

*Редакционный совет:*

**Голенков В.А.** д.т.н., проф., *председатель*  
**Радченко С.Ю.** д.т.н., проф.,  
*зам. председателя*  
**Борзенков М.И.** к.т.н., доц., *секретарь*  
**Астафичев П.А.** д.ю.н., проф.  
**Иванова Т.Н.** д.т.н., проф.  
**Киричек А.В.** д.т.н., проф.  
**Колчунов В.И.** д.т.н., проф.  
**Константинов И.С.** д.т.н., проф.  
**Новиков А.Н.** д.т.н., проф.  
**Попова Л.В.** д.э.н., проф.  
**Степанов Ю.С.** д.т.н., проф.

*Главный редактор:*

**Колчунов В.И.** *акад. РААСН, д.т.н., проф.*

*Заместители главного редактора:*

**Данилевич Д.В.** к.т.н., доц.  
**Колесникова Т.Н.** д. арх., проф.  
**Коробко В.И.** д.т.н., проф.

*Редколлегия:*

**Бок Т.** д.т.н., проф. (Германия)  
**Бондаренко В.М.** *акад. РААСН, д.т.н., проф.*  
**Гордон В.А.** д.т.н., проф.  
**Емельянов С.Г.** *советник РААСН, д.т.н., проф.*  
**Карпенко Н.И.** *акад. РААСН, д.т.н., проф.*  
**Клюева Н.В.** *советник РААСН, д.т.н., проф.*  
**Коробко А.В.** д.т.н., проф.  
**Король Е.А.** чл.-корр. РААСН, д.т.н., проф.  
**Римшин В.И.** чл.-корр. РААСН, д.т.н., проф.  
**Сергейчук О.В.** д.т.н., проф. (Украина)  
**Серпик И.Н.** д.т.н., проф.  
**Тамразян А.Г.** д.т.н., проф.  
**Тур В.В.** д.т.н., проф. (Белоруссия)  
**Турков А.В.** д.т.н., проф.  
**Федоров В.С.** *акад. РААСН, д.т.н., проф.*  
**Чернышов Е.М.** *акад. РААСН, д.т.н., проф.*  
**Шах Р.** д.т.н., проф. (Германия)

*Ответственный за выпуск:*

**Савин С.Ю.** к.т.н.

*Адрес редакции:*

302006, Россия, г. Орел,  
ул. Московская, 77  
Тел.: +7 (4862) 73-43-49  
[www.build.oreluniver.ru](http://www.build.oreluniver.ru)  
E-mail: [str\\_and\\_rek@mail.ru](mailto:str_and_rek@mail.ru)

Зарегистрировано в Федеральной службе  
по надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций.  
Свидетельство:  
ПИ №ФС 77-67169 от 16 сентября 2016 г.

Подписной индекс **86294** по объединенному  
каталогу «Пресса России»

© ФГБОУ ВО «ОГУ имени И.С. Тургенева», 2017

## Содержание

### *Теория инженерных сооружений. Строительные конструкции*

<b>Готман Н.З., Сафиуллин М.Н.</b> Расчет параметров свайного поля при усилении основания фундаментной плиты грунтоцементными сваями .....	3
<b>Геордиев С.В., Копаница Д.Г., Тутатчиков Р.С., Красиев М.А.</b> Влияние скорости одноосного сжатия на сопротивление «чистых» образцов древесины сосны .....	11
<b>Кирсанов М.Н.</b> Формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях симметричной балочной фермы .....	19
<b>Колчунов В.И., Демьянов А.И., Кацавцев А.А.</b> Экспериментальные исследования прочности железобетонных составных конструкций с учетом коррозионного воздействия и их анализ .....	24
<b>Коробко В.И., Черняев А.А., Шляхов С.В.</b> Взаимосвязь задач поперечного изгиба и свободных колебаний упругих пластинок в форме многоугольников, описанных вокруг окружности, с граничными условиями жесткого защемления и шарнирного опирания по контуру .....	39
<b>Орлович Р.Б., Чакалиди В.Х.</b> Способы усиления цилиндрических каменных сводов .....	50
<b>Плевков В.С., Балдин И.В., Плевков Р.А.</b> Особенности расчета прочности нормальных сечений железобетонных изгибаемых элементов с использованием областей относительного сопротивления .....	56
<b>Савин С.Ю., Ивлев И.А.</b> Решение задачи о свободных колебаниях ортотропной параллелограммной пластины с использованием коэффициента формы .....	67
<b>Тиратурян А.Н., Углова Е.В., Ляпин А.А.</b> Имитационное моделирование эффекта динамического гистерезиса дорожной конструкции при воздействии подвижной нагрузки .....	76
<b>Турков А.В., Макаров А.А., Ветрова О.А.</b> Экспериментальные исследования систем перекрестных балок на квадратном плане с размером ячеек 0,4x0,4 м с покрытием при различных схемах опирания на динамические и статические нагрузки .....	82
<b>Цуканова Е.С., Келлин Б.Г.</b> Применение динамических конечных элементов в расчетах стержневых систем, работающих при ударной нагрузке .....	90
<b>Безопасность зданий и сооружений</b>	
<b>Водяников М.А., Кашеварова Г.Г.</b> Оценка влияния агрессивной среды на долговечность клееных деревянных конструкций .....	98

*Editorial council:*

**Golenkov V.A.** *Doc. Sc. Tech., Prof., president*

**Radchenko S.Y.** *Doc. Sc. Tech., Prof., vice-president*

**Borzenkov M.I.** *Candidat Sc. Tech., Assistant Prof.*

**Astafichev P.A.** *Doc. Sc. Law., Prof.*

**Ivanova T.N.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

**Kirichuk A.V.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

**Kolchunov V.I.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

**Konstantinov I.S.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

**Novikov A.N.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

**Popova L.V.** *Doc. Ec. Tech., Prof.*

**Stepanov Y.S.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

*Editor-in-chief*

**Kolchunov V.I.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

*Editor-in-chief assistants:*

**Danilevich D.V.** *Candidat Sc. Tech., Assistant Prof.*

**Kolesnikova T.N.** *Doc. Arc., Prof.*

**Korobko V.I.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

*Editorial committee*

**Bock T.** *Doc. Sc. Tech., Prof. (Germany)*

**Bondarenko V.M.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

**Gordon V.A.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

**Emelyanov S.G.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

**Karpenko N.I.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

**Kljueva N.V.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

**Korobko A.V.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

**Korol E.A.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

**Rimshin V.I.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

**Sergeyчук O.V.** *Doc. Sc. Tech., Prof. (Ukraine)*

**Serpik I.N.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

**Tamrazyan A.G.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

**Tur V.V.** *Doc. Sc. Tech., Prof. (Belorussia)*

**Turkov A.V.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

**Fyodorov V.S.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

**Chernyshov E.M.** *Doc. Sc. Tech., Prof.*

**Schach R.** *Doc. Sc. Tech., Prof. (Germany)*

*Responsible for edition:*

**Savin S.Yu.** *Candidat Sc. Tech*

*The edition address:* 302006, Orel,

Street Moscow, 77

+7 (4862) 73-43-49

[www.build.oreluniver.ru](http://www.build.oreluniver.ru)

E-mail: [str\\_and\\_rek@mail.ru](mailto:str_and_rek@mail.ru)

Journal is registered in Russian federal service  
for monitoring communications, information  
technology and mass communications

The certificate of registration:

ПИ №ФС 77-67169 from 16.09.2016 г.

Index on the catalogue of the «**Pressa Rossii**»  
**86294**

© Orel State University, 2017

## Contents

### *Theory of engineering structures. Building units*

<b>Gotman N., Safiullin M.</b> Calculation of pile field parameters at strengthening slab foundation by soil-cement piles .....	3
<b>Deordiev S., Kopanitsa D., Tutatchikov R., Krasiev M.</b> Axial compression speed influence to resistance of pine wood samples .....	11
<b>Kirsanov M.</b> Formulas for calculating of deflection and stresses in the bars of symmetrical truss .....	19
<b>Kolchunov V.I., Dem'yanov A., Kashavzev A.</b> The experimental study of durability reinforced concrete composite structures with regard to corrosion and their analysis .....	24
<b>Korobko V., Chernyaev A., Shlyakhov S.</b> The relationship between the problems of transverse bending and free vibrations of elastic plates in the form of a polygon, circumscribed around circle, with boundary conditions a rigid trapped by the hinged support along the contour .....	39
<b>Orlovich R., Chakalidi V.</b> Strengthening methods for cylindrical masonry vaults .....	50
<b>Plevkov V., Baldin I., Plevkov R.</b> Features of calculation of the strength of normal sections of reinforced concrete bent elements with areasFF of relative resistance .....	56
<b>Savin S., Ivlev I.</b> Solution to the free vibration problem for orthotropic parallelogram plate, using form factor .....	67
<b>Tiraturyan A., Uglova E., Lyapin A.</b> Simulation of the effect of dynamic hysteresis pavement under the influence of moving load .....	76
<b>Turkov A., Makarov A., Vetrova O.</b> Pilot studies of systems of cross beams on the square plan with a size of cells of 0,4x0,4 m the covering at various schemes supporting on dynamic and static loadings .....	82
<b>Tsukanova E., Keglin B.</b> Application of dynamic finite elements in analysis of frame structures under impact loading .....	90

### *Building and structure safety*

<b>Vodiannikov M., Kashevarova G.</b> Assessment of the impact of an aggressive environment on the laminated wooden structures lifecycle .....	98
--	----

## **РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ СВАЙНОГО ПОЛЯ ПРИ УСИЛЕНИИ ОСНОВАНИЯ ФУНДАМЕНТНОЙ ПЛИТЫ ГРУНТОЦЕМЕНТНЫМИ СВАЯМИ**

*Статья посвящена методам расчета усиления фундаментов с учетом фактического напряженно-деформированного состояния оснований и фундаментов. В нормативных документах отсутствуют рекомендации по расчету усиления плитных фундаментов сваями, а предлагаемые в научной литературе методы усиления фундаментов сваями не учитывают нагрузку, переданную на основание до выполнения усиления. Показано, что в результате таких расчетов сваи или сильно перегружены, или недогружены. Выполнены численные исследования взаимодействия плитного фундамента с грунтоцементными сваями усиления с учетом истории нагружения. Выявлены факторы, определяющие нагрузку на сваи при локальной расстановке. Получены некоторые закономерности, рекомендуемые для расчетов усиления фундаментов. Предложена методика расчета нагрузки на грунтоцементные сваи при усилении плитного фундамента с учетом нагрузок, переданных на основание плиты до выполнения усиления и даны рекомендации по назначению параметров свайного поля.*

**Ключевые слова:** численные исследования, усиление фундаментов, плитные фундаменты, грунто-цементные сваи.

### **Введение**

Необходимость усиления плитных фундаментов зданий и сооружений связана с изменением назначения помещений и объемно-планировочных решений еще на стадии строительства, что ведет к увеличению нагрузок на фундамент [1].

Все применяемые методики расчетного обоснования основаны на равенстве осадок усиливаемого фундамента и подводимых свай [2-5]. Несущая способность сваи ограничивается с одной стороны несущей способностью по грунту, а с другой – несущей способностью по материалу [6]. При расчете усиленных фундаментов сваями, в практике проектирования используется два расчетных принципа:

- расчет производится только на дополнительную нагрузку, передаваемую на фундамент после подведения свай усиления, при этом нагрузка распределяется между основанием существующего фундамента и сваями усиления;
- расчет производится на полную проектную нагрузку (основная, передаваемая на фундамент до усиления, плюс дополнительная, передаваемая на фундамент после подведения свай усиления), при этом сваи усиления нагружаются одновременно с существующим фундаментом при приложении полной проектной нагрузки [7, 8].

В первом случае на сваи передается часть дополнительной нагрузки, а во втором – часть полной нагрузки.

При расчете на полную нагрузку, на сваи передается необоснованно большая нагрузка, при расчете свай усиления только на дополнительную нагрузку не учитывается возможность передачи на сваи части нагрузки, которая была передана на фундамент до подведения свай усиления, что в первом случае существенно завышает нагрузки на сваи и ведет к удорожанию нулевого цикла, а во втором случае занижает нагрузки на сваи и может приводить к снижению эксплуатационной надежности усиления [9-13].

Для разработки методики расчета параметров свайного поля при усилении плитного фундамента грунтоцементными сваями решались 2 задачи:

- показано, как существенно отличаются нагрузки на сваи усиления, определенные традиционным методом, т.е. в соответствии с 2-мя известными расчетными принципами (расчет на полную нагрузку и расчет на дополнительную нагрузку);
- на основе численных 3D расчетов разработан метод определения нагрузки на сваи усиления с учетом доли нагрузки, которая уже передана на основание до момента его усиления и даны рекомендации по определению параметров свайного поля.

### Расчет усиления плитного фундамента сваями традиционным методом

Выполнен расчет усиления плитного фундамента многоэтажного здания в г. Тюмень грунтоцементными сваями. Здание кирпичное, 10-ти этажное на плитном фундаменте. Строительство началось в 2000 г, но здание до сих пор не сдано в эксплуатацию. По новому проекту предполагается продолжить строительство и надстроить здание 3-мя дополнительными этажами.

Проектным решением предусмотрено усилить грунтовое основание плитного фундамента устройством грунтоцементных свай (ГЦС) по технологии «jet-grouting». Сваи выполняются под нагруженными стенами жилого дома, что позволяет не только стабилизировать осадки, но и исключить неравномерность осадок фундаментной плиты при нагружении новой проектной нагрузкой.

Проектом предусмотрено выполнение грунтоцементных свай диаметром 600 мм длиной 18 и 20 м. Расчет несущей способности свай по грунту выполнялся согласно СП 24.13330.2011 «Свайные фундаменты». Расчетная допускаемая нагрузка на сваю составила 1424 кН. Расчет несущей способности грунтоцементных свай по материалу выполнялся согласно СНиП 2.02.03-84\* «Бетонные и железобетонные конструкции». Несущая способность сваи по материалу составила 565 кН при сопротивлении грунтобетона сжатию  $R_{сж} = 3,0$  МПа.

Расчет коэффициента жесткости грунтоцементных свай выполнен в осесимметричной постановке при помощи программы PLAXIS 2D 2011.02. В качестве исходных данных приняты расчетные характеристики грунтов. В результате расчета были получены значения осадок при нагрузках в интервале 0–1500 кН с шагом 50 кН. Коэффициент жесткости грунтоцементных свай при допускаемой нагрузке на сваю 550 кН составляет 15270 кН/м. Расчет плитного фундамента, усиленного сваями, выполнен с использованием ПК SCAD 11.5. Расчеты произведены с учетом жесткости здания.

По результатам расчета определены нагрузки на сваи усиления для следующих расчетных случаев:

- плитный фундамент без свай усиления при действии полной проектной нагрузки (1 вариант.);
- плитный фундамент без свай усиления при нагрузке только от возведенной части здания (2 вариант.);
- плитный фундамент со сваями усиления при действии полной проектной нагрузки (3 вариант.);
- плитный фундамент со сваями усиления при действии дополнительной нагрузки, передаваемой на фундамент после подведения свай усиления (4 вариант.).

При действии полной нагрузки на плитный фундамент со сваями усиления (3 вариант), нагрузка на сваи составляет от 238,9 до 1037,6 кН, при этом напряжения в основании фундаментной плиты находятся в интервале от 38,8 до 55,7 кПа. При действии полной нагрузки на плитный фундамент без свай усиления (1 вариант) напряжения в основании фундаментной плиты находятся в интервале от 296,4 до 489,6 кПа. При действии нагрузки от возведенной части здания на плитный фундамент без свай усиления (2 вариант), напряжения в основании фундаментной плиты находятся в интервале от 261,9 до 415 кПа. При действии дополнительной нагрузки, передаваемой на плитный фундамент со сваями усиления (4 вариант), уже после подведения свай под плиту, нагрузка на сваи составляет от 21,5 до

172,8 кН, при этом напряжения в основании фундаментной плиты изменяются от 38,8 до 55,7 кПа. Результаты расчета представлены в таблице 1.

Таблица 1 - Результаты расчетов

Напряжения в основании фундаментной плиты без усиления, кПа		Усиленный фундамент		
При передаче на фундамент нагрузки только от возведенной части здания	При передаче на фундамент полной проектной нагрузки	Напряжения в основании фундаментной плиты от полной нагрузки, кПа	Нагрузка на сваи от полной нагрузки, кН	Нагрузка на сваи от дополнительной нагрузки, кН
1	2	3	4	5
261,9–415,0	296,4–896,0	38,8–55,7	238,9–1037,6	21,5–172,8

Полная проектная нагрузка составляет 233660 кН, из них на момент, когда под плиту подводятся сваи усиления, нагрузка от возведенной части здания составляет 201600 кН (86,3% от полной нагрузки), а дополнительная нагрузка - 32060 кН (13,72% от полной нагрузки). Анализ результатов расчета, представленных в таблице 1, позволяет сделать следующие выводы.

1. Если выполнять расчеты при условии, что сваи усиления нагружаются одновременно с существующим фундаментом при приложении полной проектной нагрузки (как для комбинированного плитно-свайного фундамента), как это принято в повседневной практике инженерных расчетов, то сваи усиления оказываются перегруженными из-за их существенно большей жесткости. Величина нагрузки на сваи составляет более 1000 кН, в то время, как несущая способность этих свай по материалу всего 550 кН.

2. Если принять, что нагрузка от возведенной части здания уже воспринята существующим плитным фундаментом, и сваями усиления воспринимается только дополнительная нагрузка, то в этом случае сваи усиления оказываются существенно недогруженными. Нагрузка на сваи в этом случае составляет менее 200 кН.

Учитывая то, что на момент усиления основания сваями на фундаментную плиту уже передано более половины полной проектной нагрузки, очевидно, что выполненные расчеты не учитывают фактическое напряженно-деформированное состояние усиливаемого фундамента, которое определяется нагрузками, переданными на основание, до его усиления сваями. Это приводит либо к увеличению сметной стоимости усиления, либо к недостаточно надежным решениям. Для разработки метода расчета с учетом доли полной проектной нагрузки, переданной на плитный фундамент до момента подведения под него свай усиления, выполнено численное исследование с использованием программного пакета PLAXIS 3D

### **Результаты численного исследования взаимодействия плитного фундамента с грунтовым массивом и сваями усиления**

Для определения закономерностей изменения нагрузок на сваи усиления, выполнены численные исследования с использованием программного пакета "Plaxis 3D Foundation 1.6" в трехмерной постановке. Исследование выполнено для условного здания с конструктивной схемой расположения несущих конструкций, включая сваи усиления, в соответствии с таблицей 2 и схемой на рисунке 1.

На рисунке 1 показана схема расстановки свай усиления. Сваи усиления подводятся под стены и колонны. Отмечены следующие сваи:

- свая А – центральная;
- свая В – средняя по длинной стороне;
- свая С – угловая;
- свая D – средняя по торцевой стороне.

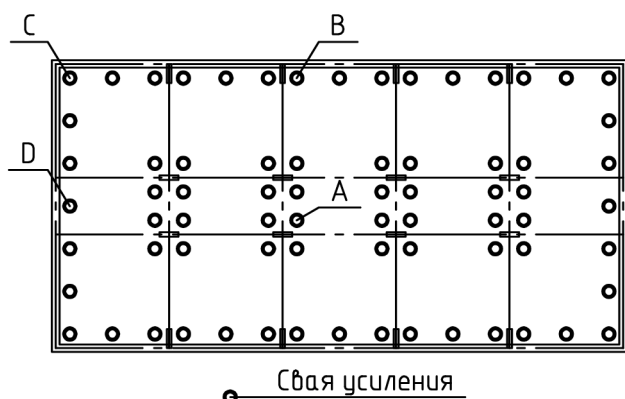


Таблица 2 - Параметры условного здания

Характеристика	Значение
этажность	16
габариты в плане	15х30 м
фундамент	плитный, толщина 800 мм
перекрытия	200 мм
стены подвала	400 мм
пилоны	250х1000 мм
диаметр свай усиления	600
ёколичество свай усиления	72

Рисунок 1 – Схема расстановки свай усиления

Принятые границы расчетной области модели показаны на рис. 2.

