravova RAS  
Doctor of Technical Sciences,  
Professor, Chief Researcher  
101990, Moscow, Small  
Kharitonievsky Lane, 4  
E-mail: oatroitsky@rambler.ru

**Stashenko Vladimir Ivanovich**  
Institute of Mechanical Engineering  
A.A. Blagonravova RAS  
Candidate of Physical and  
Mathematical Sciences, Senior  
Researcher  
101990, Moscow, Small Kharitonievsky  
Lane, 4  
E-mail: vis20-11@rambler.ru

**Skvortsov Oleg Borisovich**  
Institute of Mechanical Engineering  
A.A. Blagonravova Russian Academy  
of Sciences,  
Ph.D., Senior Research Associate  
101990, Moscow, Small  
Kharitonievsky Lane, 4  
E-mail: skv@balansmash.ru

УДК 531.7, 681.2.08

Д.Ю. БОГОМОЛОВ, В.В. ПОРОШИН, О.В. ПОРОШИН

## МОРФОЛОГИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ТОПОГРАФИИ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*Рассмотрены вопросы практического использования методов цифровой морфологической фильтрации для контроля топографии поверхности элементов механических систем. Представлены результаты программной реализации цифровых морфологических пространственных фильтров для трёхмерной параметрической оценки геометрии поверхности.*

**Ключевые слова:** цифровая фильтрация, математическая морфология, топография поверхности, трёхмерная оценка.

Динамика, надежность и долговечность механических систем во многом определяются качеством поверхностного слоя их элементов, для оценки которого традиционно используются количественный анализ топографии поверхности на основе вычисления ее геометрических параметров. Одним из важнейших этапов вычисления геометрических параметров является выделение конкретного вида неровностей (волнистости, шероховатости, субшероховатости) с помощью цифровых фильтров.

**Цель работы:** разработка новых эффективных цифровых фильтров и анализ их характеристик. Цель обусловлена происходящим в настоящее время переходом от двухмерного анализа топографии поверхности к трехмерному, одной из вех которого является принятие в 2012 г. международного стандарта по трехмерной оценке топографии поверхности ISO 25178. В настоящее время в техническом комитете ИСО/ТК 213 ведутся работы по созданию 10 новых стандартов пространственной цифровой фильтрации.

**Морфологическая фильтрация текстуры поверхности.** Все описанные в стандартах фильтры условно подразделяются на три основные группы – линейные, робастные и морфологические. Линейные фильтры предполагают использование линейного преобразования, записанного в виде матричного уравнения. Главным их достоинством является естественная направленность на преобразование частотных характеристик топографии поверхности и возможность построения передаточной характеристики. К недостаткам относятся существенные искажения на краях (end effects), низкая эффективность подавления элементов отклонения формы и аномальных локальных выбросов (outliers), искажение наклона элементов неровностей (skewed surface). Робастные фильтры позволяют бороться как с отклонениями формы, так и с аномальными локальными выбросами. Однако вычислительные затраты при их использовании крайне высоки, даже в случае двумерного профильного анализа. Данный недостаток робастных фильтров существенно ограничивает область их практического применения при трёхмерном анализе.

Принципиально иной подход к цифровой фильтрации, ориентированный на взаимодействие с отдельными элементами неровностей, реализуют морфологические цифровые фильтры. Использование морфологических методов позволяет создавать фильтры, позволяющие отделять вершины от впадин, определять характерный масштаб неровностей поверхности и проводить её разбиение на отдельные элементы (segmentation). Конкретная область применения морфологических фильтров пока является предметом дискуссии, однако, в комбинации с линейными фильтрами, они позволяют избавиться от большинства присущих последним недостатков.

Морфологические подходы используются при измерении и анализе геометрии неровностей поверхности, начиная с первых автоматизированных приборов. В частности, измерение поверхности с помощью механического щупа является морфологической операцией, на результат которой существенно влияют его форма и размер [1]. Идея использования аналогичного подхода для разделения волнистости и шероховатости была предложена Г. Вайнграбером под названием Е-Системы [2]. Интересы к данной идее возродились с появлением и активным развитием в 1980-х годах математической морфологии. Одна из традиционных областей использования морфологических фильтров – анализ дефектов на поверхности, в том числе с использованием многомасштабного подхода [3]. Другое важное применение сегментация поверхности для локализации вершин или впадин на поверхности и определения их характерных размеров. Перспективным

направлением развития морфологических методов в метрологии качества поверхности является использование так называемых альфа-оболочек [4].