Расчет выполнялся с учетом «истории нагружения» фундамента:

- стадия 1 начальная;
- стадия 2 откопка, возведение конструкций;
- стадия 3 первичное нагружение;
- стадия 4 выполнение свай усиления;
- стадия 5 вторичное нагружение.

Основание представлено песком мелким (ИГЭ-1) со следующими характеристиками: удельный вес 19,5 кН/м<sup>3</sup>,  $E = 28000$  кН/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0,4$ ,  $c = 20$  кН/м<sup>2</sup>,  $\phi = 32^\circ$ . При расчете принята модель грунта Кулона-Мора.

В расчетах варьировалась доля передаваемой нагрузки перед устройством свай. Рассмотрено 5 вариантов:

- а) первоначальная нагрузка отсутствует, выполняются сваи и на каркас передается полное значение нагрузок (схема 0% - сваи – 100%);
- б) первоначальная нагрузка составляет 25%, перед устройством сваи выполнена небольшая часть конструкций каркаса (схема 25% - сваи – 75%);
- в) первоначальная нагрузка составляет 50% от полной (схема 50% - сваи – 50%);
- г) первоначальная нагрузка составляет 75% от полной, выполнены конструкции каркаса и часть самонесущих конструкций (схема 75% - сваи – 25%);
- д) первоначальная нагрузка составляет 100%, что означает полное отсутствие свай (схема 100% - сваи – 0%).

Рассмотренные варианты нагружения показаны в табл. 3.

Таблица 3 - Варианты нагружения

Варианты	Стадия 3		Стадия 5	
	доля первичного нагружения	величина первичной нагрузки, кН/м <sup>2</sup>	доля вторичного нагружения	величина вторичной нагрузки, кН/м <sup>2</sup>
а)	0%	0	100%	164
б)	25%	41	75%	123
в)	50%	82	50%	82
г)	75%	123	25%	41
д)	100%	164	0%	0

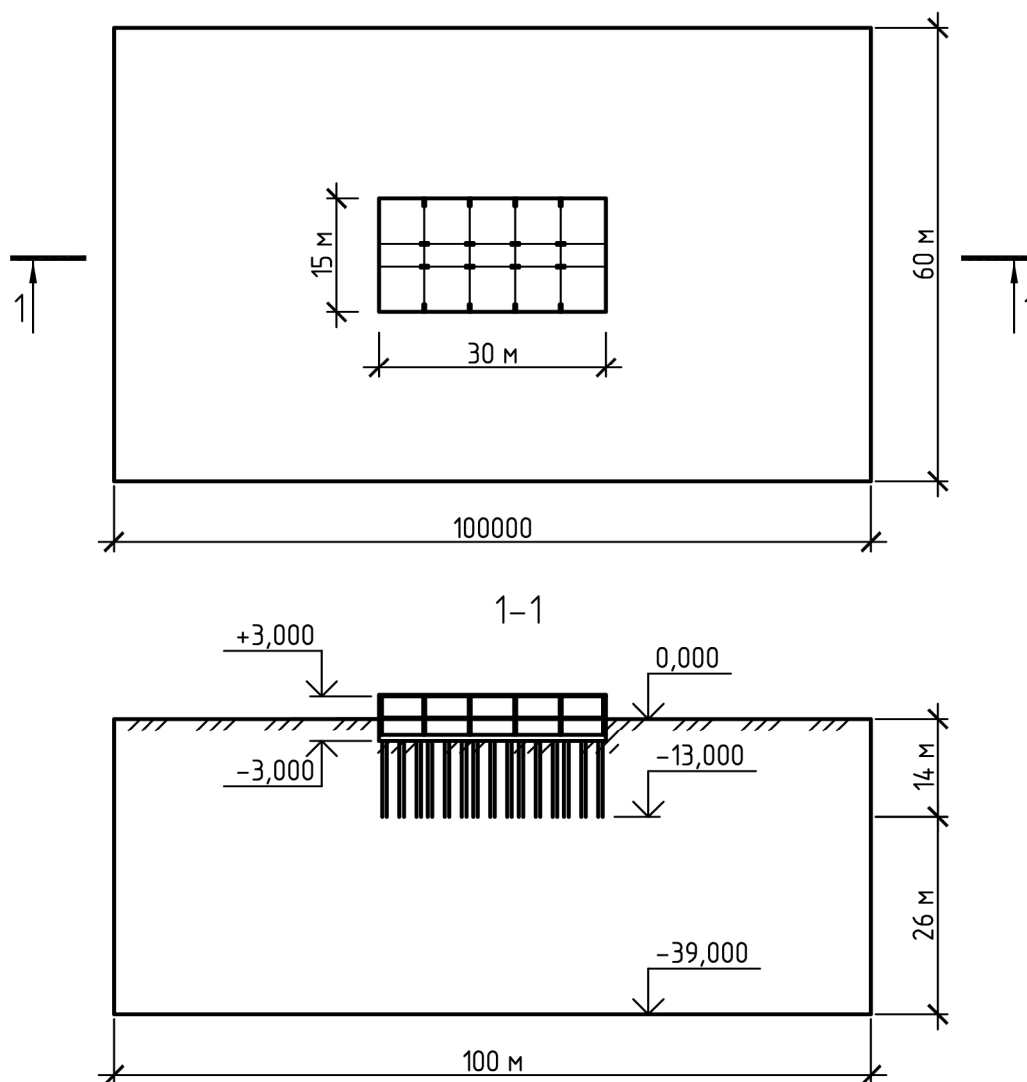


Рисунок 2 – Принятые границы расчетной области

В процессе расчета оценивается влияние доли нагрузки, передаваемой на фундамент до усиления, на отношение  $P_0/P$ , где  $P_0$  является нагрузкой, передаваемой на грунтоцементную сваю, при условии выполнения свай одновременно с фундаментной плитой, а  $P$  - нагрузка, передаваемая на грунтоцементную сваю, с учетом доли проектной эксплуатационной нагрузки ( $a$ ), передаваемой на фундамент до момента выполнения усиления и устройства грунтоцементных свай. Значения  $P$  и  $P_0$  рассчитываются в зависимости от изменяемых параметров с использованием PLAXIS 3D Foundation.

При доле нагрузки ( $a$ ), равной нулю, т.е. когда грунтоцементные сваи выполняются одновременно с устройством плиты и нагружаются одновременно с плитой, рассчитывается величина  $P_0$ , а при доле нагрузке ( $a$ ) больше нуля (0,25 или 0,75), т.е. когда усиление плиты сваями выполняется после приложения неполной проектной нагрузки, рассчитывается величина  $P$ .

При разработке инженерного метода расчета нагрузок, передаваемых на сваи усиления ( $P$ ), выполнена серия расчетов при изменении следующих параметров: доли нагрузки, переданной на фундамент до момента выполнения усиления ( $a$ ), диаметра сваи ( $d$ ) и толщины плиты ( $t$ ). По результатам расчета (таблица 4) построены графики, представленные на рис. 3, и получена зависимость (1) для определения отношения  $P/P_0$ .

Таблица 4 - Значения  $P/P_0$  при различных параметрах

Доля нагрузки параметры d/t	$a = 0,25$		$a = 0,50$		$a = 0,75$	
	$d = 0,6$ м	$d = 1,0$ м	$d = 0,6$ м	$d = 1,0$ м	$d = 0,6$ м	$d = 1,0$ м
$t = 0,8$ м	0.774	0.801	0.549	0.602	0.324	0.409
$t = 1,2$ м	0.776	0.804	0.553	0.611	0.332	0.424

$$P/P_0 = 1 - ak, \quad (1)$$

где  $k$  – коэффициент, зависящий от диаметра сваи (табл. 5).

Таблица 5 - Значения  $k$  при различных диаметрах сваи

Диаметр сваи d, м	Коэффициент k
0,6	0,898
1,0	0,778

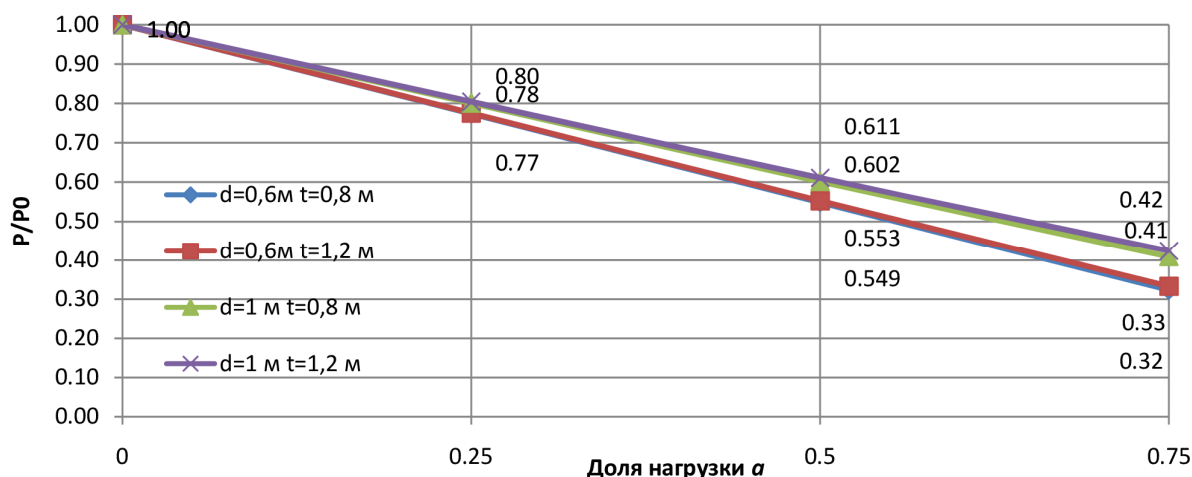


Рисунок 3 – Графики зависимости  $P/P_0$  от доли нагрузки  $a$ , диаметра  $d$  и толщины плиты  $t$

Анализ выполненных расчетов и полученной формулы (1) позволяет заключить следующее: отношение  $P/P_0$  не зависит от выбора положения сваи (центральная, угловая и др.); нагрузки, передаваемые на грунтоцементные сваи ( $P$ ) зависят от нагрузки на сваю, рассчитанной при одновременном выполнении ГЦС вместе с фундаментной плитой ( $P_0$ ), доли нагрузки, переданной на фундамент до момента выполнения усиления, и диаметра ГЦС; увеличение доли нагрузки, переданной на фундамент до момента выполнения усиления, приводит к уменьшению нагрузки на ГЦС.

Таким образом, при проектировании усиления основания плитного фундамента грунтоцементными сваями и определении параметров свайного поля (расположения свай и их длины) рекомендуется следующее:

- для повышения эффективности работы свай совместно с усиливаемой плитой сваи концентрировать у колонн и стен ;
- нагрузку на грунтоцементные сваи ( $P$ ) определять с использованием формулы (1) в зависимости от доли нагрузки, переданной на фундамент до момента выполнения усиления ( $a$ ), коэффициента  $k$ , и нагрузки на сваю  $P_0$ , определенной традиционными расчетами свайно-плитного фундамента, используя наиболее простую для практики проектирования контактную модель основания и соответствующее программное обеспечение (SCAD, MicroFe и т.д.) при условии выполнения свай одновременно с фундаментной плитой.

### Заключение

Выполнено численное исследование взаимодействия усиливаемого плитного фундамента с грунтовым массивом и грунтоцементными сваями усиления и установлено следующее.

1. Основным фактором, влияющим на результаты расчета усиления плитного фундамента грунтоцементными сваями, является стадийность нагружения, что в настоящее время не учитывается нормами РФ.

2. При определении параметров свайного поля нагрузки на сваи усиления ( $P$ ) рекомендуется определять в зависимости от нагрузки на сваю ( $P_0$ ) в предположении, что вся нагрузка воспринимается фундаментом и ГЦС одновременно, доли нагрузки, переданной на основание до установки свай, и диаметра сваи в соответствии с линейной зависимостью (1).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корниенко, В.Д. Проблемы современного российского градостроительства (на примере г. Магнитогорска) [Текст] / В.Д. Корниенко, С.И. Чикота // Жилищное строительство. – 2014. – № 11. – С. 30-32.
2. Бройд, И.И. “Струйная геотехнология” [Текст]: Учебное пособие. – М.: Изд-во АСВ, 2004.
3. Джантимиров, Х.А. Опыт усиления основания сооружения с помощью струйной геотехнологии [Текст] / Х.А. Джантимиров, А.А. Долев // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2006. № 1. С. 16-19.
4. Briaud, J.L. Introduction to geotechnical engineering: unsaturated and saturated soils. – Wiley, 2013.
5. Рекомендации по применению буроинъекционных свай / НИИОСП. - М., 1984.
6. Малинин, А.Г. Расчет несущей способности армированной грунтоцементной сваи по материалу [Текст] / А.Г. Малинин, И.А. Салмин // Жилищное строительство. - 2013. - № 9. - С. 14-17.
7. Гроздов, В.Т. Усиление строительных конструкций при реставрации зданий и сооружений [Текст]. - СПб.: «Электростандарт-принт», 2005.
8. Эль-Моссалами, Й.М. Особенности поведения свайно-плитных фундаментов [Текст] / Й.М. Эль-Моссалами, Б. Луц, Р. Дюрванг // Геотехника. - 2013. - № 2. - С. 56-64
9. Готман, Н.З. Исследование работы свай усиления плитных фундаментов реконструируемых зданий [Текст] / Н.З. Готман, М.Н. Сафиуллин // Сб. научных трудов института БашНИИстрой, вып. 79. - Уфа.: БашНИИстрой, 2016.
10. Маковецкий, О.А. Опыт армирования слабых грунтов в основании фундаментных плит с применением струйной геотехнологии [Текст] / О.А. Маковецкий, С.С. Зуев // Труды международной конференции по геотехнике «GeoMos 2010», Москва, 7-10 июня 2010 г. -С. 1801-1808.
11. Хусаинов И.И. Сравнительный анализ опытных и расчетных деформаций грунтового массива, закрепленного струйной цементацией [Текст] / И.И. Хусаинов, Г.Г. Кашеварова, О.А. Маковецкий // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2012. – Т. 8. – № 2. – С. 126-132.
12. Маковецкий, О.А. Применение струйной цементации для устройства подземных частей комплексов [Текст] / О.А. Маковецкий, С.С. Зуев, И.И. Хусаинов // Жилищное строительство. - 2013. - № 9. - С. 10-14.
13. Мангушев Р.А. Определение прочностных характеристик грунтоцементного массива, выполненного по технологии jet-grouting в инженерно-геологических условиях Санкт-Петербурга [Текст] / Р.А. Мангушев, В.Э., В.В. Конюшков // Вестник гражданских инженеров. - 2010. - № 2. - С. 69-77.

#### Готман Наталья Залмановна

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь  
Доктор технических наук, профессор кафедры «Строительное производство и геотехника»  
e-mail: [gotmans@mail.ru](mailto:gotmans@mail.ru)

#### Сафиуллин Марат Нуритдинович

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь  
аспирант кафедры «Строительное производство и геотехника»  
e-mail: [safullinmarat@list.ru](mailto:safullinmarat@list.ru)

---

N. GOTMAN, M. SAFIULLIN

## CALCULATION OF PILE FIELD PARAMETERS AT STRENGTHENING SLAB FOUNDATION BY SOIL-CEMENT PILES

*The article is devoted to the design methods for strengthened foundation based on the actual stress-strain state of bases and foundations. In the normative documents there are no recommendations on the calculation for strengthened slab foundations with piles and methods of strengthening of the Foundation with piles proposed in the scientific literature do not take into account the loads that were passed before the foundation was strengthened. It is shown that as a result of such calculations the piles are or strongly overloaded, or underloaded. Numerical study of the raft foundation and grouting strengthening piles interaction considering loading history were done. The factors were identified that determine the load on the pile in the local position. There are some regularities recommended for strengthened foundation design. The design method of the loads on the soil-cement piles at strengthening slab foundation, taking into account the loads that were passed before, and recommendations for pile field parameters determination were offered.*

**Keywords:** numerical research, strengthening of the foundations, slab foundations, soil-cement piles.

## BIBLIOGRAPHY

1. Korniyenko, V.D. Problemy sovremennogo rossiyskogo gradostroitel'stva (na primere g. Magnitogorska) [Tekst] / V.D. Korniyenko, S.I. Chikota // Zhilishchnoye stroitel'stvo. – 2014. – № 11. – S. 30-32.
2. Broyd, I.I. "Struynaya geotekhnologiya" [Tekst]: Uchebnoye posobiye. – M.: Izd-vo ASV, 2004.
3. Dzhantimirov, KH.A. Opyt usileniya osnovaniya sooruzheniya s pomoshch'yu struynoy geotekhnologii [Tekst] / KH.A. Dzhantimirov, A.A. Dolev // Osnovaniya, fundamentey i mekhanika gruntov. 2006. № 1. S. 16-19.
4. Briaud, J.L. Introduction to geotechnical engineering: unsaturated and saturated soils. – Wiley, 2013.
5. Rekomendatsii po primeneniyu buroin'yektsionnykh svay / NIIOSP. – M., 1984.
6. Malinin, A.G. Raschet nesushchey sposobnosti armirovannoy gruntotsementnoy svai po materialu [Tekst] / A.G. Malinin, I.A. Salmin // Zhilishchnoye stroitel'stvo. – 2013. – № 9. – S. 14-17.
7. Grozdov, V.T. Usileniye stroitel'nykh konstruksiy pri restavratsii zdaniy i sooruzheniy [Tekst]. – SPb.: «Elektrostandart-print», 2005.
8. El'-Mossalami, Y.M. Osobennosti povedeniya svayno-plitnykh fundamentov [Tekst] / Y.M. El'-Mossalami, B. Luts, R. Dyurvang // Geotekhnika. – 2013. – № 2. – S. 56-64
9. Gotman, N.Z. Issledovaniye raboty svay usileniya plitnykh fundamentov rekonstruiruyemykh zdaniy [Tekst] / N.Z. Gotman, M.N. Safiullin // Sb. nauchnykh trudov instituta BashNIISTroy, vyp. 79. – Ufa.: BashNIISTroy, 2016.
10. Makovetskiy, O.A. Opyt armirovaniya slabykh gruntov v osnovanii fundamentnykh plit s primeneniyem struynoy geotekhnologii [Tekst] / O.A. Makovetskiy, S.S. Zuyev // Trudy mezhdunarodnoy konferentsii po geotekhnike «GeoMos 2010», Moskva, 7-10 iyunya 2010 g. –S. 1801-1808.
11. Khusainov I.I. Sravnitel'nyy analiz opytnykh i raschetnykh deformatsiy gruntovogo massiva, zakreplennogo struynoy tsementatsiyey [Tekst] / I.I. Khusainov, G.G. Kashevarova, O.A. Makovetskiy // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2012. – T. 8. – № 2. – S. 126-132.
12. Makovetskiy, O.A. Primeneniye struynoy tsementatsii dlya ustroystva podzemnykh chastey kompleksov [Tekst] / O.A. Makovetskiy, S.S. Zuyev, I.I. Khusainov // Zhilishchnoye stroitel'stvo. – 2013. – № 9. – S. 10-14.
13. Mangushev R.A. Opredeleniye prochnostnykh kharakteristik gruntotsementnogo massiva, vypolnennogo po tekhnologii jet-grouting v inzhenerno-geologicheskikh usloviyakh Sankt-Peterburga [Tekst] / R.A. Mangushev, V.E., V.V. Konyushkov // Vestnik grazhdanskikh inzhenerov. – 2010. – № 2. – S. 69-77.