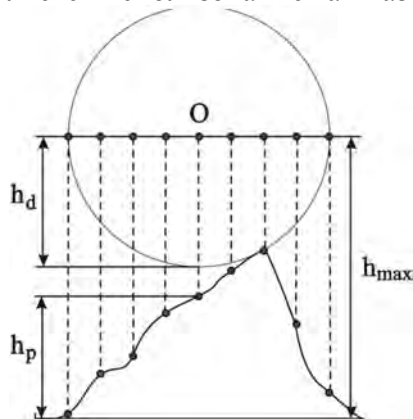


Рисунок 1 – Морфологический структурный элемент сферической формы

Математическая морфология представляет собой особую технику обработки и анализа геометрических структур, основанную на их последовательном сканировании с помощью специального геометрического шаблона, называемого структурным элементом. Последовательное наложение структурного элемента в каждой точке осуществляется с использованием одной из базовых морфологических операций. При анализе изображений в качестве структурного элемента чаще всего выступает прямоугольник (box), круг (disk) или кольцо (ring). В метрологии поверхности в качестве структурного элемента чаще всего используется вертикально расположенный плоский диск (в двумерном случае) или сфера (в трёхмерном случае), как показано на рисунке 1. Помимо плоского диска (circular disk) в двумерном случае используют горизонтально расположенный отрезок (horizontal line segment). В трёхмерном случае в качестве аналога горизонтального отрезка можно использовать горизонтально расположенный плоский диск или квадрат.

В метрологии поверхности используются два типа базовых операций – наращивание  $D$  и эрозия  $E$ . Операция наращивания реализуется построением кривой, которая описывается центром структурного элемента  $S$  при его последовательном прокатывании над исходной поверхностью  $A$  [5]:

$$D(A, S) = A \oplus S^{\sim}, \quad (1)$$

где оператор  $\sim$  означает зеркальное отражение относительно горизонтальной плоскости. Эрозия реализуется прокатыванием структурного элемента под исходной поверхностью [5]:

$$E(A, S) = (A^{\sim} \oplus S)^{\sim}. \quad (2)$$

Существенным недостатком базовых морфологических операций является вертикальное смещение результата относительно исходной поверхности. Для подавления данного эффекта используются производные морфологические операции – замыкание (closing) и размыкание (opening). Операция замыкания  $\bullet$  представляет собой простейший морфологический фильтр. Она реализуется как комбинация двух базовых морфологических операций – наращивания и последующей эрозии [5]:

$$C(A, S) = A \bullet S = E(D(A, S), S). \quad (3)$$

При замыкании подавляются глубокие царапины и канавки на поверхности, в то же время все выступы сохраняются, что имеет практический интерес при анализе уплотняющей способности и триботехнических свойств поверхности. Двойственная к замыканию операция размыкания  $\circ$  представляет собой комбинацию эрозии и последующего наращивания [5]:

$$O(A, S) = A \circ S = D(E(A, S), S). \quad (4)$$

Эта операция обладает противоположными эффектами – подавляет выступы, но оставляет царапины и канавки на поверхности, что требуется при изучении смазочных свойства или долговечность покрытия.

С помощью последовательной комбинации замыкания и размыкания могут быть получены более сложные последовательно чередующиеся фильтры. Если замыкание и размыкание в последовательно чередующемся фильтре реализуются с одинаковым типом и размером структурного элемента, то такой фильтр называется симметричным. Асимметричные последовательно чередующиеся фильтры позволяют добиться сильного подавления царапин и совсем незначительного подавления выступов или наоборот.

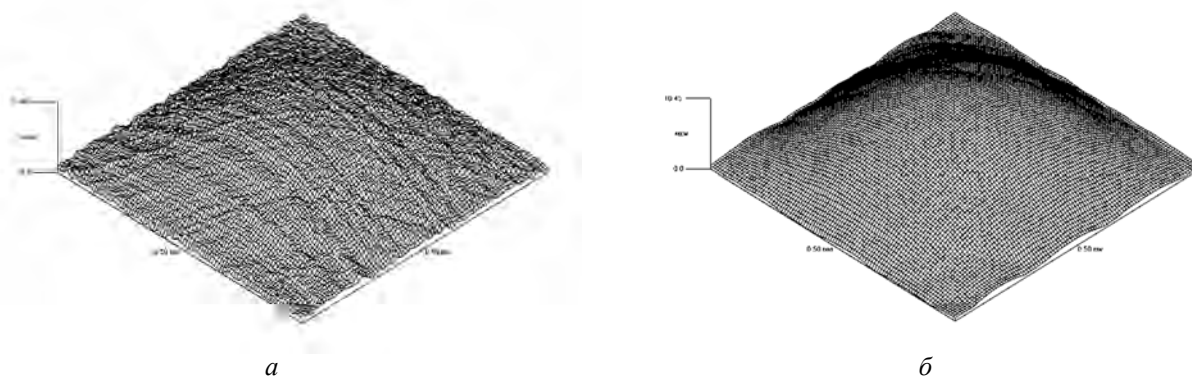
**Практическая реализация.** Основные методы морфологической фильтрации текстуры поверхности были реализованы и апробированы в программном продукте, позволяющем проводить численные исследования пространственных фильтров текстуры поверхности как на реальных поверхностях, полученных в результате измерения, так и на модельных поверхностях, построенных согласно композиционной модели:

$$\eta(x, y) = \eta_{\alpha}(x, y) + \eta_{\beta}(x, y) + \eta_{\gamma}(x, y), \quad (5)$$

где  $\eta(x, y)$  – топография шероховатости поверхности;  
 $\eta_\alpha(x, y)$  – волновая составляющая шероховатости;  
 $\eta_\gamma(x, y)$  – изотропная Гауссовская составляющая шероховатости;  
 $\eta_\delta(x, y)$  – единичный локальный дефект.

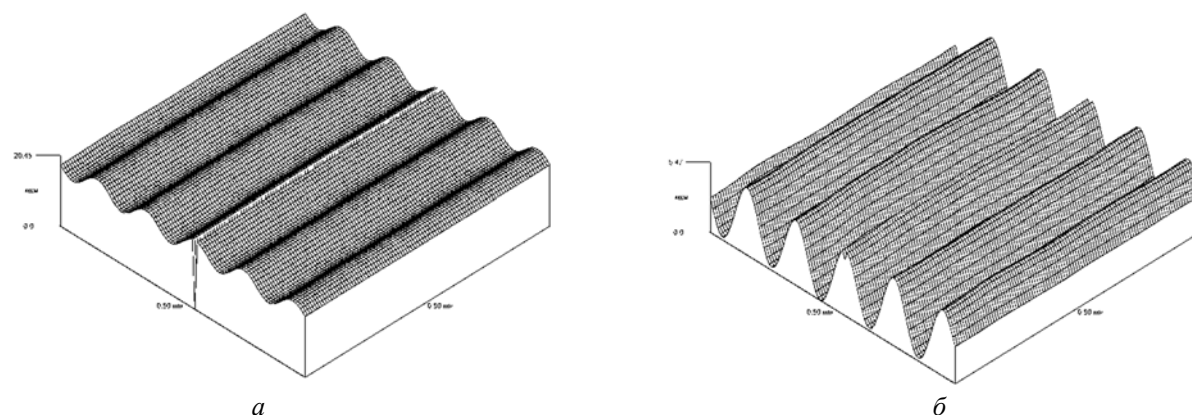
Волновая составляющая  $\eta_\alpha(x, y)$  моделируется с помощью синусоиды с заданными шагами, фазами и амплитудой. Гауссовская составляющая  $\eta_\gamma(x, y)$  представляет собой нормальный эргодический случайный процесс с равным нулю средним значением. Локальный дефект может быть изотропным параболической, синусоидальной, пирамидальной или конической формы с заданными размерами и положением центра. Также, возможна генерация протяженного анизотропного дефекта (царапины) синусоидального, параболического или треугольного сечения.

На рисунке 2 представлены результаты подавления морфологическим фильтром отклонения формы поверхности амплитудой 10 мкм, смоделированного с помощью синусоиды с большим шагом, с наложенной на него Гауссовской составляющей. Фильтрация осуществлялась с помощью размыкающего морфологического фильтра со сферическим структурным элементом. Погрешность формы удалось снизить до 600 нм при радиусе шарика 2 мм.



**Рисунок 2 – Фильтрация формы морфологическим размыкающим фильтром:**  
*а – исходная поверхность; б – результат фильтрации*

На рисунке 3 представлены результаты подавления морфологическим фильтром царапины высотой 20 мкм на регулярной поверхности с наложенной Гауссовской составляющей общей амплитудой 5.47 мкм. Фильтрация осуществлялась с помощью замыкающего морфологического фильтра со сферическим структурным элементом. Амплитуду остаточного следа царапины удалось снизить до 700 нм при радиусе шарика 50 мкм.



**Рисунок 3 – Фильтрация царапины морфологическим замыкающим фильтром:**  
*а – исходная поверхность; б – результат фильтрации*

**Выводы.** Представленные результаты практической реализации морфологических методов фильтрации позволяют сделать вывод об их применимости и эффективности для пространственной фильтрации в общей текстуре поверхности элементов формы или

единичных локальных дефектов, таких как царапина. Они могут послужить основой для развития стандартизации методов и средств измерения трёхмерной текстуры поверхности как продолжение работ по стандартизации 3D метрии текстуры поверхности.

*Исследования проводились при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания за 2014–2016 г.г., проект 2080.*

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Уайтхауз, Д. Метрология поверхностей. Принципы, промышленные методы и приборы. / Д. Уайтхауз, пер. с англ. – М.: Интеллект, 2009. – 472 с.
2. Von Weingraber, H. Über die eignung des hullprofils als bezugslinie für messung der rauheit // Annals of CIRP. – 1956. – № 5. – p.p. 116–28.
3. Scott, P.J. Scale-space techniques / P.J. Scott // Proceedings of the X International Colloquium on Surfaces. – 2000. – p.p. 153–161.
4. Jiang, X. Morphological method for surface metrology and dimensional metrology based on the alpha shape. / X. Jiang, S. Lou, P. J. Scott // Measurement Science and Technology. – 2012. – Vol. 23. – № 1. p.p. 015003.
5. Krystek, M. Morphological filters in surface texture analysis / M. Krystek. // XI-th international colloquium on surfaces. – Chemnitz. – Germany. – 2004. – p.p. 43–55.