### **N. Gotman**

Perm national research polytechnical university, Perm  
Doctor of tech. sciences, professor of the building production and geotechnic department  
E-mail: [gotmans@mail.ru](mailto:gotmans@mail.ru)

### **M. Safiullin**

Perm national research polytechnical university, Perm  
Postgraduate student of the building production and geotechnic department  
E-mail: [safiullinmarat@list.ru](mailto:safiullinmarat@list.ru)

УДК 539.3

ДЕОРДИЕВ С.В, КОПАНИЦА Д.Г., ТУТАТЧИКОВ Р.С., КРАСИЕВ М.А.

## ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ ОДНООСНОГО СЖАТИЯ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ «ЧИСТЫХ» ОБРАЗЦОВ ДРЕВЕСИНЫ СОСНЫ

*Влияние скорости деформаций древесины на значение начального модуля упругости и предел прочности может существенным образом повлиять на результат расчета конструкции при действии низкоскоростной нагрузки. Ниже приводятся результаты экспериментальных исследований образцов из древесины сосны на одноосное сжатие в диапазоне скоростей нагрузки от 4 мм/мин. до 1000 мм/мин. Установлены закономерности изменения начального модуля упругости и прочности древесины вдоль волокон, в радиальном и тангенциальном направлениях. Выявлены зависимости модуля упругости и предела прочности древесины от скорости нагрузки. Эксперименты показали, что диаграммы зависимости значений модуля упругости с увеличением скорости нагрузки имеют нелинейный характер с наибольшим градиентом на начальном этапе деформирования. Получены характерные формы разрушения экспериментальных образцов при сжатии вдоль волокон, в радиальном и тангенциальном направлениях. Установлено, что наиболее чувствительными к увеличению скорости нагрузки являются образцы, подверженные сжатию в тангенциальном направлении.*

*Ключевые слова:* структура древесины, характер разрушения, анизотропия прочностных свойств, квазистатическое одноосное сжатие, чистые образцы, модуль упругости.

С каждым годом возрастает разнообразие динамических нагрузок на конструкции. Анализ поведения конструкций из древесины воспринимающих динамические нагрузки возможен лишь при всестороннем изучении ее физико-механических свойств, включая влияние скорости.

Развитие технологии изготовления конструкций из древесины расширяет возможности ее использования в составе несущих систем, в том числе уникальных зданий. При определении напряженно-деформированного состояния деревянных конструкций от действия технологических и аварийных нагрузок большой интенсивности возникает необходимость уточнения деформационно-прочностных свойств древесины. Таким образом, исследования динамических свойств древесины на действие динамических нагрузок является весьма актуальной задачей.

Проведенные исследования механических свойств древесины различных пород при статических нагрузках широко представлены в работах В.Н. Волынского [1]. Большой вклад в исследования зависимости прочности древесины от времени действия нагрузки внесли Н.Л. Леонтьев [2], Ю.М. Иванов [3], Л.М. Перелыгин [4], W. Madsen [5]. Экспериментальным исследованием деформационно-прочностных свойств древесины различных пород при динамических нагрузках посвящены работы зарубежных (S.R. Reid, [6], J.J. Harrigan [7], L. Severa [8], J. Vuchar [9]) и отечественных авторов (А.П. Большаков, М.А. Балакшина, Н.Н. Гердюков [10, 11, 12, 13]).

В настоящей работе приводятся результаты статических и динамических испытаний на одноосное сжатие образцов из древесины сосны.

Испытания проводились в лаборатории испытаний строительных конструкций и материалов кафедры «Строительные конструкции и управляемые системы» Инженерно-строительного института Сибирского федерального университета на универсальной испытательной машине Instron 3369 (рис. 1). Образцы изготовлены из древесины сосны согласно ГОСТ 16483.10-73\* в форме прямоугольной призмы основанием 20×20 мм и длиной вдоль волокон 30 мм, с ориентацией годичных колец параллельно одной из граней образца. Влажность образцов на момент испытаний – 8%. Испытания проводились на

одноосное сжатие вдоль волокон, поперек волокон в тангенциальном направлении и поперек волокон в радиальном направлении (по 25 образцов на каждую скорость загрузки) со скоростями 4, 150, 300, 500, 700, 900 и 1000 мм/мин. Скорости соответствует статическим испытаниям по ГОСТ 16483.10-73\* для испытательной машины с электромеханическим приводом.

Всего было испытано 525 образцов. Все образцы, испытанные вдоль волокон доведены до разрушения. Испытания образцов поперек волокон прекращалась при достижении деформаций 30%.



Рисунок 1 – Образец в испытательной установке

Результаты экспериментов приведены в таблицах и в виде диаграмм, характеризующих зависимость модуля упругости и прочности древесины от скорости нагрузки. Скорость сжатия изменялась в пределах от 4 мм/мин. до 1000 мм/мин.

В таблице 1 приведены значения модуля упругости и временного сопротивления для образцов, испытанных вдоль волокон.

Таблица 1 - Результаты испытаний образцов на сжатие вдоль волокон

Скорость нагружения	Модуль упругости, МПа	Временное сопротивление, МПа
4 мм/мин	9051,11	53,62
150 мм/мин	9930,91	54,33
300 мм/мин	10183,03	55,74
500 мм/мин	10541,82	57,05
700 мм/мин	10589,31	60,05
900 мм/мин	10621,52	65,53
1000 мм/мин	10679,19	71,26

Соответствующая графическая интерпретация результатов приведена на рис. 2 в виде диаграммы, характеризующей практически линейную зависимость величины временного сопротивления древесины от скорости нагрузки. При росте скорости в диапазоне 4-1000 мм/мин предел сопротивления древесины вдоль волокон вырос на 33 %.



Рисунок 2 – Диаграмма зависимости величины временного сопротивления древесины сосны вдоль волокон от скорости нагрузки

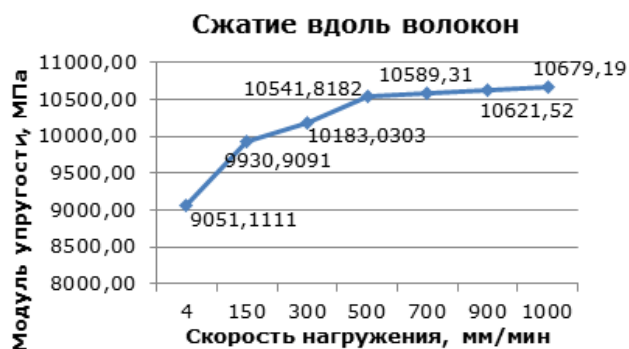


Рисунок 3 – Диаграмма зависимости модуля упругости от скорости нагружения

На рис. 3 отображено нелинейное изменение модуля упругости древесины сосны при сжатии вдоль волокон от скорости нагружения. Анализ полученных данных показывает, что увеличение скорости нагрузки от 4 мм/мин до 500 м/мин приводит к росту значений модуля упругости с 9,051 ГПа до 10,54 ГПа. В диапазоне скоростей 500 -1000 мм/мин рост значений модуля упругости замедляется и становится практически незаметным.

Разрушенный образец древесины сосны, испытанный на сжатие вдоль волокон показан на рис.4



Рисунок 4 – Характер разрушения образцов при сжатии вдоль волокон

Результаты испытаний образцов на сжатие поперек волокон в радиальном направлении приведены в таблице 2. Показаны значения модуля упругости и временного сопротивления в диапазоне скорости сжатия от 4 мм/мин до 1000 мм/мин.

Таблица 2 - Результаты испытаний образцов на сжатие поперек волокон радиально

Скорость нагружения	Модуль упругости, МПа	Временное сопротивление, МПа
4 мм/мин	397,39	24,28
150 мм/мин	409,69	35,72
300 мм/мин	416,55	37,32
500 мм/мин	419,25	40,90
700 мм/мин	422,15	43,54
900 мм/мин	425,43	48,56
1000 мм/мин	429,26	51,48

Рассмотрим на рис. 5 диаграмму зависимости временного сопротивления от скорости нагружения при испытании образцов поперек волокон в радиальном направлении. При увеличении скорости нагрузки в диапазоне 4-1000 мм/мин происходит практически линейный рост сопротивления древесины. Полученные результаты показали, что временное сопротивление увеличилось в 2,1 раза.



Рисунок 5 – Диаграмма зависимости временного сопротивления от скорости нагружения



Рисунок 6 – Диаграмма зависимости модуля упругости от скорости нагружения



Рисунок 7 – Разрушенный образец при сжатии в радиальном направлении

На рис. 6 отображен график зависимости модуля упругости от скорости нагружения при испытании образцов поперек волокон в радиальном направлении.

Как и в случае с испытаниями вдоль волокон, модуль упругости древесины при сжатии в радиальном направлении увеличивается нелинейно в диапазоне скорости от 4 мм/мин до 500 м/мин. Значения модуля упругости выросли от 0,4 ГПа до 4,25 ГПа. В диапазоне скоростей 500 - 1000 мм/мин наблюдается более значительный рост значений модуля упругости по сравнению с показателями, полученными при испытаниях вдоль волокон от 0,40 до 0,43 ГПа.

Разрушенный образец при сжатии в радиальном направлении показан на рис. 7.

Результаты испытания образцов на сжатие поперек волокон в тангенциальном направлении в виде значений модуля упругости и временного сопротивления на сжатие приведены в таблице 3.

Соответствующая диаграмма зависимости временного сопротивления от скорости нагружения при сжатии образцов поперек волокон в тангенциальном направлении показана на рис. 8. Как и в случае с испытаниями вдоль волокон и в радиальном направлении при сжатии в тангенциальном направлении увеличение скорости нагрузки от 4 мм/мин до 1000 мм/мин привело к практически линейному росту сопротивления древесины и увеличению значений прочности в 4,2 раза.

Характер изменения модуля упругости при сжатии в тангенциальном направлении повторяет диаграммы, полученные при продольном и радиальном сжатии. Нелинейный рост модуля упругости наблюдался с несколько большим градиентом от 0,42 ГПа до 0,46 ГПа и при увеличении скорости нагрузки от 4 мм/мин до 1000 мм/мин отношение большего значения к меньшему составило 1,11 раза (рис.9).

Таблица 3 – Результаты испытаний образцов на сжатие поперек волокон тангенциально

Скорость нагружения	Модуль упругости, МПа	Временное сопротивление, МПа
4 мм/мин	418,29	8,20
150 мм/мин	427,53	10,07
300 мм/мин	438,07	16,89
500 мм/мин	440,60	24,12
700 мм/мин	449,51	28,25
900 мм/мин	458,12	30,24
1000 мм/мин	464,92	34,57

Сжатие поперек волокон тангенциально



Рисунок 8 – Диаграмма зависимости временного сопротивления от скорости нагружения

Сжатие поперек волокон тангенциально

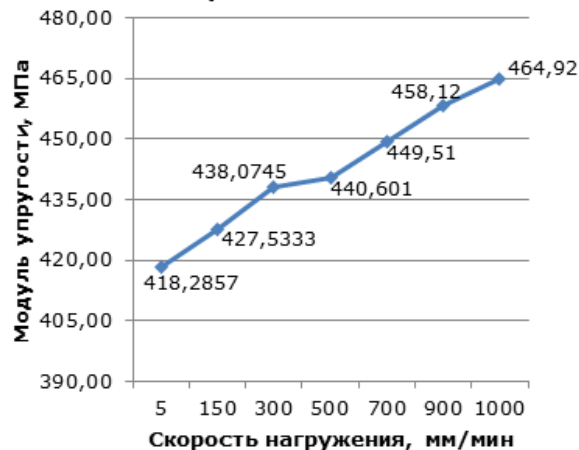


Рисунок 9 – График зависимости модуля упругости от скорости нагружения

Образец, разрушенный при сжатии в тангенциальном направлении показан на рис. 10.

Таким образом, результаты эксперимента показали, что анизотропия структуры древесины сосны приводит к анизотропии прочностных свойств при квазистатическом сжатии, а именно:

- при испытании малых образцов на сжатие вдоль волокон с увеличением скорости нагружения временное сопротивление увеличивается примерно на 31% (53,62 – 71,26 МПа), при этом рост значений модуля упругости с 9,051 ГПа до 10,54 ГПа;

- при испытании малых образцов на сжатие поперек волокон в радиальном направлении с увеличением скорости нагружения временное сопротивление увеличивается вдвое с 24,28 до 51,48 МПа, при этом модуль упругости увеличивается на 8% с 0,4 ГПа до 0,43 ГПа;

- при испытании малых образцов на сжатие поперек волокон в тангенциальном направлении с увеличением скорости нагружения временное сопротивление увеличивается в четыре раза (8,20 – 34,57 МПа), с увеличением модуля на 11% с 0,42 – 0,46 ГПа.



Рисунок 10 – Характер разрушения образцов при сжатии поперек волокон тангенциально

Установлено, что предел прочности в тангенциальном направлении вырос в 4,21 раза, в радиальном в 2,1 раза, в продольном направлении в 1,33 раза. Модуль упругости в тангенциальном направлении увеличился в 1,11 раза, в радиальном в 1,08 раза, в продольном направлении в 1,18 раза.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волынский, В.Н. Взаимосвязь и изменчивость показателей физико-механических свойств древесины [Текст]. – Архангельск : Изд-во АГТУ, 2006. – 217 с.
2. Леонтьев, Н.Л. Длительное сопротивление древесины [Текст]. – М., Гослесбумиздат, 1957. – 130 с.
3. Иванов, Ю.М. Оценка длительной прочности древесины при изгибе по результатам кратковременных испытаний [Текст] / Ю.М. Иванов, Ю.Ю. Славик. // ИВУЗ «Лесной журнал». – 1981. – №2.
4. Перельгин, Л.М. Древесиноведение [Текст]. – М.: Лесная промышленность, 1962. – 284 с.
5. Madsen, B. Duration of load test for wet lumber in bending [Text] // *Forest Products Journal*. – 1975. – N5. – pp. 33-40.
6. Reid, S.R. Dynamic uniaxial crushing of wood [Text] / S.R. Reid, C. Peng // *Int. J. Impact Engng* / – 1997. – No 19. – pp. 531-570.
7. Harrigan, J.J. Inertial effects on the crushing strength of wood loaded along the grain [Text] / J.J. Harrigan, S.R. Reid, T.R. Reddy // *Experimental Mechanics* (Allison, Ed.), Balkema, Rotterdam. – 1998. – pp. 193-198.
8. Severa, L. Behaviour of wood under dynamic three point bending [Text] / L. Severa, J. Buchar, V. Vlach, M. Havlichek // *Acta Universitatis Agriculturae et Silviculturae Mendelinae Brunensis XLVIII*. – 1999. – pp. 27-32.
9. Buchar, J. Model of wood response to the high velocity of loading [Text] / J. Buchar, S. Rolc, J. Lisy, J. Schwengmeier // 19-th International Symposium of Ballistics, 7-11 May 2001. – Interlaken, Switzerland. – 2011. – pp. 1447-1453.
10. Большаков, А.П. Демпфирующие свойства секвойи, березы, сосны и осины при ударном нагружении [Текст] / А.П. Большаков, М.А. Балакшина, Н.Н. Гердюков, Е.В. Зотов, А.К. Музыря, А.Ф. Плотников, С.А. Новиков, В.А. Сеницын, Д.И. Шестаков, Ю.И. Щербак // ПМТФ. – 2001. – Т. 42. – №2.
11. Большаков, А.П. Исследование влияния скорости нагружения, угла ориентации волокон и температуры на прочностные характеристики березы [Текст] / А.П. Большаков, Н.Н. Гердюков, Е.В. Зотов // ПМТФ. – 1998. – Т. 39. – №6. – С. 153-158.
12. Деордиев, С.В. Экспериментальные исследования клеодощатых балок на поперечный изгиб при действии статической и кратковременной динамической нагрузки [Текст] / С.В. Деордиев, Д.Г. Копаница, Г.Д. Копаница, Р.С. Тутатчиков. // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2014. – № 3 (44). – С. 96-111.
13. Деордиев, С.В. Экспериментальные исследования клеодощатых стоек на продольное сжатие при действии статической и динамической нагрузки [Текст] / С.В. Деордиев, Д.Г. Копаница, Р.С. Тутатчиков, А.И. Бирсенев. // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2015. – № 6 (53). – С. 106-115.

#### **Деордиев Сергей Владимирович**

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск  
к.т.н., доцент  
E-mail: [deordievsv@yandex.ru](mailto:deordievsv@yandex.ru)

#### **Копаница Дмитрий Георгиевич**

Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск  
д.т.н., профессор  
E-mail: [kopanitsa@mail.ru](mailto:kopanitsa@mail.ru)

#### **Тутатчиков Роман Сергеевич**

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск  
Старший преподаватель  
E-mail: [r\\_o\\_m\\_ka@mail.ru](mailto:r_o_m_ka@mail.ru)

#### **Краснев Михаил Александрович**

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск  
аспирант  
E-mail: [anger7992@gmail.com](mailto:anger7992@gmail.com)

S. DEORDIEV, D. KOPANITSA, R. TUTATCHIKOV, M. KRASIEV

## AXIAL COMPRESSION SPEED INFLUENCE TO RESISTANCE OF PINE WOOD SAMPLES

*The influence of deformation rate of the timber on the value of the initial modulus of elasticity and tensile strength can significantly affect the result of the construction calculation under the influence of the low-speed load. The experimental results of the pinewood samples of uniaxial compressive load speed range from 4 mm/min. to 1000 mm/min. are given below. The regularities of changing of initial modulus of elasticity and tensile strength along the wood fibres in the radial and tangential directions are found. The dependences of modulus of elasticity and tensile strength of wood from the load speed are revealed. The experiments have shown that depending diagrams of elasticity modulus with increasing load speed are nonlinear with the largest gradient in the initial stage of deformation. Specific forms of experimental specimens destruction under along fibres compression in the radial and tangential directions are found. The exposed to compression in the tangential direction specimens are most sensitive to increasing of the load speed.*

**Keywords:** timber structure; fracture mode; anisotropy of strength properties; quasi-static uniaxial compression; clear specimens; modulus of elasticity.

### BIBLIOGRAPHY

1. Volynskiy, V.N. Vzaimosvyaz' i izmenchivost' pokazateley fiziko-mekhanicheskikh svoystv drevesiny [Tekst]. – Arkhangel'sk : Izd-vo AGTU, 2006. – 217 s.
2. Leont'yev, N.L. Dlitel'noye soprotivleniye drevesiny [Tekst]. – M., Goslesbumizdat, 1957. – 130 s.
3. Ivanov, YU.M. Otsenka dlitel'noy prochnosti drevesiny pri izgibe po rezul'tatam kratkovremennykh ispytaniy [Tekst] / YU.M. Ivanov, YU.YU. Slavik. // IVUZ «Lesnoy zhurnal». – 1981. – №2.
4. Perelygin, L.M. Drevesinovedeniye [Tekst]. – M.: Lesnaya promyshlennost', 1962. – 284 s.
5. Madsen, B. Duration of load test for wet lumber in bending [Text] // *ForesrProducts Journal*. – 1975. - N5. – pp. 33-40.
6. Reid, S.R. Dynamic uniaxial crushing of wood [Text] / S.R. Reid, C. Peng // *Int. J. Impact Engng/* – 1997. – No 19. – pp. 531-570.
7. Harrigan, J.J. Inertial effects on the crushing strength of wood loaded along the grain [Text] / J.J. Harrigan, S.R. Reid, T.R. Reddy // *Experimental Mechanics* (Allison, Ed.), Balkema, Rotterdam. – 1998. – pp. 193-198.
8. Severa, L. Behaviour of wood under dynamic three point bending [Text] / L. Severa, J Buchar, B. Vlach, M. Havlichek // *Acta Universitatis Agriculturae et Silviculturae Mendelinae Brunensis XLVIII.* – 1999. – pp. 27-32.
9. Buchar, J. Model of wood response to the high velocity of loading [Text] / J. Buchar, S. Rolc, J. Lisy, J. Schwengmeier // *19-th International Symposium of Ballistics, 7-11 May 2001. – Interlaken, Switzerland. – 2011. – pp. 1447-1453.*
10. Bol'shakov, A.P. Dempfiruyushchiye svoystva sekvoyi, berezy, sosny i osiny pri udarnom nagruzhении [Tekst] / A.P. Bol'shakov, M.A. Balakshina, N.N. Gerdyukov, Ye.V. Zotov, A.K. Muzyrya, A.F. Plotnikov, S.A. Novikov, V.A. Sinitsyn, D.I. Shestakov, YU.I. Shcherbak // *PMTF*. – 2001. - T. 42. – №2.
11. Bol'shakov, A.P. Issledovaniye vliyaniya skorosti nagruzheniya, ugla oriyentatsii volokon i temperatury na prochnostnyye kharakteristiki berezy [Tekst] / A.P. Bol'shakov, N.N. Gerdyukov, Ye.V. Zotov // *PMTF*. – 1998. – T. 39. – №6. – S. 153-158.
12. Deordiyev, S.V. Eksperimental'nyye issledovaniya kleyedoshchatykh balok na poperechnyy izgib pri deystvii staticheskoy i kratkovremennoy dinamicheskoy nagruzki [Tekst] / S.V. Deordiyev, D.G. Kopanitsa, G.D. Kopanitsa, R.S. Tutatchikov. // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta*. – 2014. – № 3 (44). – S. 96-111.
13. Deordiyev, S.V. Eksperimental'nyye issledovaniya kleyedoshchatykh stoyek na prodol'noye szhatiye pri deystvii staticheskoy i dinamicheskoy nagruzki [Tekst] / S.V. Deordiyev, D.G. Kopanitsa, R.S. Tutatchikov, A.I. Birse-nev. // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta*. – 2015. – № 6 (53). – S. 106-115.

**S. Deordiev**

Siberia Federal University, Krasnoyarsk  
Candidate of techn. sciences, associated professor  
E-mail: [deordievsv@yandex.ru](mailto:deordievsv@yandex.ru)

**D. Kopanitsa**

Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering, Tomsk  
Doctor of techn. sciences, professor  
E-mail: [kopanitsa@mail.ru](mailto:kopanitsa@mail.ru)

**R. Tutatchikov**

Siberia Federal University, Krasnoyarsk  
Senior lecturer  
E-mail: [r\\_o\\_m\\_ka@mail.ru](mailto:r_o_m_ka@mail.ru)

**M. Krasiev**

Siberia Federal University, Krasnoyarsk  
Postgraduate student  
E-mail: [anger7992@gmail.com](mailto:anger7992@gmail.com)

## ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОГИБА И УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ СИММЕТРИЧНОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ

В статье дается вывод аналитической зависимости прогиба статически определимой фермы с параллельными поясами и консольными участками в зависимости от ее размеров и числа панелей. Анализируются асимптотические свойства решения с учетом различных жесткостей стержней поясов и решетки фермы. Усилия в стержнях определяются методом вырезания узлов по программе, написанной в системе компьютерной математики Maple. Обобщение решений, полученных для ферм с различным числом панелей, производится методом индукции. Подобие формул для прогиба позволяет выписать последовательность коэффициентов при соответствующих параметрах фермы. Выводится рекуррентное уравнение, которому удовлетворяют члены последовательности, и находится его решение. Полученное решение позволяет также оптимизировать ферму за счет выбора наиболее рационального распределения сечений стержней поясов и решетки.

**Ключевые слова:** ферма, консоль, прогиб, индукция, Maple, аналитическое решение

Ферма с параллельными поясами и двумя консольными участками опирается на две опоры. Ставится задача получения аналитической зависимости прогиба фермы в середине пролета от числа панелей. Применяется алгоритм, предложенный в [1].

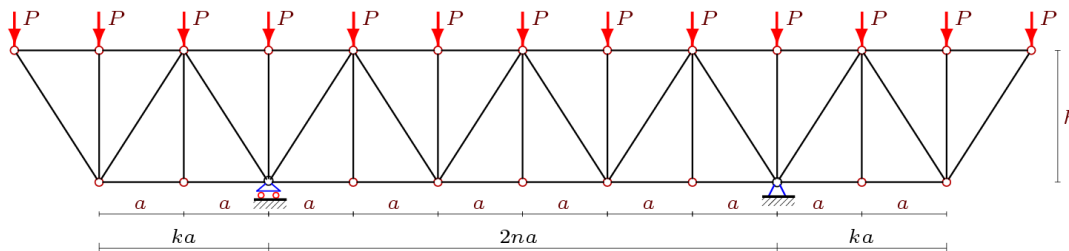


Рисунок 1 – Ферма,  $k=2$ ,  $n=3$

Рассмотрим случай четного числа панелей в среднем пролете фермы и одинаковыми консольными частями. Ферма содержит  $2(n+k)$  панелей,  $2t+2$  шарниров,  $m=4t+4$  стержней (включая три опорные стержня), где  $t=2(n+k)+1$ . Усилия в стержнях фермы определяем методом вырезания узлов. Для этого по координатам узлов (шарниров) составляется матрица направляющих косинусов. Начало координат помещаем в крайний левый шарнир нижнего пояса, ось  $x$  направляем горизонтально, ось  $y$  – вертикально:  $x_j = aj$ ,  $y_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, t$ ,  $x_{j+t} = a(j-1)$ ,  $y_{j+t} = h$ ,  $j = 1, \dots, t+2$ . Затем указываем номера узлов по концам стержней,

условно представляя их векторами  $\vec{V}$ . Направления этих векторов можно выбирать произвольно, на значение усилий и на их знак это не влияет. Стержни нижнего пояса,  $i = 1, \dots, t-1$ :  $\vec{V}_i = [i, i+1]$ ; верхнего пояса,  $i = 1, \dots, t+1$ :  $\vec{V}_{i+t-1} = [i+t, i+t+1]$ ; стойки,  $i = 1, \dots, t$ :  $\vec{V}_{i+2t} = [i, i+t+1]$ ; раскосы:  $i = 1, \dots, k+n+1$ :  $\vec{V}_{i+3t} = [2i-1, 2i-1+t]$ ,  $\vec{V}_{i+3t+k+n+1} = [2i-1, 2i+1+t]$ . Опорный стержень, моделирующий левую подвижную опору, задается вектором  $\vec{V}_m = [k+1, 2t+4]$ , неподвижную опору — векторами:  $\vec{V}_{m-2} = [2n+k+1, 2t+3]$  и  $\vec{V}_{m-1} = [2n+k+1, 2t+4]$ .

Проекции стержней-векторов на оси координат вычисляются через координаты их концов  $l_{x,i} = x_{V_{i,1}} - x_{V_{i,2}}$ ,  $l_{y,i} = y_{V_{i,1}} - y_{V_{i,2}}$  и определяют направляющие косинусы — коэффициенты уравнений равновесия узлов (шарниров) в проекциях. Матрица направляющих косинусов  $G$  имеет компоненты:  $G_{2V_{i,1}-1,i} = l_{x,i} / l_i$ ,  $G_{2V_{i,2}-1,i} = -l_{x,i} / l_i$ ,  $G_{2V_{i,2},i} = -l_{y,i} / l_i$ ,  $l_i = \sqrt{l_{x,i}^2 + l_{y,i}^2}$ . Решение системы уравнений равновесия узлов  $G\bar{S} = \bar{B}$  в зависимости от правой части, в которую входят действующие нагрузки, дает выражения для усилий в стержнях. Решение в системе компьютерной математики Maple [1] может быть получено в символьной форме.

### Решение

Прогиб определяем по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} \frac{S_{i,P} S_{i,1} l_i}{EF},$$

где  $S_{i,P}$  – усилие в стержне  $i$  от действия внешней нагрузки,  $S_{i,1}$  – усилие в стержне  $i$  от действия единичной силы, приложенной в середине пролета к узлу нижнего пояса по направлению перемещения,  $EF$  – жесткость стержней,  $l_i$  – их длины. Суммирование ведется по деформируемым стержням (опорные стержни приняты жесткими). Рассмотрим случай разных сечений стержней. Выделим три группы стержней, выразив площади их сечений через некоторую заданную  $F$ . Стержни верхнего и нижнего поясов длиной  $a$  с сечениями  $F_1 = F / \gamma_1$ ; стойки длиной  $h$  и площадью  $F_2 = F / \gamma_2$ ; и раскосы длиной  $c$  и площадью  $F_3 = F / \gamma_3$ . В результате оказывается, что для любых значений  $k$  и  $n$  решение имеет один и тот же вид

$$\Delta_{k,n} = P \frac{A_{k,n} \gamma_1 a^3 + H_{k,n} \gamma_2 h^3 + C_{k,n} \gamma_3 c^3}{2h^2 EF}, \quad (1)$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$  — длина раскосов. Коэффициенты  $A_{k,n}$ ,  $H_{k,n}$ ,  $C_{k,n}$  зависят только от чисел  $k$  и  $n$ . Решение задачи при различных значениях  $k$  и  $n$  показывает, что коэффициент  $C_{k,n}$  имеет простой вид:  $C_{k,n} = n^2$ . Другие коэффициенты можно получить только методом индукции, причем сначала надо провести индукцию по одному параметру и выявить серию формул для коэффициента, затем полученную серию формул обобщить методом индукции по другому параметру. Общие члены последовательностей коэффициентов можно получить с помощью операторов `rgf_findrecur` и `rsolve` системы Maple [1]. Требуется анализ решений от восьми до десяти ферм с последовательно увеличивающимися числами  $n$  и  $k$ . В результате получаем

$$A_{k,n} = n^2 (5n^2 - 6k^2 - 18k - 11) / 6, \quad H_{k,n} = (2n + 2k + 3)(1 + (1 - (-1)^k) / 2).$$

Аналогично, но несколько длиннее, выводится формула для прогиба консоли от действия указанной нагрузки. Формула при этом получает тот же вид (1), но с коэффициентами

$$A_{k,n} = -4n^3 (k + 1) / 3 + (6k^3 + 24k^2 + 31k + 13)n / 3 + (3k^4 + 16k^3 + 33k^2 + 32k + 12) / 6, \\ H_{k,n} = (n + k + 3 / 2)(3 - (-1)^k), \quad C_{k,n} = (k + 1)(k + 2).$$

Индукция также проводится в два этапа. Сначала при фиксированном значении  $k$  выводятся формулы, дающие зависимость от  $n$ , затем для этих результатов находится обобщение по значению  $k$ . При получении коэффициента  $A_{k,n}$  потребовалось найти десять формул при  $k=0,1,2,\dots,9$ :  $A_{0,n} = -4n^3 / 3 + 13n / 3 + 2$ ,  $A_{1,n} = -8n^3 / 3 + 74n / 3 + 16$ ,  $A_{2,n} = -4n^3 + 73n + 64$ ,

...,  $A_{9,n} = -40n^3/3 + 6610n/3 + 5720$ . Если коэффициенты при  $n^3/3$  в этих формулах образуют достаточно очевидную последовательность по  $k$ , то для последовательности коэффициентов 13, 74, 219, 484, 905, 1518, 2359, 3464 при  $n/3$  с помощью оператора `rgf_findrecur` необходимо получить рекуррентное уравнение  $z_k = 4z_{k-1} - 6z_{k-2} + 4z_{k-3} - z_{k-4}$ , решение которого с начальными условиями  $z(0) = 13, z(1) = 74, z(2) = 219, z(3) = 484$  дает искомый коэффициент.

Приведенный алгоритм решения может быть применен для вывода формул и для других типов нагрузок: распределенных по нижнему поясу, сосредоточенных на консолях и в середине пролета и др.

### Анализ прогиба

Зафиксируем суммарную нагрузку на ферму  $P_0 = (2n + 2k + 3)P$  и общую длину фермы  $L = 2(n + k)a$ . Пусть сечения всех стержней фермы одинаковые:  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$ . Обозначим безразмерный прогиб фермы  $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$ . Кривые зависимости прогиба середины пролета (1) при разных длинах консолей изображены на рисунке 2 при  $L=100$  м,  $h=3$  м. Отрицательные прогибы при малых  $n$  объяснимы — консольные части под действием вертикальной нагрузки вызывают изгиб среднего пролета вверх. При  $k=1$  этот эффект отсутствует, с удлинением консолей — усиливается.

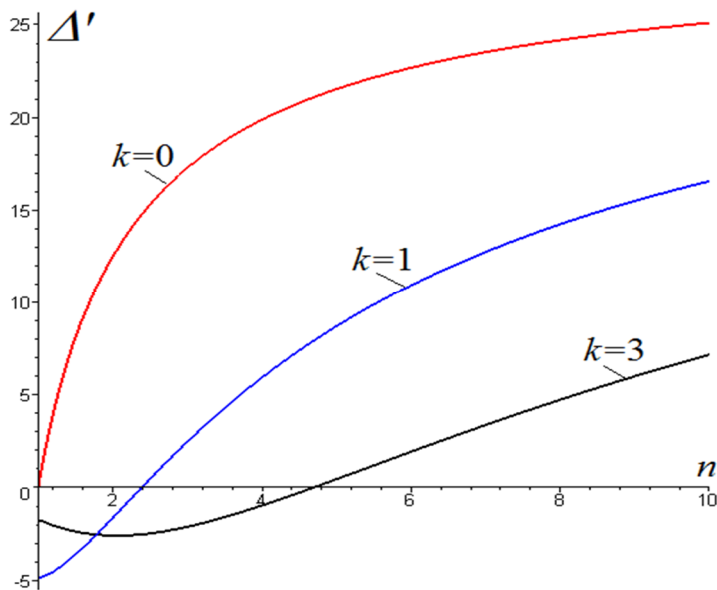


Рисунок 2 – Прогиб в зависимости от числа панелей ( $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$ )

Интересно отметить, что кривые зависимости прогиба от числа панелей в указанной постановке (фиксированный пролет) сильно зависят от распределения площадей сечений стержней по выделенным группам. Если увеличить площадь сечений поясов и уменьшить сечения решетки,  $\gamma_1 = 0,5, \gamma_2 = \gamma_3 = 2$ , то характер кривых (особенно для фермы с малыми боковыми консолями) изменится (рис. 3).

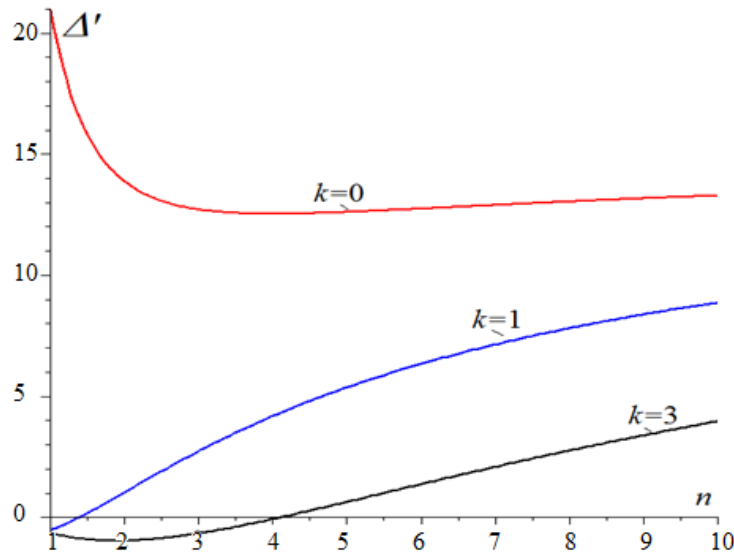


Рисунок 3 – Прогиб в зависимости от числа панелей ( $\gamma_1 = 0,5$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = 2$ )

С увеличением числа панелей  $n$  в среднем пролете рост прогиба замедляется, однако на горизонтальные асимптоты кривые не выходят. Угол наклона асимптоты дает предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = \gamma_3 h / (2L)$ . Полученная оценка не зависит от числа панелей на консоли  $k$  и коэффициентов площадей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

**Анализ усилий в стержнях**

Найдем усилия в стержнях верхнего и нижнего пояса в наиболее опасном месте — в середине пролета. Не прибегая к методу индукции методом сечений, получим усилие в среднем стержне верхнего пояса фермы

$$S_{t+k+n,P} = -Pa(n^2 - k^2 - 3k - (5 - (-1)^{k+n}) / 2) / h .$$

В зависимости от сочетания  $k$  и  $n$  этот стержень сжат или растянут. Аналогично, усилие в среднем стержне нижнего пояса имеет вид

$$S_{k+n,P} = Pa(n^2 - k^2 - 3k - (5 + (-1)^{k+n}) / 2) / h .$$

**Выводы**

Совместное использование математического пакета Maple с методом индукции позволило получить и проанализировать точную формулу для прогибов фермы. Эти решения применимы для тестирования результатов численных решений, полученных в специализированных пакетах. Рассмотренная ферма может являться основной системой для статически неопределимой фермы, в которой, например, шарниры заменены сваркой. В этом случае найденные формулы частично упрощают решение задачи. Кроме того, этот результат может быть полезен и практическому инженеру для первичной оценки прогиба системы. Полученное решение позволяет также оптимизировать ферму за счет выбора наиболее рационального распределения сечений стержней поясов и решетки.

Обзоры аналитических решений, полученных с использованием рассмотренного алгоритма, содержатся в работах [2-4]. Метод индукции по двум параметрам использован в [5-7] при построении линий влияния. Аналитическое выражение для прогиба балки с параллельными поясами под действием нагрузки по нижнему поясу получено в [8].

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Кирсанов, М. Н. Maple и Maplet. Решение задач механики/ М.Н. Кирсанов. — СПб.: Изд-во Лань, 2012. — 512 с.

2. Кийко, Л. К. Аналитическая оценка прогиба арокной фермы под действием ветровой нагрузки / Л.К. Кийко // Научный вестник. — 2016. — № 1 (7). — С. 247—254.
3. Тиньков, Д. В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций / Д. В. Тиньков // Инженерно-строительный журнал. — 2015. — №5(57). — С. 66—73.
4. Тиньков, Д. В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций / Д. В. Тиньков // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2015.— №6. — С. 21-28.
5. Al-Shahrabi, A. M. Line of influence of the deflection for cantilever truss / A. M. Al-Shahrabi, M.N. Kirsanov // Вестник научных конференций. — 2016. № 2-1(6). — С. 6—7.
6. Dong, X. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels/ X. Dong, M.N. Kirsanov // Вестник научных конференций.— 2016. —№ 1-4 (5). — С. 6—7.
7. Jiang, H. An analytical expression for the influence line of the truss/ H. Jiang, M.N. Kirsanov // Вестник научных конференций. — 2016. — № 1-5(5). — С.10—11.
8. Ponamareva, M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load/ M.A. Ponamareva// Научный альманах. — 2016. — № 4-3(18). — С.257—259.