**Богомолов Дмитрий Юрьевич**  
ФГБОУ ВО «Московский  
государственный  
машиностроительный университет  
(МАМИ)»,  
г. Москва  
Кандидат технических наук,  
доцент «Центра математического  
образования»,  
107023, г. Москва, ул. Б.  
Семеновская, 38  
Тел.: +79165075098  
E-mail: bogom-ov@mail.ru

**Порошин Валерий Владимирович**  
ФГБОУ ВО «Московский  
государственный  
машиностроительный университет  
(МАМИ)»,  
г. Москва  
доктор технических наук, ведущий  
научный сотрудник,  
107023, г. Москва, ул. Б.  
Семеновская, 38  
Тел.: +79161550270  
E-mail: vporoshyn@mail.ru

**Порошин Олег Валерьевич**  
ФГБОУ ВО «Московский  
государственный  
машиностроительный университет  
(МАМИ)»,  
г. Москва  
аспирант,  
107023, г. Москва, ул. Б.  
Семеновская, 38  
Тел.: +79164221345  
E-mail: mr.cln@yandex.ru

---

D.Yu. BOGOMOLOV, V.V. POROSHIN, O.V. POROSHIN

### **MORPHOLOGICAL FILTERING FOR CONTROL THE SURFACE TEXTURE OF MECHANICAL SYSTEM ELEMENTS**

*The aspects of practical usage of digital morphology filtration methods in surface topography measurement devices are described. The results of the software realization of digital morphology spatial filters for 3D parametrical analysis of surface geometry are shown.*

**Keywords:** digital filtering, mathematical morphology, surface texture, 3D analysis.

### **BIBLIOGRAPHY**

1. Uaytkhauz. D. Metrologiya poverkhnostey. Printsipy, promyshlennyye metody i pribory. / D.Uaytkhauz, per. s angl. – M.: Intellekt, 2009. – 472 s.
2. Von Weingraber, H. Über die eignung des hullprofils als bezugslinie für messung der rauheit // Annals of CIRP. – 1956. – № 5. – p.p. 116–28.
3. Scott, P.J. Scale-space techniques / P.J. Scott // Proceedings of the X International Colloquium on Surfaces. – 2000. – p.p. 153–161.
4. Jiang, X. Morphological method for surface metrology and dimensional metrology based on the alpha shape. / X. Jiang, S. Lou, P. J. Scott // Measurement Science and Technology. – 2012. – Vol. 23. – № 1. p.p. 015003.
5. Krystek, M. Morphological filters in surface texture analysis / M. Krystek. // XI-th international colloquium on surfaces. – Chemnitz. – Germany. – 2004. – p.p. 43–55.

**Bogomolov Dmitry Yuryevich**  
Federal state funded educational  
institution of high education  
«Moscow state university of  
mechanical engineering (MAMI)»,  
PhD, associate professor of «Center  
of Math education»,  
107023, Moscow, B. Semenovskaya, 38  
Tel.: +79165075098  
E-mail: bogom-ov@mail.ru

**Poroshin Valery Vladimirovich**  
Federal state funded educational  
institution of high education «Moscow  
state university of mechanical  
engineering (MAMI)»,  
Doctor of Techn. Science, scientist  
leader,  
107023, Moscow, B. Semenovskaya, 38  
Tel.: +79161550270  
E-mail: vporoshyn@mail.ru

**Poroshin Oleg Valeryevich**  
Federal state funded educational  
institution of high education «Moscow  
state university of mechanical  
engineering (MAMI)»,  
Postgraduate,  
107023, Moscow, B. Semenovskaya, 38  
Tel.: +79164221345  
E-mail: mr.cln@yandex.ru

УДК 656.61.08

А.Ю. ГАРШИН

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДИАГНОСТИРОВАНИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЧЕЛОВЕКОМАШИННЫХ СИСТЕМ ПУТЕМ АНАЛИЗА СОГЛАСОВАННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЕЗОШИБОЧНОСТИ, ВРЕМЕНИ, БЕЗДЕФЕКТНОСТИ И БЕЗАВАРИЙНОСТИ

*Исследован процесс диагностирования и восстановления человекомашинных систем морских критических инфраструктур на функциональных структурных моделях путем анализа комплекса согласованных показателей безошибочности, времени, бездефектности и безаварийности.*

**Ключевые слова:** морская критическая инфраструктура, послеаварийная ситуация, эргатические функциональные структурные модели, согласованные показатели безошибочности, времени, бездефектности и безаварийности.

Предоставляя людям новые, ещё вчера недоступные возможности, современная техника вместе с тем зачастую создает для них и новые опасности, предпосылки аварий и несчастных случаев. Статистика аварийности кораблей и судов мирового флота, буровых платформ свидетельствует, что около 80% всех аварий происходит из-за ошибок и просчетов людей. По некоторым данным численность плавсостава мирового флота оценивается примерно в полтора миллиона, при этом в море одновременно находится более миллиона моряков. Поэтому столь важно сфокусировать внимание на человеческом факторе и рассматривать роль человека как решающую в системе морской безопасности.

Морские Критические инфраструктуры (МКИ), к которым относятся суда, корабли, буровые платформы, представляет собой большие автономные системы искусственного происхождения и различного функционального назначения. Они являются объектами многогранных опасностей и угроз (антропогенных, физических, природных, информационных и др.) связанных с выполняемой деятельностью, с риском для их функционирования, для окружающей среды и других инфраструктур.

МКИ высокодинамичные и комплексные системы. Они воспринимаются как «системы, составленные из систем». Негативные последствия реализации существующих опасностей и угроз часто приобретают эффект каскадного характера, они не имеют одного хозяина (оператора), единых регуляторных инструментов, имеют разные целевые направления, их функционирование определено разными, часто противоположными нормами и принципами.

Судовой технический объект (техническое средство) будем рассматривать в качестве элемента морской критической инфраструктуры.

Задача специалистов, эксплуатирующих судовые технические средства, заключается как в определении математической меры безопасности (такая мера необходима специалистам по проектированию сложных систем МКИ), так и в определении конкретных практических мер защиты систем МКИ от перехода в опасные состояния.

Сложность систем МКИ и ограничение возможности экспериментального исследования требует использования системного подхода как основного научного метода исследования с составными элементами – системный анализ и синтез. Основным инструментом системного подхода является моделирование опасных процессов для выявления уязвимости объектов критической морской инфраструктуры. Итерационная исследовательская схема начинается проблемно-ориентированным описанием объектов и исследовательских целей, продолжается системным анализом разрабатываемых моделей и оканчивается синтезом возможных последствий проявления уязвимостей. После этого выполняются рекомендованные возможные изменения в исследованных процессах для определения их отражений в протекающих состояниях объектов критической морской

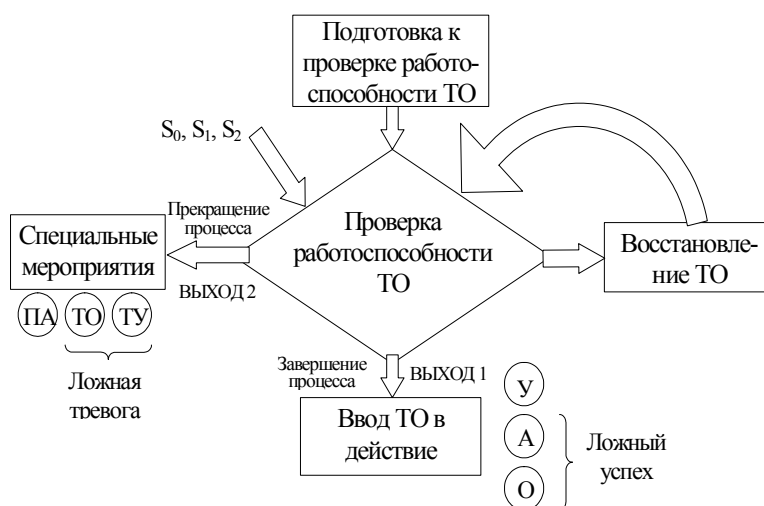


инфраструктуры. Процесс продолжает до достижения установленных параметров безопасности [1, 4, 5].

Ранее математические модели проверки работоспособности и восстановления систем, и технических объектов при ликвидации последствий повреждений и аварий, разрабатывались на базе бинарных моделей. В этих моделях учитывается два состояния объекта (1 – работоспособен, 2 – неработоспособен) и два исхода деятельности (решения задачи) (1 – без ошибки, 2 – с ошибкой). Разработана математическая модель, которая учитывает три состояния объекта после воздействия опасных факторов аварии (1 – работоспособен, 2 – обычный дефект, 3 – аварийно–опасный дефект) и вектора возможных исходов деятельности (решения задачи): успех, аварийная ошибка, обычная ошибка, предупреждение аварии, тревога по обычной ошибке, тревога при успехе.

Перед авторами статьи стояла задача получения численной оценки уровня опасности судового технического объекта как элемента морской критической инфраструктуры.

Подобная задача решена нами путем разработки функциональных структурных математических моделей процесса проверки работоспособности с восстановлением корабельных систем и технических средств при ликвидации последствий повреждений и аварий [6]. Причем, оценка эффективности действий в такой послеаварийной ситуации достаточно адекватно выполнена с использованием разработанных триарных моделей, позволяющих выделить аварийноопасный дефект, аварийноопасную ошибку и количественно их оценить.



**Рисунок 1 – Структура процесса проверки работоспособности и восстановления критически важного технического объекта**

На рисунке 1 представлена структура процесса проверки работоспособности и восстановления критически важного технического объекта (ТО) – объекта морской критически важной инфраструктуры, определяющий состояние ее функциональности.

Диагностируемый ТО может иметь аварийноопасные дефекты, обычные устранимые (неаварийноопасные) дефекты или быть работоспособным с соответствующими вероятностями  $S_0, S_1, S_2$ . При проверке работоспособности принимается одно из трех решений: объект работоспособен и он вводится в действие; объект имеет аварийноопасный дефект, восстановлению в корабельных условиях не подлежит; объект имеет устранимый дефект, восстанавливается с последующей повторной проверкой работоспособности. В зависимости от принятого решения процесс может быть завершен (выход 1) или прекращен (выход 2). Завершение рассматриваемого процесса связано с переходом к последующим действиям по борьбе за живучесть. Прекращение его выполнения связано с отказом от решения поставленной задачи и переходу к специальным мероприятиям.