**Кирсанов Михаил Николаевич**

Национальный исследовательский университет "МЭИ", Москва

Доктор физико-математических наук, профессор,

E-mail: [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru)

---

M. KIRSANOV

**FORMULAS FOR CALCULATING OF DEFLECTION AND STRESSES  
IN THE BARS OF SYMMETRICAL TRUSS**

*The analytic dependence of deflection of statically determinate trusses with parallel belts and console sections, depending on its size and number of panels is obtained. Analyzes of asymptotic properties of the solutions taking in to account different stiffness rods of the belts, and lattice. The forces in the rods are determined by cutting out the nodes by the author's program written for the computer algebra system Maple. Generalization of the solutions obtained for trusses with different number of panels produced by the method of induction. The similarity of the formulas for deflection allows to write the sequence of coefficients of the respective parameters of the truss. Using a system Maple displays the recurrence equation which satisfy the members of the sequence and its solution. The solution also allows to optimize the farm due to the choice of the most rational distribution of element cross-sections.*

**Keywords:** truss, console, deflection, induction, Maple, analytical solution

**BIBLIOGRAPHY**

1. Kirsanov, M. N. Maple i Maplet. Resheniye zadach mekhaniki/ M.N. Kirsanov. — SPb.: Izd-vo Lan', 2012. — 512 s.
2. Kiyko, L. K. Analiticheskaya otsenka progiba arochnoy fermy pod deystviyem vetrovoy nagruzki / L.K. Kiyko // Nauchnyy vestnik. — 2016. — № 1 (7). — S. 247—254.
3. Tin'kov, D. V. Sravnitel'nyy analiz analiticheskikh resheniy zadachi o progibe fermennykh konstruksiy / D. V. Tin'kov // Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal. — 2015. — №5(57). — S. 66—73.
4. Tin'kov, D. V. Analiz tochnykh resheniy progiba regul'yarnykh sharnirno-sterzhnevyykh konstruksiy / D. V. Tin'kov // Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy. — 2015.— №6. — S. 21-28.
5. Al-Shahrabi, A. M. Line of influence of the deflection for cantilever truss / A. M. Al-Shahrabi, M.N. Kirsanov // Vestnik nauchnykh konferentsiy. — 2016. № 2-1(6). — S. 6—7.
6. Dong, X. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels/ X. Dong, M.N. Kirsanov // Vestnik nauchnykh konferentsiy.— 2016. —№ 1-4 (5). — S. 6—7.
7. Jiang, H. An analytical expression for the influence line of the truss/ H. Jiang, M.N. Kirsanov // Vestnik nauchnykh konferentsiy. — 2016. — № 1-5(5). — S.10—11.
8. Ponamareva, M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load/ M.A. Ponamareva// Nauchnyy al'manakh. — 2016. — № 4-3(18). — S.257—259.

**M. Kirsanov**

National Research University "MPEI", Moscow

Doctor of Phys. and Math. sciences, professor,

E-mail: [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru)

КОЛЧУНОВ Вл.И., ДЕМЬЯНОВ А.И., КАЩАВЦЕВ А.А.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ КОРРОЗИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ И ИХ АНАЛИЗ

*В статье произведен анализ результатов экспериментальных исследований деформирования и разрушения пяти серий железобетонных балок сплошного и составного сечений, включая образцы с моделированием коррозионного повреждения. Приведено краткое описание методики и программы испытаний железобетонных конструкций.*

*Выполнен анализ влияния основных варьируемых параметров (значений пролетов среза, наличия шва контакта, структуры сечения коррозионно поврежденных образцов) на форму разрушения и несущую способность по наклонному сечению сплошных и составных конструкций. Уделено внимание и случаю разрушения составной железобетонной балки по шву контакта двух бетонов. Дан анализ особенностей основных видов напряженно-деформированного состояния в зоне с наклонными трещинами, которые необходимо учитывать при обосновании соответствующих критериев прочности.*

**Ключевые слова:** экспериментальные исследования, железобетонные составные конструкции, прочность, наклонные сечения, силовое нагружение, коррозионное повреждение, шов контакта, критерии прочности.

**Постановка проблемы.** Несмотря на значительное число проведенных исследований, экспериментальные данные о характере и схемах разрушения коррозионно поврежденных железобетонных составных конструкций практически отсутствуют. При этом характер и критерии разрушения таких конструкций могут быть отличными от разрушений железобетонных элементов сплошного сечения. В работах [6–8] экспериментально подтверждено существенное влияние жесткостных характеристик шва контакта на характер деформирования и несущую способность составных железобетонных конструкций.

**Анализ достижений и публикаций.** В зоне с наклонными трещинами этот вопрос еще более усложняется из-за неоднозначности предельного напряженно-деформированного состояния, параметры которого требуют экспериментального уточнения. Что же касается исследований воздействия коррозионных повреждений на прочность по наклонному сечению железобетонных составных конструкций, то они практически (за редким исключением) не проводились [7–8]. Поэтому избранная тема исследований весьма актуальна.

В качестве исключений можно выделить исследования [9, 10]. В работе [9] приводятся результаты исследования несущей способности коротких железобетонных балок-стенок, подвергнутых воздействию солевой среды в течение 28 лет, и сравнение их прочности и характера разрушения с аналогичными неповрежденными образцами того же возраста.

В результате выдержки образцов в солевой среде произошло значительное корродирование как продольной, так и поперечной арматуры с максимальным уменьшением поперечного сечения стержней до 50%. В ходе испытаний было выявлено, что высокий уровень коррозии поперечной арматуры может привести к продольному раскалыванию околоопорной зоны балки, вызывая затем полное разрушение по бетону сжатой зоны. В работе [10] были проведены экспериментальные исследования несущей способности железобетонных балок с пролетом среза 2,0, подвергнутых воздействию солевой среды (3,5% NaCl) в течение 120 дней с шагом поперечных стержней 150 мм (1 серия) и 200 мм (2 серия). В результате было установлено, что коррозионное воздействие вызвало нарушение сцепления арматуры с бетоном, в результате чего несущая способность по наклонному сечению уменьшилась в среднем на 30% для первой группы и на 20% для второй группы образцов по сравнению с контрольными неповрежденными образцами.

Здесь уместно отметить, что попытка решения проблемы коррозии путем использования арматуры из композитных материалов, оказалась не достаточно удачной. Дело в том, что применение коррозионностойкой композитной арматуры [12, 14] имеет недостаток в виде уменьшения жесткости конструкций, и связанные с этим увеличение прогибов и уменьшение несущей способности по сравнению с образцами, имеющими стальное армирование.

**Исследовательская часть.** При подготовке и проведении экспериментальных исследований [5] в качестве основной формулировалась задача экспериментального определения схем разрушения конструкций в зонах наклонных трещин, влияния основных варьируемых параметров (значений пролетов среза, наличия шва контакта, структуры сечения коррозионно поврежденных образцов) на характер разрушения и несущую способность исследуемых конструкций.

Конструкции опытных образцов.

Программа экспериментальных исследований железобетонных составных конструкций с моделированием коррозионного износа включала лабораторные испытания пяти серий железобетонных балок слоистого сечения (рис. 1). Сечение конструкции балки было запроектировано и выполнено слоистым. По высоте сечение балки состояло из двух слоев: нижний (3), класса В20, который моделировал бетон первоначального проектного решения конструкции; верхний слой бетона (4) класса В30 моделировал бетон, наращиваемый при усилении балки в процессе эксплуатации.

Коррозионные повреждения эксплуатируемой после усиления составной конструкции моделировали дополнительным внешним слоем из более слабых бетонов: в зоне основного бетона - классом В12,5 (5) и в зоне усиления - классом В20 (6).

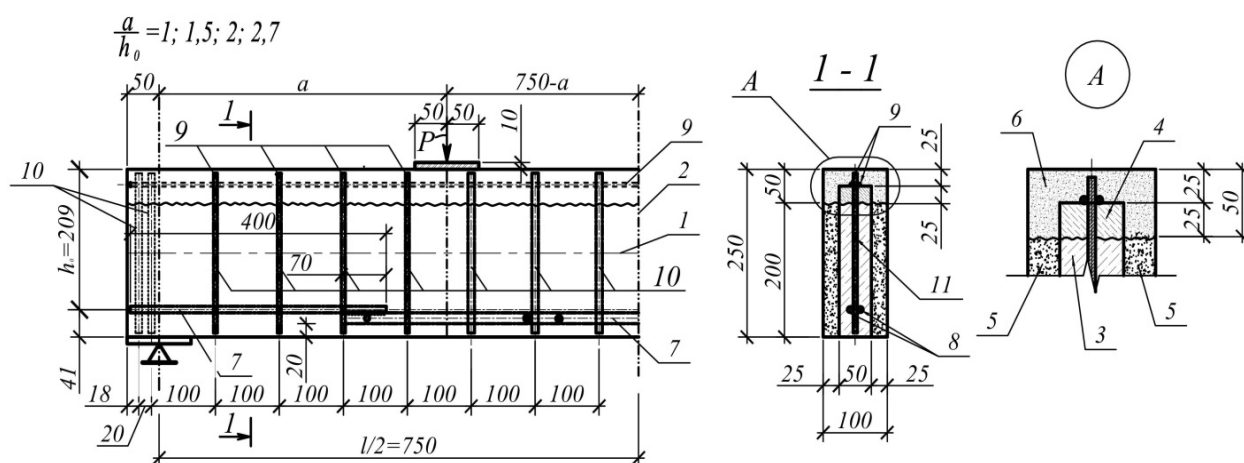


Рисунок 1 – Конструкции опытных образцов:

- 1, 2 – продольная и вертикальная оси образца;
- 3 – основной бетон (класс В20);
- 4 – бетон усиления (класс В30);
- 5, 6 – коррозионно-поврежденные основной бетон (класс В12,5) и бетон усиления (класс В20);
- 7, 8 – рабочая арматура в середине пролета (2Ø16 А400С) и в приопорной зоне (2Ø10 А400С);
- 9 – арматура в сжатой зоне (2Ø6 А240С); 10 - поперечные стержни (Ø6, Ø10 А240С)

Количество испытываемых конструкций в каждой серии было принято с учетом возможности варьирования диаметра и шага поперечных стержней, продольного армирования, класса основного и дополнительного бетонов и пролета «среза», наличием или отсутствием внешних ослабленных слоев, моделирующих коррозионные повреждения. В состав каждой серии входили образцы конструкций, имеющие слои бетона более низкой прочности по отношению к основному бетону и образцы конструкций с неповрежденным бетоном в каждом элементе. Для доведения до разрушения второго пролета среза опытных образцов использовались специальные стяжки из металлических пластин и шпилек. Перечень и характеристики

экспериментальных конструкций приведены в таблице 1. Здесь же дана принятая маркировка опытных балок.

Таблица 1 – Перечень и характеристики экспериментальных конструкций

№ серии	№ п/п конструкции	Шифр конструкции	h, мм	b, мм	l, мм	Арматура растянутой (сжатой) зоны, диаметр – мм, класс	Высота слоя старого бетона, мм	Высота слоя бетона усиления, мм	Класс бетона основного образца	Класс Бетона усиления	Глубина коррозионного повреждения, мм	Класс ослабленного бетона основного образца/ бетона усиления
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
I	1	БО-I-1,5-150- Ø6(I)	250	100	1600	2Ø10A400C (2Ø6A240C)	250	–	B20	–	–	–
	1a	БО-I-1,5-150- Ø6(Ia)										
	2	БС0-I-1,5-150- Ø6(I)	250	100	1600	2Ø10A400C (2Ø6A240C)	200	50	B20	B30	–	–
	2a	БС0-I-1,5-150- Ø6(Ia)										
	3	БСК-I-1,5-150- Ø6(I)	250	100	1600	2Ø10A400C (2Ø6A240C)	200	50	B20	B30	25	12,5/20
3a	БСК-I-1,5-150- Ø6(Ia)											
II	4	БО-II-2,7-100-Ø6(I)	250	100	1600	2Ø10A400C (2Ø6A240C)	250	–	B20	–	–	–
	4a	БО-II-2,7-100-Ø6(Ia)										
	5	БС0-II-2,7-100-Ø6(I)	250	100	1600	2Ø10A400C (2Ø6A240C)	250	50	B20	B30	–	–
	5a	БС0-II-2,7-100-Ø6(Ia)										
	6	БСК-II-2,7-100-Ø6(I)	250	100	1600	2Ø10A400C (2Ø6A240C)	250	50	B20	B30	25	12,5/20
	6a	БСК-II-2,7-100-Ø6(Ia)										
III	7	БО-III-2,7-100-Ø10(I)	250	100	1600	2Ø10A400C (2Ø6A240C)	250	–	B20	–	–	–
	7a	БО-III-2,7-100-Ø10(Ia)										
	8	БС0-III-2,7-100-Ø10(I)	250	100	1600	2Ø10A400C (2Ø6A240C)	200	50	B20	B30	–	–
	8a	БС0-III-2,7-100-Ø10(Ia)										
	9	БСК-III-2,7-100-Ø10(I)	250	100	1600	2Ø10A400C (2Ø6A240C)	200	50	B20	B30	25	12,5/20
	9a	БСК-III-2,7-100-Ø10(Ia)										
IV	10	БО-IV-1,0-150- Ø6(I)	250	100	1600	2Ø10A400C (2Ø6A240C)	250	–	B20	–	–	–
	10a	БО-IV-1,0-150- Ø6(Ia)										
	11	БС0-IV-1,0-150- Ø6(I)	250	100	1600	2Ø10A400C (2Ø6A240C)	250	50	B20	B30	–	–
	11a	БС0-IV-1,0-150- Ø6(Ia)										
	12	БСК-IV-1,0-150- Ø6(I)	250	100	1600	2Ø10A400C (2Ø6A240C)	250	50	B20	B30	25	12,5/20
	12a	БСК-IV-1,0-150- Ø6(Ia)										
V	13	БО-V -2,0-100- Ø6(I)	250	100	1600	2Ø10A400C (2Ø6A240C)	250	–	B20	–	–	–
	13a	БО-V -2,0-100- Ø6(Ia)										
	14	БС0-V -2,0-100- Ø6(I)	250	100	1600	2Ø10A400C (2Ø6A240C)	200	50	B20	B30	–	–
	14a	БС0-V -2,0-100- Ø6(Ia)										
	15	БСК-V -2,0-100- Ø6(I)	250	100	1600	2Ø10A400C (2Ø6A240C)	200	50	B20	B30	25	12,5/20
	15a	БСК-V -2,0-100- Ø6(Ia)										

\*Шифр конструкции включает номер серии, БО - балка сплошного сечения, БС0 и БСК – балка составного сечения соответственно без коррозионного повреждения и с коррозионным повреждением; 1,5; 2,7; 1,0; 2,0 – пролеты среза; 100; 150 – шаг поперечной арматуры; Ø6, Ø10 – диаметры поперечных стержней в шве, в зоне чистого изгиба; (I) – исследование образцов по первой группе предельных состояний (первый этап); (Ia) – то же после установки стяжек (второй этап)

В процессе экспериментальных исследований по специально разработанной методике [5] методом электротензометрии и с помощью механических приборов производилось измерение деформаций различных слоев бетона и на берегах шва контакта бетонов [1]. С помо-

щью микроскопа измерялась ширина раскрытия трещин в заранее обозначенных зонах конструкции.

Общий вид испытаний экспериментальных конструкций приведен на рис. 2. В результате испытания были получены основные характерные формы разрушения по наклонному сечению исследуемых составных конструкций.



Рисунок 2 – Общий вид испытаний экспериментальных конструкций

**Обоснование полученных результатов.** Результаты экспериментальных исследований. Испытания пяти серий сплошных и составных конструкций без коррозионных повреждений и с моделированием коррозионных повреждений (см. табл. 1) с доведением до разрушения каждого опытного образца позволили экспериментально выявить следующие особенности деформирования и разрушения составных конструкций в зоне наклонных трещин. Картины разрушения составных балок без моделирования коррозионного повреждения (образцы БСО) и балок с моделированием коррозионного повреждения поверхностным слоем ослабленного бетона (образцы БСК) качественно не изменялись. Отсюда следует вывод о том, что расчет железобетонных составных конструкций, поврежденных коррозией, по наклонному сечению может выполняться по той же методике, что и для неповрежденных конструкций.

Анализ полученных картин разрушения опытных конструкций позволяет отметить следующее.

В ходе испытания образца первой серии с коррозионным повреждением БСК-I-1,5-150-Ø6(I) разрушение наступило на XVIII ступени нагружения (при общей нагрузке  $\sum P_u = 120$  кН) от среза с раздавливанием бетона сжатой зоны (зона А, рис. 3, а).

Сопротивление составных конструкций второй серии характеризовалось наличием нескольких зон разрушения. В ходе силового нагружения образца второй серии БСК-II-2,7-100-Ø6(I) с коррозионным повреждением на VIII ступени нагружения ( $P/P_u = 0,7$ ) произошло хрупкое разрушение шва контакта составной конструкции в пределах блока между двумя наклонными трещинами (зона В, рис. 3, б), а так же локальное нарушение сцепления с бетоном вдоль продольной арматуры (зона С, рис. 3, б). XI ступень нагружения ( $P/P_u = 0,9$ ) характеризовалась выкалыванием бетона над опорой (зона D, рис. 3б). Полное хрупкое разрушение образца наступило на XIII ступени нагружения ( $\sum P_u = 85$  кН) в виде среза с выколом бетона сжатой зоны (зоны А, рис. 3, б).

Разрушение составной балки третьей серии без коррозионного повреждения БСО-III-2,7-100-Ø10(I) с пролетом среза  $a/h_0 = 2,7$  произошло вследствие разрушения шва контакта составного образца (зона В, рис. 3, в) с последующим срезом бетона сжатой зоны (зона А,

рис. 3, в) на XII ступени нагружения ( $\Sigma P_u=90$  кН). Для этого опытного образца выключение из работы шва контакта стало определяющим фактором, приведшим к потере несущей способности. Этот вид разрушения подтверждает важную значимость работы шва контакта двух бетонов в составных конструкциях на исчерпание ресурса силового сопротивления в зоне с наклонными трещинами.

В отдельных случаях наличие коррозионного повреждения оказывает влияние на схему разрушения исследуемых составных конструкций. Так, при испытании образцов IV серии с пролетами среза  $a/h_0=1,0$  потеря несущей способности поврежденных и не поврежденных коррозией опытных балок произошла по разным схемам разрушения (см. рис. 3, з, д). Образец БСО–IV–1,0–150–Ø6(I) без коррозионного повреждения разрушился от раздробления бетона по наклонной сжатой полосе в пределах блока между двумя наклонными трещинами (зона Е, рис. 3, з). Раздробление бетона произошло хрупко в наклонной полосе, идущей от опоры к месту приложения сосредоточенной силы.

Опытная балка IV серии с коррозионным повреждением БСК–IV–1,0–150–Ø6(I) разрушилась от потери сцепления в зоне анкерования продольной арматуры (зона F, рис. 3, з). Разрушение происходило в виде раздробления бетона вдоль продольной арматуры за наклонной трещиной по направлению к опоре в результате потери прочности анкерования. При этом в ходе нагружения конструкции образовавшиеся на более ранних этапах наклонные трещины практически не развивались вплоть до момента разрушения балки от потери сцепления. Бетон сжатой зоны (зона А, рис. 3, д) так же не разрушился.

Определяющими параметрами, оказывающими влияние на схему и характер разрушения исследуемых составных конструкций явились длина пролета среза  $a/h_0$ , наличие шва контакта бетонов и структура сечения опытных образцов с моделированием коррозионного повреждения.