Нами учтены три вероятных исхода по каждому выходу:

–по выходу 1:

У – успех (ввод в действие работоспособного объекта),

А – авария (ввод в действие ТО с аварийноопасным дефектом приведет к аварии),

О – ввод в действие объекта с обычным устранимым дефектом, что не приведет, или не сразу приведет к аварии,

–по выходу 2:

ПА – предупреждение аварии,

ТО – тревога по обычному дефекту (отказ от решения поставленной задачи при неаварийноопасном устранимом дефекте),

ТУ – тревога при успехе (отказ от решения поставленной задачи при работоспособном объекте).

Каждому возможному исходу соответствует своя вероятность его появления (1), математические ожидания (2, 3) и дисперсии времени появления [6]. При выводе расчетных зависимостей для них использован метод основных соединений.

$$\left. \begin{aligned} P_y &= \frac{D^{22}}{1-D^{21}} \left( S_0 \frac{D^{01}B_0}{1-D^{01}B_0^*} + S_1 \frac{D^{11}B_1}{1-D^{11}B_1^*} + S_2 \right) \\ P_A &= S_0 \frac{D^{02}}{1-D^{01}B_0^*} \\ P_O &= S_1 \frac{D^{12}}{1-D^{11}B_1^*} \\ P_{ПА} &= S_0 \frac{D^{00}}{1-D^{01}B_0^*} \\ P_{ТО} &= S_1 \frac{D^{10}}{1-D^{11}B_1^*} \\ P_{ТУ} &= \frac{D^{20}}{1-D^{21}} \left( S_0 \frac{D^{01}B_0}{1-D^{01}B_0^*} + S_1 \frac{D^{11}B_1}{1-D^{11}B_1^*} + S_2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Математические ожидания времени до выхода из процесса с соответствующими исходами выглядят следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} m_y &= \frac{D^{22}}{P_y(1-D^{21})} \left[ S_0 \frac{D^{01}B_0}{1-D^{01}B_0^*} (A_{10} + A) + S_1 \frac{D^{11}B_1}{1-D^{11}B_1^*} (A_{11} + A) + S_2 A \right] \\ m_A &= \frac{1}{1-D^{01}B_0^*} [D^{01}B_0^* (m_{ДН,0} + m_{ВН,0}) + (1-D^{01}B_0^*) m_{ДН,0}] \\ m_O &= \frac{1}{1-D^{11}B_1^*} [D^{11}B_1^* (m_{ДН,1} + m_{ВН,1}) + (1-D^{11}B_1^*) m_{ДН,1}] \\ m_{ПА} &= \frac{1}{1-D^{01}B_0^*} [D^{01}B_0^* (m_{ДН,0} + m_{ВН,0}) + (1-D^{01}B_0^*) m_{ДН,0}] \\ m_{ТО} &= \frac{1}{1-D^{11}B_1^*} [D^{11}B_1^* (m_{ДН,1} + m_{ВН,1}) + (1-D^{11}B_1^*) m_{ДН,1}] \\ m_{ТУ} &= \frac{D^{20}}{P_{ТУ}(1-D^{21})} \left[ S_0 \frac{D^{01}B_0}{1-D^{01}B_0^*} (A_{10} + A) + S_1 \frac{D^{11}B_1}{1-D^{11}B_1^*} (A_{11} + A) + S_2 A \right] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} A_{10} &= \frac{1}{1 - D^{01} B_0^*} (m_{ДН,0} + m_{ВН,0}) \\ A_{11} &= \frac{1}{1 - D^{11} B_1^*} (m_{ДН,1} + m_{ВН,1}) \\ A &= \frac{1}{1 - D^{21}} (m_{ДН} + q_2 m_{ВН}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Исходными данными (варьируемыми параметрами) для расчета являются:

$S_0, S_1, S_2$  – вероятности аварийного, обычного дефекта или работоспособного состояния объекта,

$D^{ij}$  – условные вероятности правильных и ошибочных решений (фактическое состояние объекта  $i = 0, 1, 2$ ; решение о его состоянии  $j = 0, 1, 2$ ),

$B_0$  – вероятность восстановления объекта с аварийным дефектом за один восстановительный цикл,

$B_1$  – эта же характеристика для объекта с обычным дефектом;

$m_{ДН}, m_{ДИ}$  – математические ожидания времени проверки неработоспособного и работоспособного объекта соответственно,

$m_{ВН}, m_{ВИ}$  – математические ожидания времени восстановления неработоспособного и работоспособного объекта соответственно.

Небезынтересным являются выполненные исследования [6] зависимостей:  $P_y$  – вероятность успеха;  $P_A$  – вероятность аварийной ситуации;  $P_{ПА}$  – вероятность предупреждения аварии от условной вероятности неправильного диагностирования  $D^{02}$ .

Таким образом, исследуя взаимосвязь входных характеристик и выходных показателей на разработанной модели, можно выработать практические рекомендации по повышению живучести судов и буровых платформ как МКИ, эффективности эксплуатации технических средств, совершенствовании средств их технического диагностирования и восстановления, технологического процесса в целом.

Применение апробированного в широких приложениях аппарата теории вероятности и теории графов и сравнение показателей эффективности алгоритма действий при варьировании исходных данных подтвердило работоспособность разработанных моделей и чувствительность методики к изменению входных данных.

Использование этого подхода в практике создания судовых систем, как элемента МКИ, исследовании эффективности борьбы за живучесть и эксплуатации судовых технических средств позволит количественно оценивать и, главное, уменьшать вероятность аварийных ситуаций (снижать уровень риска) за счет выявления критических фрагментов алгоритмов функционирования судовых систем и снижения или устранения их критичности – способности порождать аварийные ситуации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харченко, В.С. Безопасность критических инфраструктур: математические и инженерные методы анализа и обеспечения / В.С. Харченко. – Харьков: Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. – 641 с.
2. Голубев, В. Безопасное мореплавание – чище океан / В. Голубев // Судостроение. – 1998. – № 1–2. – С 24.
3. Van Vuuren, W. The influence of safety culture on risks management / W. Van Vuuren, T.W. van der Schaf // Proc. Tenth European Conf. on Safety and Reliability. – Rotterdam. – 1999. – Vol. 2. – p.p. 1261–1265.
4. Харченко, В.С. Гарантоспособные системы и многоверсионные вычисления: аспекты эволюции / В.С. Харченко // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – Харьков: ХАИ. – 2009. – № 7. – С. 46–59.
5. Avizienis, A. Basic Concepts and Taxonomy of Dependable and Secure Computing / A. Avizienis, J.-C. Laprie, B. Randell, C. Landwehr // IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing. – 2004. – vol. 1. – № 1. – p.p. 11–33.

6. Чабаненко, П.П. Оценка эффективности процессов диагностирования и восстановления судовых объектов в целях снижения их аварийности / П.П. Чабаненко, А.Ю. Гаршин // Сб. научн. тр. СевГТУ. Оптимизация производственных процессов. – Севастополь: СевГТУ. – 1999. – Вып. 2. – С. 138–144.

**Гаршин Александр Юрьевич**

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», г. Севастополь  
кандидат технических наук, доцент кафедры энергоустановок морских судов и сооружений  
299053, г. Севастополь, ул. Университетская, 33  
Тел.: +78692243561  
E-mail: aleksander.garshin@mail.ru

---

A.Yu. GARSHIN

**STUDY OF THE PROCESS OF DIAGNOSIS AND REHABILITATION  
OF MAN–MACHINE SYSTEMS THROUGH ANALYSIS OF AGREED  
INDICATORS, THE ABSENCE OF FLAWLESSNESS TIME DEFECT  
AND FAULT TOLERANCE**

*The process of diagnosis and rehabilitation of man–machine systems, maritime critical infrastructure on functional structural models by analyzing a set of agreed indicators inerrancy, time, lack of defects and safety.*

**Keywords:** *maritime critical infrastructure, the situation after the accident, ergatic technical functional structural models, the agreed indicators, the absence of flawlessness time defect and fault tolerance.*

**BIBLIOGRAPHY**

1. Kharchenko, V.S. Bezopasnost kriticheskikh infrastruktur: matematicheskiye i inzhenernyye metody analiza i obespecheniya / V.S. Kharchenko. – Kharkov: Natsionalnyy aerokosmicheskiiy universitet im. N.Ye. Zhukovskogo «KHAI», 2011. – 641 s.
2. Golubev, V. Bezopasnoye moreplavaniye – chishche okean / V. Golubev // Sudokhodstvo. – 1998. – № 1–2. – S 24.
3. Van Vuuren, W. The influence of safety culture on risks management / W. Van Vuuren, T.W. van der Schaf // Proc. Tenth European Conf. on Safety and Reliability. – Rotterdam. – 1999. – Vol. 2. – p.p. 1261–1265.
4. Kharchenko, V.S. Garantoposobnyye sistemy i mnogoversionnyye vychisleniya: aspekty evolyutsii / V.S. Kharchenko // Radioelektronni i kompyuterni sistemi. – Kharkov: KHAI. – 2009. – № 7. – S. 46–59.
5. Avizienis, A. Basic Concepts and Taxonomy of Dependable and Secure Computing / A. Avizienis, J.–C. Laprie, B. Randell, C. Landwehr // IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing. – 2004. – vol. 1. – № 1. – p.p. 11–33.
6. Chabanenko, P.P. Otsenka effektivnosti protsessov diagnostirovaniya i vosstanovleniya sudovykh obyektov v tselyakh snizheniya ikh aviynosti / P.P. Chabanenko, A.YU. Garshin // Sb. nauchn. tr. SevGTU. Optimizatsiya proizvodstvennykh protsessov. – Sevastopol: SevGTU. – 1999. – Vyp. 2. – S. 138–144.