Так, для образцов с пролетом среза  $a/h_0=2,7$  разрушение происходит от раздробления или выкола бетона над вершиной критической наклонной трещины. При уменьшении длины пролета среза до  $a/h_0=1,5-2,0$  конструкции составных балок разрушаются от среза или от среза с раздавливанием бетона сжатой зоны. Для составных конструкций, имеющих малый пролет среза  $a/h_0=1,0$ , схемы разрушения представляют собой срез (разрыв) бетона по направлению критической наклонной трещины или раздробление бетона в пределах блока между наклонными трещинами (разрушение по наклонной сжатой полосе, идущей от опоры к месту приложения сосредоточенной силы). Кроме того, в случае исчерпания прочности анкерования продольной рабочей арматуры возможна схема разрушения по растянутой опорной зоне в результате взаимного смещения продольной арматуры и бетона. В этом случае напряжения и деформации в бетоне сжатой зоны остаются ниже своих предельных значений.

Помимо названных схем разрушения, для составных конструкций при больших пролетах среза  $a/h_0=2,7$  характерен случай разрушения по шву контакта двух бетонов – верхнего (3,5) и нижнего (4,6) (см. рис. 1). Испытаниями установлено, что с уменьшением пролета среза и, соответственно, величины относительного максимального момента, действующего в сечении ( $M_{max}/Q$ ), исчерпание прочности шва контакта, как правило, не происходит.

Выполнен анализ влияния коррозионных повреждений на несущую способность по наклонному сечению при различных пролетах среза исследуемых конструкций. При уменьшении длины пролета среза  $a/h_0$  от 2,7 до 1,0 разрушающая нагрузка  $\Sigma P_u$  увеличивается в 2,6 раза для неповрежденных образцов и в 1,9 раза для составных конструкций с моделируемым коррозионным повреждением (рис. 4). Степень влияния коррозионного повреждения на прочность составных конструкций в свою очередь так же зависит от значений пролетов среза (табл. 2 к рис. 4). При испытаниях конструкций несущая способность под воздействием коррозионного повреждения уменьшается на 9–39% соответственно для пролетов среза  $a/h_0=2,7-1,0$ .

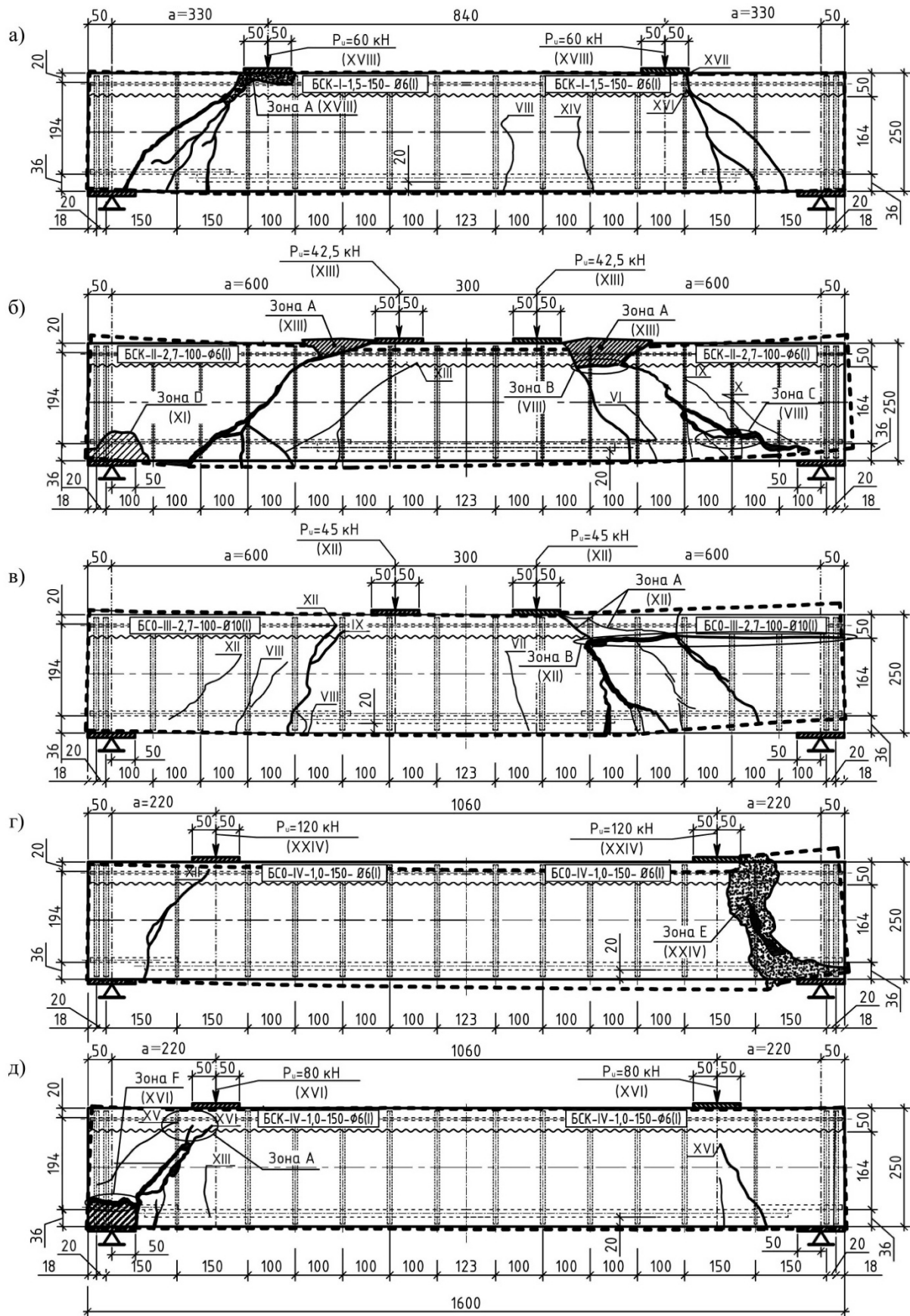


Рисунок 3 – Схемы разрушения неповрежденных и коррозионно поврежденных конструкций опытных образцов составных балок при варьировании пролетами среза

Несущая способность коррозионно поврежденных составных конструкций с различной интенсивностью поперечного армирования изменяется более заметно при небольших пролетах среза  $a/h_0=1,0-1,5$  (до 25%) и незначительно при пролетах среза  $a/h_0=2,0-2,7$  (до 8%).

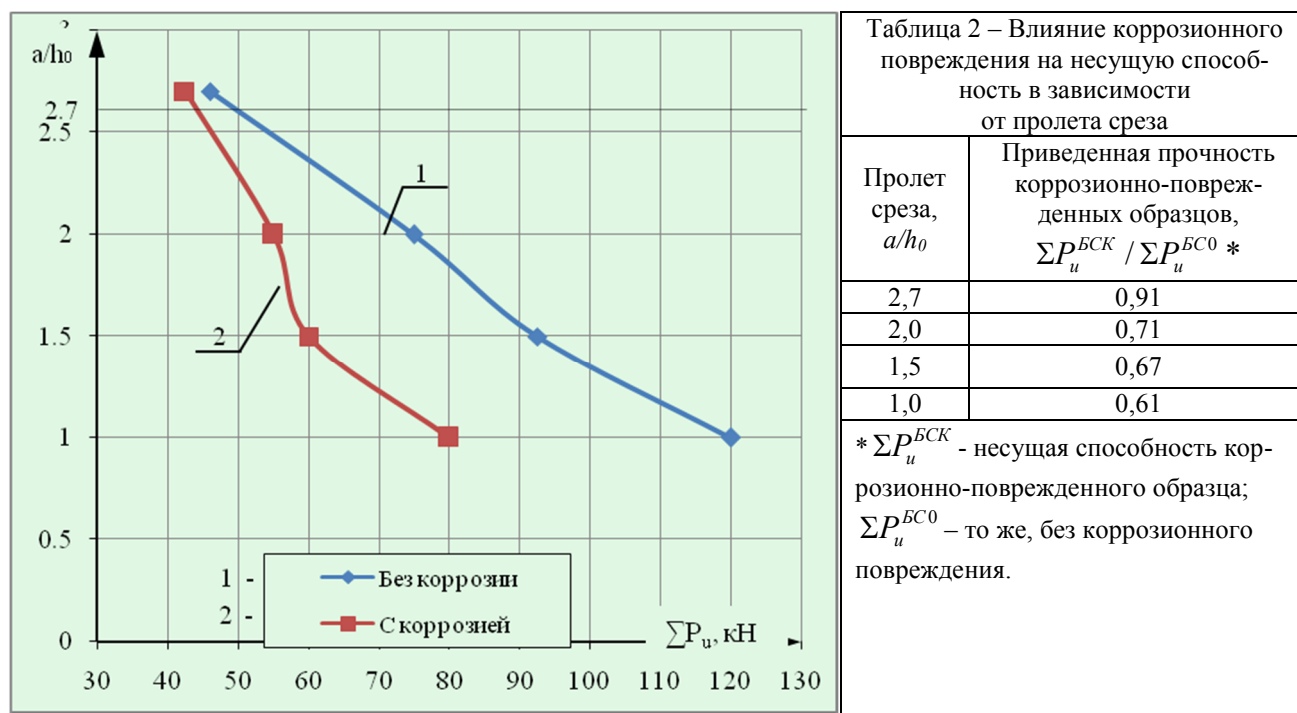


Рисунок 4 – Зависимость несущей способности  $\Sigma P_u$ , кН от значений пролетов среза  $a/h_0=1,0; 1,5; 2,0; 2,7$  для образцов: 1 – без коррозионного повреждения (образцы БС0); 2 – с наличием коррозионного повреждения (образцы БСК)

Основные параметры разрушения (вид разрушения и значение несущей способности  $\Sigma P_u$ ) исследованных опытных конструкций всех серий приведены в табл. 3, наиболее характерные схемы разрушения образцов представлены на рис. 3.

Основные качественные особенности, обнаруживаемые экспериментальным путем для каменных материалов и бетона, заключаются в том, что для этих материалов в зависимости от типа напряженного состояния характерны два вида разрушения: от отрыва по плоскости, перпендикулярной действующей силе, и путем сдвига по наклонной площадке, статически наиболее близкой к октаэдрической.

Так как  $\gamma_{окт}$  и  $\tau_{окт}$  с точностью до числового коэффициента совпадают с величинами  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$ , то следствием из этого результата является необходимость привлечения диаграммы  $\sigma_i - \varepsilon_i$  для описания напряженно-деформированного состояния бетона при сложных напряженных состояниях.

При этом распространение характеристики  $\varepsilon_{bu}$  (предельной деформации укорочения бетона) на случай сложного сопротивления при совместном действии изгибающего момента и поперечной силы выполнено в монографии [2]. Здесь уже в качестве критерия прочности предложен критерий:

$$\varepsilon_i \leq \varepsilon_{bu}, \tag{1}$$

где  $\varepsilon_i$  — интенсивность деформаций укорочения бетона, связанная с октаэдрическими сдвигами.

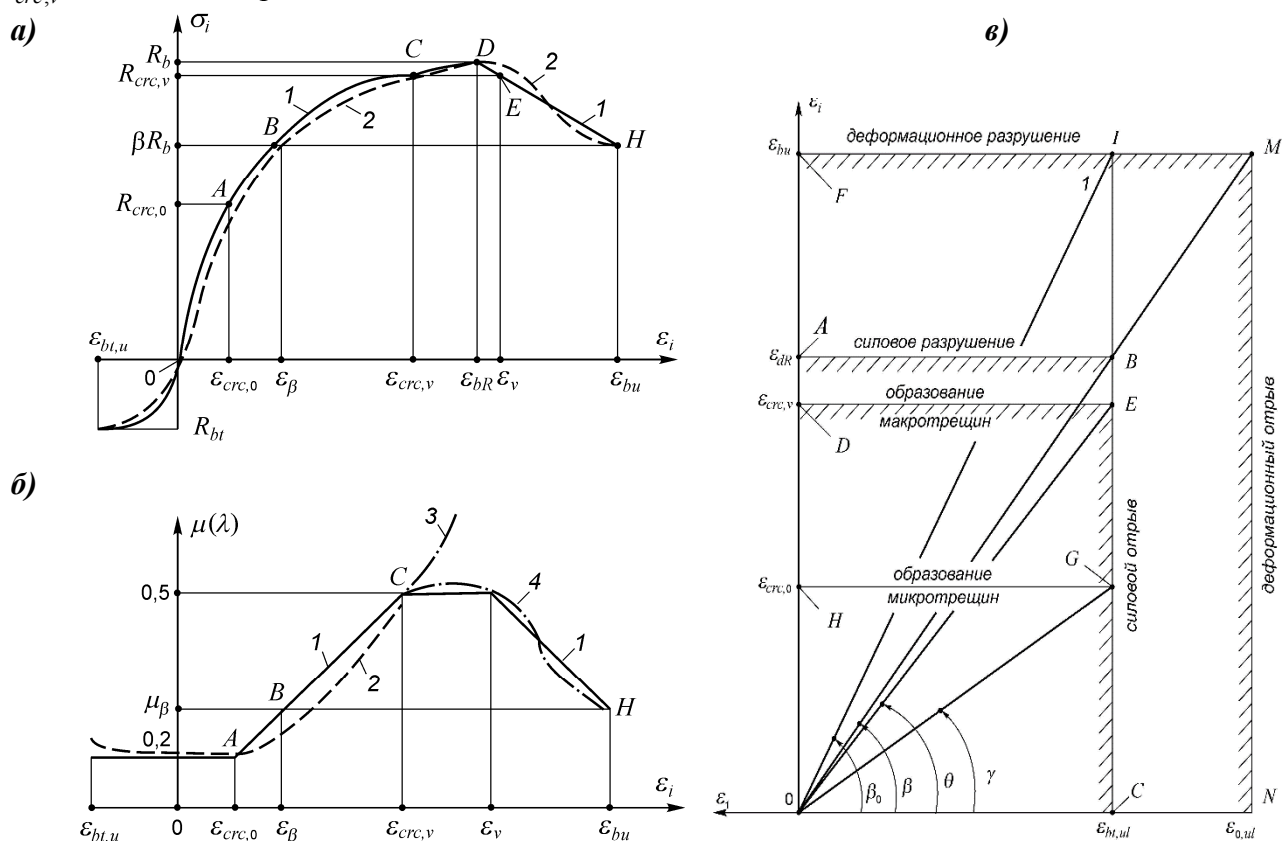
Таблица 3 – Характер и основные параметры разрушения исследуемых конструкций сплошного и составного сечений

Тип конструкции	Шифр конструкции	Пролет среза, $a/h_0$	Суммарная нагрузка в долях от разрушающей момент хрупкого разрушения шва контакта составной конструкции, $\sum R/\sum R_u$ ( $\sum R_u$ , кН)	Характер разрушения опытного образца	Численное значение суммарной нагрузки в момент разрушения $\sum R_u$ , кН
сплошного сечения	БО-IV-1,0-150- Ø6(I)	1,0	-	срез бетона сжатой зоны по критической наклонной трещине	160
	БО-I-1,5-150- Ø6(I)	1,5	-	срез с раздавливанием бетона сжатой зоны и раскалывание бетона около-арматурной зоны на участке между опорой и местом приложения сосредоточенной силы	125
	БО-V -2,0-100- Ø6(I)	2,0	-	срез бетона сжатой зоны по критической наклонной трещине	130
	БО-II-2,7-100-Ø6(I)	2,7	-	раздробление бетона сжатой зоны над вершиной критической наклонной трещины	84
	БО-III-2,7-100-Ø10(I)	2,7	-	раздробление бетона сжатой зоны над вершиной критической наклонной трещины	100
составного сечения, неповреждённого коррозией	БС0-IV-1,0-150- Ø6(I)	1,0	-	раздробление бетона по наклонной сжатой полосе в пределах блока между двумя наклонными трещинами	240
	БС0-I-1,5-150- Ø6(I)	1,5	-	срез с раздавливанием бетона сжатой зоны	185
	БС0-V -2,0-100- Ø6(I)	2,0	-	срез бетона сжатой зоны по критической наклонной трещине	150
	БС0-II-2,7-100-Ø6(I)	2,7	$0,8\sum R_u$ (70)	выкол со срезом бетона сжатой зоны	92
	БС0-III-2,7-100-Ø10(I)	2,7	$1,0\sum R_u$ (90)	Хрупкое разрушение шва контакта с последующим срезом бетона сжатой зоны	90
составного сечения с моделированием коррозионного повреждения	БСК-IV-1,0-150- Ø6(I)	1,0	-	раздробление бетона вдоль продольной арматуры за наклонной трещиной по направлению к опоре в результате потери прочности анкеровки	160
	БСК-I-1,5-150- Ø6(I)	1,5	-	срез с раздавливанием бетона сжатой зоны	120
	БСК-V -2,0-100- Ø6(I)	2,0	-	выкол бетона сжатой зоны	110
	БСК-II-2,7-100-Ø6(I)	2,7	$0,7\sum R_u$ (55)	выкол со срезом бетона сжатой зоны	85
	БСК-III-2,7-100-Ø10(I)	2,7	-	выкол со срезом бетона сжа-	85

				той зоны
--	--	--	--	----------

Зависимость  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$  включает в себя как частный случай теорию прочности Мора, соответствует гипотезе Надаи, вписывается в критерий прочности Г. А. Гениева, отвечает второй форме разрушения от сдвига, замеченной в опытах.

Обработка и анализ результатов проведенных экспериментальных исследований и опытных данных, приведенных в монографии [2] позволили выполнить аппроксимацию диаграмм  $\sigma_i - \varepsilon_i$  и  $\mu(\lambda) - \varepsilon_i$  (рис. 5). Точки диаграмм (рис. 5) строго определены. Кстати, тот факт, что появлению микротрещин соответствует точка  $C$ , а не  $D$ , говорит о том, что при сжатии призмы даже монотонно возрастающей нагрузкой отрыв не является причиной разрушения. Появлению микротрещин отрыва в точке  $C$  соответствуют напряжения  $R_{crc,v}$ , а разрушение происходит при несколько большем напряжении  $R_b$  от предельных сдвиговых деформаций по октаэдрическим площадкам. Однако поскольку  $R_{crc,v}$  и  $R_b$  (или  $\varepsilon_{crc,v}$  и  $\varepsilon_r$ ) близки по значению, то выяснение причин разрушения носит лишь методический характер. Для деформационного режима нагружения различия в причинах разрушения приводят к весьма существенным количественным отличиям. Так, параметр  $\varepsilon_{bu}$ , который при деформационном режиме нагружения является эквивалентным параметром, характеризующим как продольные сдвиговые деформации на октаэдрических площадках, так и вероятность потери устойчивости образовавшихся столбов, отличается от параметра  $\varepsilon_{crc,v}$  в два и более раз.



**Рисунок 5 – Диаграммы связи «напряжения—деформации» (а) и «коэффициент поперечных деформаций» (б) для бетона; диаграмма механического состояния для оценки возможного вида разрушения бетона при использовании допущения о прямолинейности лучей (в): 1 — расчетные; 2 — построенные по опытным данным; 3 — то же с учетом магистральных трещин между столбами; 4 — то же с замером деформаций лишь в пределах столбов**

Использование диаграмм  $\sigma_i - \varepsilon_i$  и  $\mu(\lambda) - \varepsilon_i$  (рис. 5, а, б) позволяет с успехом использовать применительно к бетону отлаженные зависимости механики твердого

деформируемого тела. Для ряда параметров это удается и на ниспадающих участках диаграмм. Для определения такого параметра, как поперечные перемещения, здесь логично впадают гипотезы и зависимости механики разрушения [3], что позволяет отказаться от использования параметров дилатации бетона как не поддающихся строгому статистическому контролю даже на осредненном уровне рассмотрения среды.

Особенности диаграммы  $\sigma_{bt} — \varepsilon_{bt}$  бетона при растяжении с учетом зависимостей механики разрушения подробно рассмотрены в работе [2].

Будем считать, что макротрещины в бетоне появляются из-за отрыва перпендикулярно главным деформациям удлинения бетона  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_{bt,ul}$ . Образование трещин в бетоне и его разрушение описывается различными теориями прочности, так как причиной образования трещин всегда являются главные деформации отрыва, а причиной разрушения могут быть также и сдвиговые деформации на октаэдрических площадках. После появления трещин бетон рассматривается как изотропный материал лишь в пределах блоков между трещинами; в целом же — как сплошной материал. Будем учитывать зависимость предельной деформации бетона от вида напряженного состояния как функции отношения первого инварианта тензора деформаций ко второму инварианту девиатора деформаций. При этом будем отдавать предпочтение деформационным критериям прочности, потому что для бетона, находящегося в элементах конструкций, возможна экспериментальная проверка только деформаций.

Применительно к железобетонным конструкциям, рассматриваемым в статье, здесь имеет место плоское напряженное состояние. Тогда, в соответствии с вышеизложенным в качестве критерия образования трещин согласно принятым предпосылкам будем иметь:

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_{bt,ul}, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_{bt,ul}$  — предельные деформации бетона.

При одноосном и двухосном растяжении:

$$\varepsilon_{bt,ul} = \varepsilon_{bt,u} = \frac{2R_{bt}}{E_b}. \quad (3)$$

При одноосном и двухосном сжатии в условие (2) вместо  $\varepsilon_1$  подставляется  $\varepsilon_3$  и согласно диаграммам на рис. 5 будем иметь:

$$\varepsilon_{bt,ul} = 0,5\varepsilon_{crc,v}. \quad (4)$$

Для напряженного состояния сжатие — растяжение параметр  $\varepsilon_{bt,ul}$  является переменным [2]:

$$\varepsilon_{bt,ul} = \varepsilon_{bt,u} k(\lambda), \quad (5)$$

где  $k(\lambda)$  — коэффициент, аналогичный коэффициенту  $k(\lambda, \delta)$ , введенному Г. А. Гениевым [4];  $\varepsilon_{bt,u}$  — предельные деформации бетона при одноосном растяжении, принимаемые равными  $2R_{bt}/E_b$ .

Учитывая, что параметр  $\delta$  (равный с точностью до числового коэффициента отношению третьего инварианта девиатора деформаций к интенсивности деформаций) незначительно влияет на величину  $k(\lambda, \delta)$ , то параметр  $k(\lambda)$  — коэффициент изменения предельного значения интенсивности деформаций в зависимости от вида напряженного состояния может быть представлен в виде:

$$k(\lambda) = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_i} a + b; \quad (6)$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \quad (7)$$

Значения коэффициентов  $a$  и  $b$  определяются на основании простых опытов (на одноосное сжатие):

$$b = \frac{\varepsilon_{crc,v} E_b}{4R_{bt}}; \quad (8)$$

$$a = \frac{9}{8} \left( 1 - \frac{\varepsilon_{crc,v} E_b}{R_{bt}} \right). \quad (9)$$

В области напряженных состояний одноосного сжатия, сжатия—сжатия и в ряде случаев сжатия—растяжения в качестве критерия прочности будем использовать условие (1) и здесь можно воспользоваться эквивалентным параметром  $\varepsilon_{bu}$ , который, с успехом поддается нормированию [2]. Тогда для описания связи напряжения — деформации здесь логично воспользоваться диаграммами рис. 5, а. Подобные диаграммы присущи теории пластичности. Специфика их для бетона заключается в наличии ниспадающей ветви, введения критерия прочности (1) и в особенностях зависимости для коэффициента  $\mu(\lambda)$  (см. рис. 5, б).

В области напряженных состояний «сжатие - растяжение» также могут быть использованы диаграммы, приведенные на рис. 5, а. Однако здесь кроме разрушения от сдвигов на октаэдрических площадках причиной разрушения может являться отрыв по направлению *главных* деформаций, что приведет к ограничению деформаций по оси  $\varepsilon_i$ . Проецирование этого ограничения на ось  $\varepsilon_i$  осуществляется с помощью лучей диаграммы механического состояния на рис. 5, в. Допущение о постоянстве предельных значений параметров на выбранных осях выполняется лишь для оси  $\varepsilon_i$  (здесь предельный параметр  $\varepsilon_{bu}$ ). Что же касается оси  $\varepsilon_1$ , то предельный параметр  $\varepsilon_{bt,ul}$  (характеризующий разрушение бетона от отрыва) является переменным. Последнее вытекает из анализа проведенных экспериментальных исследований и накопленных экспериментов [2].

На диаграмме (рис. 5, в) сжатие принято со знаком плюс, растяжение — со знаком минус. Здесь  $m = \varepsilon_i / \varepsilon_1$ . Это отношение служит основной характеристикой напряженного состояния. Изменяя интенсивность последнего при  $m = const$ , получим на графике луч, выходящий из начала координат и наклоненный к оси  $\varepsilon_1$  под углом  $\alpha$ , тангенс которого равен  $m$ .

Тогда при  $\alpha > \beta$  разрушение будет происходить от октаэдрического сдвига; при  $\beta \geq \alpha \geq \theta$  причиной разрушения будет отрыв, который произойдет после появления микротрещин; при  $\gamma \leq \alpha \leq \theta$  причиной разрушения будет отрыв, который произойдет при развитом микротрещинообразовании; при  $\alpha < \gamma$  разрушение бетона будет происходить от отрыва без развития в нем микротрещин, т. е. хрупко. В области *ODEC* сопротивление бетона соответствует модели сплошного изотропного тела. При выходе луча за эту область в бетоне появляются макротрещины, и его сплошность нарушается. Однако в области *ABED* (при силовом нагружении) и в области *EDFI* при и деформированном нагружении) для описания сопротивления бетона используются эквивалентные характеристики бетона, такие как  $\varepsilon_{br}$  и  $\varepsilon_{bu}$ , позволяющие решать задачи прочности для бетона, не прибегая к методам механики разрушения. Отметим также, что применительно к области напряженных состояний — одноосного растяжения и растяжения—растяжения, бетон ведет себя хрупко, поперечные деформации проявляются малозаметно и коэффициент  $\mu(\lambda)$  может быть принят приближенно равным постоянному значению 1/6, как это сделано в работе [2]. Учитывая, что причиной разрушения в этой области является отрыв по направлению *главных* деформаций удлинения (при достижении ими значения  $\varepsilon_{bt,u}$ ), то при использовании диаграмм рис. 5, а также необходимо вводить ограничение деформаций по оси  $\varepsilon_i$ . Проецирование этого ограничения на ось  $\varepsilon_i$  осуществляется с помощью лучей диаграммы механического

состояния бетона (рис. 5, в). Диаграмма (рис. 5, в) дает возможность проецировать ограничение деформаций на диаграммах связи  $\sigma_i - \varepsilon_i$  и  $\mu(\lambda) - \varepsilon_i$ .

Теперь, на основе вышеприведенных диаграмм, становится возможным выполнить анализ проведенных экспериментальных исследований и предельного напряженно-деформированного состояния бетона при сложном сопротивлении в зоне совместного действия изгибающего момента и поперечной силы (рис. 6).

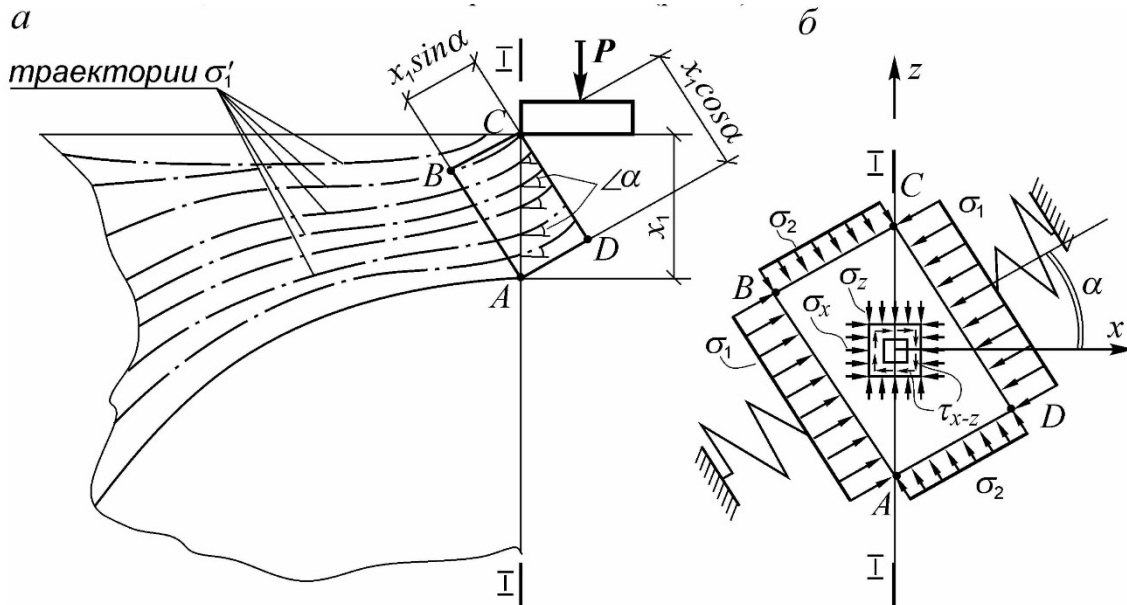


Рисунок 6 – К анализу выделения механической модели сопротивления бетона над опасной наклонной трещиной в окрестности сечения I—I (а) и выделенная механическая модель напряженно-деформированного состояния (б)

Главные напряжения при двухосном напряженном состоянии могут приниматься для рассматриваемой зоны (и принятой здесь механической модели) упрощенно:  $\sigma_1 = R_b, \sigma_2 = 0$ ; либо с учетом повышения напряжений:  $\sigma_2$  - из принятой теории прочности для бетона, а  $\sigma_1$  - из упругопластического решения задачи о сопротивлении клина. При этом если, например, использовать упрощенное выражение для  $N_b$ , (см. монографию [2]), то применительно к рассматриваемой механической модели получим:

$$\sigma_1 = R_b (1 + 0,7\alpha), \quad (10)$$

где  $\alpha$  — угол наклона траекторий главных сжимающих напряжений.

Из предлагаемой диаграммы механического состояния бетона (рис. 5, в) для области сжатие—сжатие и предлагаемого варианта деформационной теории пластичности бетона следует, что при разрушении (см. диаграмму рис. 5, а):

$$\sigma_i = \beta R_b, \quad (11)$$

где  $\beta$  — параметр, характеризующий ниспадающую ветвь диаграмм рис. 5, а.

Тогда из (11) следует, что:

$$\sigma_2 = 0,5\sigma_1 - \sqrt{(\beta R_b)^2 - 0,75\sigma_1^2}. \quad (12)$$

Анализ выражения (12) показывает, что увеличение главного сжимающего напряжения по зависимости (1) необходимо ограничить:

$$\sigma_1 = R_b (1 + 0,7\alpha) \leq \frac{\beta R_b}{0,87}. \quad (13)$$

Это еще раз подтверждает, что при использовании деформационного критерия прочности (1) значения напряжений  $\sigma_1$  близки к  $R_b$ . Тем не менее, учет напряжений  $\sigma_2$  по формуле (12) в рассматриваемой механической модели (рис. 6) приводит в ряде случаев к более точной оценке прочности бетона сжатой зоны, находящейся над опасной трещиной. Примечательным в этой зоне является и значение максимальных касательных напряжений, которое, например, при  $\sigma_1 = \beta R_b / 0,87$  будет равно:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2} = 0,57\beta R_b. \quad (14)$$

Таким образом,  $\tau_{\max}$ , найденное по формуле (14), значительно превосходит предел прочности при чистом сдвиге  $T_0$ , определяемом по формулам [4]. Следовательно, критерий разрушения от чистого сдвига не может быть положен в основу оценки предельного напряженного состояния рассматриваемой зоны (что, к сожалению, здесь часто игнорируется при проведении исследований).

Возможность достижения касательными напряжениями больших значений, соизмеримых с  $R_b$ , была отмечена в монографии [2], что для рассматриваемой зоны имеет весьма важное значение.

**Выводы по данному исследованию и перспективы дальнейшего развития данного направления.** Приведено краткое описание методики и программы испытаний железобетонных конструкций и выполнен анализ результатов экспериментальных исследований деформирования и разрушения пяти серий железобетонных балок сплошного и составного сечений, включая образцы с моделированием коррозионного повреждения. Установлено влияния основных варьируемых параметров (значений пролетов среза, наличия шва контакта, структуры сечения коррозионно поврежденных образцов) на форму разрушения и несущую способность по наклонному сечению сплошных и составных конструкций. Особое внимание уделено случаю разрушения составной железобетонной балки по шву контакта двух бетонов. Исследовано влияние особенностей основных видов напряженно-деформированного состояния в зоне с наклонными трещинами, которые необходимо учитывать при обосновании соответствующих критериев прочности.

Полученные экспериментальные данные существенно дополняют имеющийся фактический материал и предъявляют конкретные требования к разрабатываемой расчетной модели прочности по наклонному сечению коррозионно поврежденных железобетонных составных конструкций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдейчиков Г. В. Испытание строительных конструкций [Текст] / Г. В. Авдейчиков. – М. : АСВ, 2009. – 161 с.
2. Бондаренко, В. М. Расчетные модели силового сопротивления железобетона : монография / В. М. Бондаренко, В. И. Колчунов. – М. : Изд-во АСВ, 2004. – 472 с.
3. Верюжский, Ю. В. Методы механики железобетона [Текст] / Ю. В. Верюжский, В.И. Колчунов. – К. : Книжное изд-во НАУ, 2005. – 653 с.
4. Гениев, Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона [Текст] / Г.А. Гениев, В.Н. Киссюк, Г.А. Тюпин. - М. : Стройиздат, 1974. – 316 с.
5. Клюева, Н. В. Методика экспериментальных исследований прочности и трещиностойкости по наклонным сечениям нагруженных и коррозионно поврежденных железобетонных составных конструкций [Текст] / Н. В. Клюева, Д. В. Карпенко, А. А. Кашавцев // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. – №5. – С. 77–80.
6. Колчунов В. И. Экспериментальные исследования деформирования и трещиностойкости составных конструкций [Текст] / В. И. Колчунов, Е. А. Скобелева, С. И. Горностаев // Известия Орловского государственного технического университета. Серия: Строительство и транспорт. – 2006. – № 1–2. – С. 12–16.
7. Баширов Х. З. Методика экспериментальных исследований прочности, жесткости и трещиностойкости железобетонных составных конструкций по наклонным сечениям [Текст] / Х. З. Баширов, И. С. Горностаев, А. А. Дородных, К. М. Чернов // Промышленное и гражданское строительство. – 2013. – №5. – С. 18–21.
8. Баширов, Х. З. Основные результаты экспериментальных исследований ширины раскрытия трещин железобетонных составных конструкций по наклонным сечениям [Текст] / Х.З. Баширов, Н.В. Клюева, А.

А. Дородных // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. – 2013. – №2 (30). – С. 18–26.

9. Dang Hiep, Shear behaviour and load capacity of short reinforced concrete beams exposed to chloride environment / Hiep Dang; Raoul Francois; Dario Coronelli // European Journal of Environmental and Civil Engineering. – Volume 20. – Issue 4. 2015. – Pp. 1–17.

10. Juarez Cesar, Ultimate and nominal shear strength in reinforced concrete beams deteriorated by corrosion / Cesar Juarez, B. Guevara, Gerardo Fajardo San Miguel, P. Castro-Borges // Engineering Structures. – Volume 33. – December, 2011. – Pp. 3189–3196.

11. Piseth, V., Experimental Study on the Effects of a Loading Rate on the Shear Performance of an RC Beam / V. Piseth, K. Nakarai, N. Chijiwa, K. Maekawa // 10th International Conference on Mechanics and Physics of Creep, Shrinkage, and Durability of Concrete and Concrete Structures. Vienna, Austria. - September, 2015. – Pp. 1561–1569.

12. Rwaished Maha, Experimental study of the shear capacity of concrete beams reinforced with BFRP bars / Maha Rwaished, Shada Maklad, Charif Ahmad, Bassel Khanafer, Farid H. Abed, Ahmed ElRefai // 10th International Conference on Composite Science and Technology. Portugal, Lisbon. - February, 2015.

13. Saghair H.M., Experimental study on static shear behavior of high strength concrete beams as compared with normal strength concrete beams / H.M. Saghair, F. Kaiser, Khairy Hassan A., Karam Abdou Awad // Journal of Engineering Sciences. – Volume 37. No. 6 – November 2009. – Pp. 1369–1387.

14. Thamrin Rendy, Experimental study on diagonal shear cracks of concrete beams without stirrups longitudinally reinforced with GFRP bars / Rendy Thamrin, Abdul Aziz Abdul Samad, David Yeoh Eng Chuan, Noor Azlina Abdul Hamid, Imohamed Ali // Concrete engineering for excellence and efficiency, Symposium. Prague, 2011.