**Garshin Aleksandr Yuryevich**

Sevastopol State University,  
Ph.D., Associate Professor of the Department «Ship power plants and structures»,  
Sevastopol, Universitetskaya, 33  
Tel. +78692243561  
E-mail: aleksander.garshin@mail.ru

**Уважаемые авторы!**  
**Просим Вас ознакомиться с основными требованиями**  
**к оформлению научных статей**

- Объем материала, предлагаемого к публикации, измеряется страницами текста на листах формата А4 и содержит от 4 до 10 страниц; все страницы рукописи должны иметь сплошную нумерацию.

- Статья предоставляется в 1 экземпляре на бумажном носителе и в электронном виде (по электронной почте или на любом электронном носителе).

- Водном сборнике может быть опубликована только **одна** статья **одного** автора, включая соавторство.

- Параметры набора. Поля: зеркальные, верхнее, левое, правое – 2 см, нижнее – 1,6 см, переплет – 0. Отступы до колонтитулов: верхнего – 1,25 см, нижнего – 0,85 см. Текст набирается в одну колонку, шрифт – Times New Roman, 12 пт. Отступ первой строки абзаца – 1,25 см. Выравнивание – по ширине. Междустрочный интервал – единичный. Включить автоматический перенос. Все кавычки должны быть угловыми (« »). Все символы «тире» должны быть среднего размера («–», а не «-»). Начертание цифр (арабских, римских) во всех элементах статьи – прямое (не курсив).

- Структура статьи:

УДК:

Список авторов на русском языке – **12 пт, ВСЕ ПРОПИСНЫЕ** в формате И.О. ФАМИЛИЯ **по центру без абзацного отступа**;

Название (не более 15 слов) на русском языке – **14 пт, полужирным, ВСЕ ПРОПИСНЫЕ по центру без абзацного отступа**;

Аннотация (не менее 200–250 слов) на русском языке – **10 пт, курсив**;

Ключевые слова на русском языке (не менее 3 слов или словосочетаний) – **10 пт, курсив**;

Текст статьи:

Список литературы (в порядке цитирования, ГОСТ 7.1–2003) на русском языке, заглавие списка литературы – **12 пт, полужирным, ВСЕ ПРОПИСНЫЕ по центру без абзацного отступа**, литература оформляется **10 пт**.

Сведения об авторах на русском языке – **10 пт**. Приводятся в такой последовательности:

Фамилия, имя, отчество;

учреждение или организация;

ученая степень, ученое звание, должность;

адрес;

телефон;

электронная почта.

- Название статьи, фамилии и инициалы авторов, аннотация, ключевые слова, список литературы (транслитерация) и сведения об авторах **обязательно дублируются на английском языке ЗА СТАТЬЕЙ**.

- Формулы набираются в редакторе формул Microsoft Equation. Размер символов: обычные – **12 пт**, крупный индекс – **9 пт**, мелкий индекс – **7 пт**. Нумерация формул – по правому краю в круглых скобках «( )». Описание начинается со слова «где» без двоеточия, без абзацного отступа; пояснение каждого символа дается **с новой строки** в той последовательности, в которой символы приведены в формуле. Единицы измерения даются в соответствии с Международной системой единиц СИ.

- Рисунки – черно-белые. Если рисунок создан средствами MS Office, необходимо преобразовать его в картинку. Для растровых рисунков разрешение не менее 300 dpi. Подрисуточные надписи выполнять шрифтом **Times New Roman, 10 пт, полужирным, курсивным**, в конце точка не ставится.

- Рисунки с подрисуточной подписью, формулы, выравниваются **по центру без абзацного отступа**.

С полной версией требований к оформлению научных статей Вы можете ознакомиться на сайте **www.gu-unpk.ru**.

**Плата за опубликование статей не взимается.**

Право использования произведений предоставлено авторами на основании п. 2 ст. 1286 Четвертой части Гражданского Кодекса Российской Федерации.

*Адрес учредителя:*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Государственный университет – учебно–научно–производственный комплекс»  
302020, г. Орел, Наугорское шоссе, 29  
Тел. (4862) 42–00–24  
Факс (4862) 41–66–84  
www.gu-unpk.ru  
E-mail: unpk@ostu.ru

*Адрес редакции:*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Государственный университет – учебно–научно–производственный комплекс»  
302020, г. Орел, Наугорское шоссе, 29  
(4862) 54–15–19, 55–55–24, +7(906)6639898, 41–98–48, 41–98–03

www.gu-unpk.ru  
E-mail: tiostu@mail.ru

Материалы статей печатаются в авторской редакции

Право использования произведений предоставлено авторами на основании  
п. 2 ст. 1286 Четвертой части Гражданского Кодекса Российской Федерации

Технический редактор Тюхта А.В.  
Компьютерная верстка Тюхта А.В.

Подписано в печать 29.06.2016 г.  
Формат 60x88 1/8. Усл. печ. л. 12,9.  
Тираж 600 экз.  
Заказ

Отпечатано с готового оригинал–макета на полиграфической базе  
ФГБОУ ВПО «Государственный университет – УНПК»  
302030, г. Орел, ул. Московская, 65.