**Колчунов Владимир Иванович**

ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск

Доктор технических наук, профессор, профессор кафедры промышленного и гражданского строительства

E-mail: [vlik52@mail.ru](mailto:vlik52@mail.ru)

**Демьянов Алексей Иванович**

ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск

Кандидат технических наук, доцент

E-mail: [speccompany@gmail.com](mailto:speccompany@gmail.com)

**Кашавцев Александр Александрович**

ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск

Аспирант

E-mail: [kasalexan@yandex.ru](mailto:kasalexan@yandex.ru)

---

VL. KOLCHUNOV, A. DEM'YANOV, A. KASHAVZEV

**THE EXPERIMENTAL STUDY OF DURABILITY REINFORCED  
CONCRETE COMPOSITE STRUCTURES WITH REGARD  
TO CORROSION AND THEIR ANALYSIS**

*The results of experimental studies of deformation and fracture five series of reinforced concrete beams usual and composite cross-sections, including samples with the modeling of corrosion damage, are analyzed in article. The methodology and program of tests of reinforced concrete structures is given with a brief description.*

*It is prepared the analysis of the influence and main variable parameters (shear span values, the presence of the contact seam structure section rust samples) in the form of the destruction and the bearing capacity of the inclined cross-section solid and composite structures. Attention is paid to the occasion and the destruction of a composite reinforced concrete beam seam contact between two concretes. It has done the analysis of the main types characteristics of stress-strain state in the area with inclined cracks that need to be taken into account in justifying appropriate durability criteria.*

**Keywords:** *experimental study, reinforced concrete composite structures, durability, inclined crack, loading, corrosion damage, joint, criteria of durability.*

**BIBLIOGRAPHY**

1. Avdeychikov G. V. Ispytanie stroitelnyih konstruksiy / G. V. Avdeychikov. – М. : ASV, 2009. – 161 p.

2. Bondarenko V. M. Raschetnyie modeli silovogo soprotivleniya zhelezobetona : monografiya / V. M. Bondarenko, V. I. Kolchunov. – M. : ASV, 2004. – 472 p.
3. Veryuzhskiy, Yu. V. Metodyi mehaniki zhelezobetona / Yu. V. Veryuzhskiy, V.I. Kolchunov. – K. : Knizhnoe izd-vo NAU, 2005. – 653 c.
4. Geniev, G.A. Teoriya plastichnosti betona i zhelezobetona / G.A. Geniev, V.N. Kissyuk, G.A. Tyupin. M. : Stroyizdat, 1974. – 316 p.
5. Klyueva, N. V. Metodika eksperimentalnykh issledovaniy prochnosti i treschinostoykosti po naklonnyim secheniyam nagruzhennykh i korrozionno povrezhdennykh zhelezobetonnykh sostavnykh konstruksiy / N. V. Klyueva, D. V. Karpenko, A. A. Kaschavtsev // Stroitel'naya mehanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy. – 2015. – №5. – P. 77–80.
6. Kolchunov V. I. Eksperimentalnyie issledovaniya deformirovaniya i treschinostoykosti sostavnykh konstruksiy / V. I. Kolchunov, E. A. Skobeleva, S. I. Gornostaev // Izvestiya Orlovskogo gosudarstvennogo tehniceskogo universiteta. Seriya: Stroitelstvo i transport. – 2006. – №1–2. – P. 12–16.
7. Bashirov H. Z. Metodika eksperimentalnykh issledovaniy prochnosti, zhestkosti i treschinostoykosti zhelezobetonnykh sostavnykh konstruksiy po naklonnyim secheniyam / H. Z. Bashirov, I. S. Gornostaev, A. A. Dorodnykh, K. M. Chernov // Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitelstvo. – 2013. – № 5. – P. 18–21.
8. Bashirov H. Z. Osnovnyie rezultaty eksperimentalnykh issledovaniy shirinyi raskryitiya treschin zhelezobetonnykh sostavnykh konstruksiy po naklonnyim secheniyam / H.Z. Bashirov, N.V. Klyueva, A. A. Dorodnykh // Nauchnyiy vesnik Voronezhskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. – 2013. – № 2 (30). – P. 18–26.
9. Dang Hiep, Shear behaviour and load capacity of short reinforced concrete beams exposed to chloride environment / Hiep Dang; Raoul Francois; Dario Coronelli // European Journal of Environmental and Civil Engineering. – Volume 20. – Issue 4. 2015. – Pp. 1–17.
10. Juarez Cesar, Ultimate and nominal shear strength in reinforced concrete beams deteriorated by corrosion / Cesar Juarez, B. Guevara, Gerardo Fajardo San Miguel, P. Castro-Borges // Engineering Structures. – Volume 33. – December, 2011. – Pp. 3189–3196.
11. Piseth, V., Experimental Study on the Effects of a Loading Rate on the Shear Performance of an RC Beam / V. Piseth, K. Nakarai, N. Chijiwa, K. Maekawa // 10th International Conference on Mechanics and Physics of Creep, Shrinkage, and Durability of Concrete and Concrete Structures. Vienna, Austria. - September, 2015. – Pp. 1561–1569.
12. Rwaished Maha, Experimental study of the shear capacity of concrete beams reinforced with BFRP bars / Maha Rwaished, Shada Maklad, Charif Ahmad, Bassel Khanafer, Farid H. Abed, Ahmed ElRefai // 10th International Conference on Composite Science and Technology. Portugal, Lisbon. - February, 2015.
13. Saghair H.M., Experimental study on static shear behavior of high strength concrete beams as compared with normal strength concrete beams / H.M. Saghair, F. Kaiser, Khairy Hassan A., Karam Abdou Awad // Journal of Engineering Sciences. – Volume 37. No. 6 – November 2009. – Pp. 1369–1387.
14. Thamrin Rendy, Experimental study on diagonal shear cracks of concrete beams without stirrups longitudinally reinforced with GFRP bars / Rendy Thamrin, Abdul Aziz Abdul Samad, David Yeoh Eng Chuan, Noor Azlina Abdul Hamid, Imohamed Ali // Concrete engineering for excellence and efficiency, Symposium. Prague, 2011.

**VI. Kolchunov**

Southwest State University, Kursk

Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of Industrial and Civil Engineering Department

E-mail: [vlik52@mail.ru](mailto:vlik52@mail.ru)

**A. Dem'yanov**

Southwest State University, Kursk

Candidate of Technical Sciences (PhD), assistant professor

E-mail: [speccompany@gmail.com](mailto:speccompany@gmail.com)

**A. Kashavzev**

Southwest State University, Kursk

Post-Graduate Student,

E-mail: [kasalexan@yandex.ru](mailto:kasalexan@yandex.ru)

УДК 624.04

КОРОБКО В.И., ЧЕРНЯЕВ А.А., ШЛЯХОВ С.В.

## **ВЗАИМОСВЯЗЬ ЗАДАЧ ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА И СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ПЛАСТИНОК В ФОРМЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ, ОПИСАННЫХ ВОКРУГ ОКРУЖНОСТИ, С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ЖЕСТКОГО ЗАЩЕМЛЕНИЯ И ШАРНИРНОГО ОПИРАНИЯ ПО КОНТУРУ**

*В статье исследуется вопрос о подобии графиков «максимальный прогиб упругих пластинок – отношение их конформных радиусов» и «основная частота колебаний – отношение конформных радиусов». Рассматриваются пластинки в виде многоугольников, описанных вокруг окружности (треугольников, ромбов, правильных n-угольников). Вводится понятие – коэффициент подобия, с помощью которого можно по известным значениям максимального прогиба пластинок с условиями шарнирного опирания по контуру приближенно оценивать эту величину для пластинок с жестким защемлением по контуру и наоборот. Аналогично оцениваются и основные частоты рассматриваемых пластинок. Приводятся численные примеры расчетов. Использование предложенного способа определения максимального прогиба и основной частоты колебаний с помощью коэффициента подобия можно рекомендовать для получения оценочных результатов на начальной стадии проектирования конструкций в виде пластинок.*

**Ключевые слова:** упругие пластинки в форме многоугольников, описанных вокруг окружности, жесткое защемление, шарнирное опирание, максимальный прогиб пластинок, основная частота колебаний, коэффициент подобия.

Пластинки в форме треугольников, ромбов, правильных n-угольников (многоугольники, описанные вокруг окружности) находят широкое применение в качестве несущих элементов конструкций при строительстве зданий и сооружений (в настилах косых мостов, автомобильных развязок, продольная ось которых наклонна по отношению к препятствию и др.), в гидротехнических сооружениях, а также в специальном машиностроении (судо-, авиа- и ракетостроении). Проблема обеспечения эксплуатационной надежности несущих конструкций требует проведения различных расчетов, среди которых одними из основных являются расчет жесткости конструкций под действием внешней нагрузки и определение их основной частоты колебаний в ненагруженном состоянии для проведения динамических расчетов. Точных решений задач поперечного изгиба и свободных колебаний пластинок в научной и справочной литературе приводится немного [1, 2], известны лишь решения для прямоугольных и круглых пластинок при простейших видах загрузки и опирания по контуру. В более сложных случаях используются приближенные методы, в основном численные. Однако решения задач теории пластинок с помощью численных методов обладают рядом недостатков, среди которых основным является сложность анализа полученных результатов и распространения этих результатов на семейство пластинок определенной формы с определенными граничными условиями. Поэтому в строительной механике по-прежнему придаётся большое значение разработке, развитию и совершенствованию простых аналитических приближенных методов решения задач технической теории пластинок.

Лишенными указанных недостатков являются геометрические методы, интенсивно развивающиеся в последние два десятилетия. С историей их развития, физической и геометрической сущностью можно познакомиться, например, в работах [3, 4]. Они широко используются в случаях, когда необходимо оперативно получить оценку искомой физической характеристики пластинки, или когда не требуется высокая точность расчёта, что особенно актуально на начальной стадии проектирования. Такие методы позволяют избежать решения

сложных дифференциальных уравнений, не требуют мощных ЭВМ и позволяют, проводя только геометрические расчеты, находить интегральные физические характеристики пластинок.

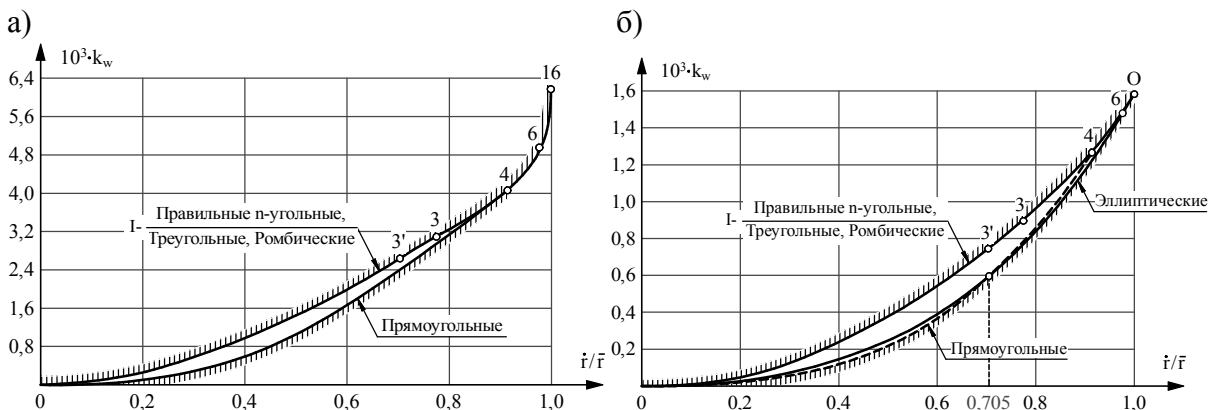
Среди геометрических методов следует выделить два: изопериметрический метод (ИЗПМ) теоретические основы которого изложены в работе [5] и метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ), теоретические основы которого изложены в работе [4]. В первом из них строятся двусторонние изопериметрические неравенства, позволяющие с двух сторон оценить искомую интегральную физическую характеристику (ИФХ). Этот метод не обладает высокой точностью, поскольку во многих случаях дает довольно грубую оценку искомой ИФХ, однако он наглядно иллюстрирует место искомого решения среди множества форм пластинок [6].

В последние два десятилетия МИКФ получил широкое развитие в работах ученых и аспирантов Орловского государственного университета им. И.С. Тургенева [7, ..., 18].

Более совершенен метод интерполяции по коэффициенту формы, он позволяет для определенного вида пластинок, объединенных непрерывным или дискретным геометрическим преобразованием, строить приближенные аналитические зависимости, связывающие ИФХ с интегральной геометрической характеристикой пластинок – коэффициентом формы  $K_f$ . В этих методах в качестве геометрического аргумента используется интегральная характеристика формы плоской области – коэффициент формы  $K_f$ .

Как показано в монографиях [4, 5], эта геометрическая характеристика является геометрическим аналогом интегральных физических характеристик во многих двумерных задачах строительной механики, теории упругости и пластичности и широко используется при решении двумерных задач математической физики [3] и теории упругости [4]. В связи с этим многие сложные двумерные задачи теории упругости сводятся к решению элементарной геометрической задачи – анализу изменения свойств коэффициента формы при различных геометрических преобразованиях заданной области.

Существует ещё одна разновидность МИКФ – это метод интерполяции по отношению конформных радиусов (внутреннего к внешнему  $\dot{r}/\bar{r}$ ), предложенный В.И. Коробко и А.А. Хусточкиным [6] и существенно развитый А.А. Черняевым применительно к задачам поперечного изгиба и свободных колебаний пластинок. С помощью этого метода искомые ФМХ определяются с большей точностью [19].



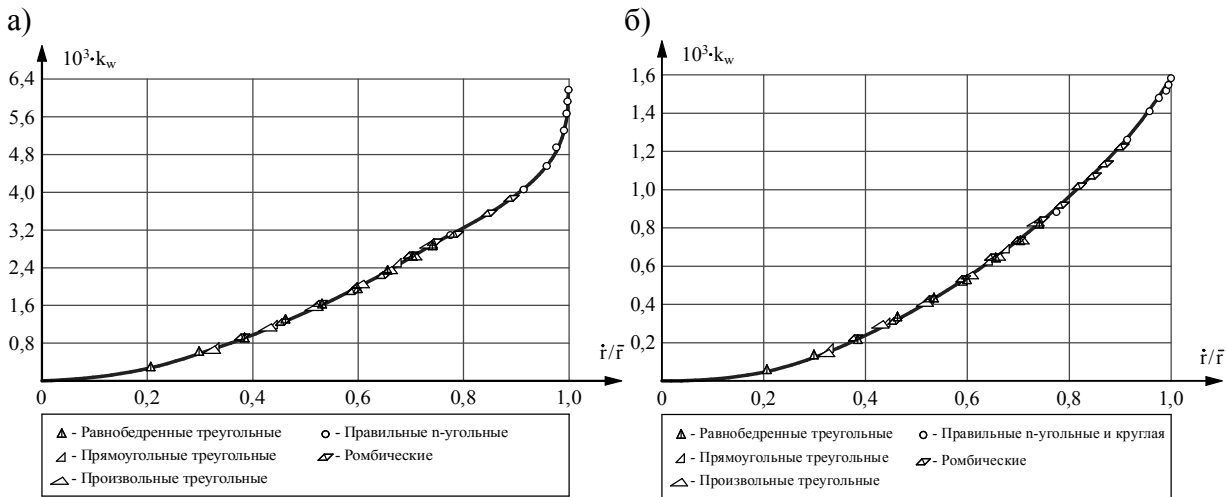
а) шарнирное опирание; б) жесткое защемление

Рисунок 1 – Кривые « $k_w - \dot{r}/\bar{r}$ »

В работе [19] представлена графическая зависимость максимальных прогибов шарнирно опертых и жестко защемленных по контуру пластинок от отношения их конформных радиусов (рис. 1) и численно доказано, что все множество значений максимального прогиба

упругих изотропных пластинок с выпуклым контуром, представленное в координатных осях «максимальный прогиб – отношение конформных радиусов», ограничено с двух сторон.

Для треугольных, ромбических и правильных  $n$ -угольных пластинок при однородных граничных условиях (либо шарнирное опирание по контуру, либо жесткое защемление) все решения находятся на одной кривой (рис. 2) [19].



а) шарнирное опирание; б) жесткое защемление

Рисунок 2 – Кривые « $k_w - \dot{r}/\bar{r}$ » для правильных  $n$ -угольных, треугольных и ромбических пластинок

Графики на рисунке 2 подобны, лишь в интервале  $\dot{r}/\bar{r} = 0,9 \dots 1$  наблюдается их отличие. Введем понятие коэффициент подобия: вычислим отношение известных значений максимальных прогибов шарнирно опертых и жестко защемленных пластин и найдем их среднее значение. Таким образом, определим пропорциональность графиков, изображенных на рисунке 2, коэффициент подобия в данном случае  $k_{n,ср.} = 3,581$ .

Перемножим известные значения максимальных прогибов пластин с жестким защемлением (3 колонка) на значение коэффициента подобия кривых  $k_{n,ср.} = 3,581$  (5 колонка) и сравним полученные результаты с известными значениями максимальных прогибов пластин с шарнирным опиранием (4 колонка).

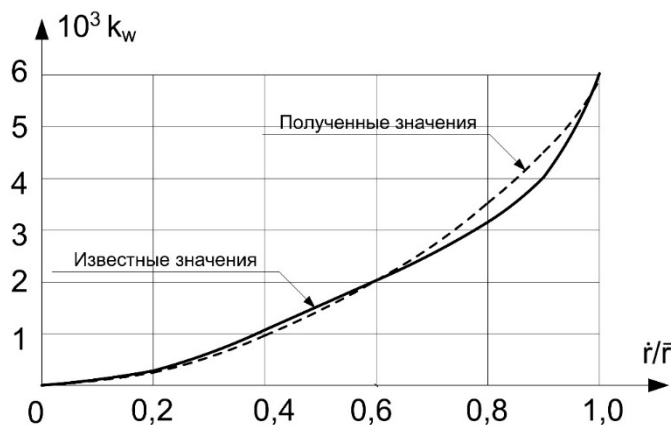


Рисунок 3 – Сопоставление известных значений максимальных прогибов для пластинок с шарнирным опиранием и жестким защемлением контура с использованием коэффициента подобия  $k_{n,ср.}$

Таблица 1 – Сопоставление известных значений максимальных прогибов шарнирно опертых пластинок с жестко защемленными пластинками с учетом коэффициента подобия  $k_{н.ср.}$

Форма пластинок	Отношение конформных радиусов $\dot{r}/\bar{r}$	Значения $1000 k_w$ для жестко защемленных пластинок	Значения $1000 k_w$ для шарнирно опертых пластинок	$1000 k_w * k_{н.ср.}$	$\Delta, \%$
1	2	3	4	5	6
Пластинки в форме правильных фигур					
16-угольник	0,9988	1,573	6,175	5,783	6,35
8-угольник	0,9903	1,535	5,346	5,643	-4,97
6-угольник	0,9762	1,478	4,889	5,293	-8,27
4-угольник	0,9139	1,267	4,082	4,538	-11,16
3-угольник	0,7748	0,900	3,101	3,223	-3,94
Пластинки в форме равнобедренных треугольников					
$\alpha=80^\circ$	0,5308	0,428	1,617	1,533	5,21
$\alpha=70^\circ$	0,7270	0,793	2,801	2,840	-1,39
$\alpha=60^\circ$	0,7748	0,900	3,101	3,223	-3,94
$\alpha=50^\circ$	0,7411	0,824	2,892	2,951	-2,04
$\alpha=45^\circ$	0,7034	0,743	2,647	2,661	-0,53
$\alpha=40^\circ$	0,6556	0,647	2,337	2,317	0,85
$\alpha=30^\circ$	0,5342	0,434	1,634	1,623	0,49
1	2	3	4	5	6
Пластинки в форме прямоугольных треугольников					
$\alpha=45^\circ$	0,7034	0,743	2,647	2,661	-0,53
$\alpha=40^\circ$	0,6970	0,730	2,605	2,614	-0,36
$\alpha=35^\circ$	0,6771	0,689	2,475	2,468	0,30
$\alpha=30^\circ$	0,6436	0,624	2,261	2,234	1,16
$\alpha=25^\circ$	0,5941	0,534	1,964	1,912	2,62
$\alpha=20^\circ$	0,5284	0,424	1,604	1,518	5,33
Пластинки в форме произвольных треугольников					
$\alpha=45^\circ, \beta=60^\circ$	0,7459	0,834	2,924	2,986	-2,15
$\alpha=40^\circ, \beta=60^\circ$	0,7182	0,774	2,745	2,758	-0,47
$\alpha=35^\circ, \beta=70^\circ$	0,6511	0,638	2,309	2,285	1,04
$\alpha=30^\circ, \beta=45^\circ$	0,6087	0,560	2,050	2,006	2,16
$\alpha=25^\circ, \beta=60^\circ$	0,5225	0,415	1,573	1,486	5,51
$\alpha=20^\circ, \beta=50^\circ$	0,5070	0,391	1,494	1,400	6,27
Пластинки в форме ромбов					
$\alpha=90^\circ$	0,9139	1,267	4,082	4,538	-11,16
$\alpha=80^\circ$	0,9036	1,237	3,989	4,430	-11,06
$\alpha=70^\circ$	0,8724	1,147	3,734	4,108	-10,01
$\alpha=60^\circ$	0,8199	1,009	3,376	3,614	-7,04
$\alpha=50^\circ$	0,7457	0,834	2,921	2,987	-2,25
$\alpha=45^\circ$	0,7002	0,736	2,626	2,636	-0,38
$\alpha=40^\circ$	0,6487	0,634	2,293	2,271	0,98
$\alpha=30^\circ$	0,5277	0,423	1,600	1,515	5,32
Примечание – в таблице не учитывались пластинки с очень острыми углами, так как такие пластинки редко используются в качестве элементов строительных конструкций.					

Полученные результаты являются приемлемыми для дальнейших расчетов пластин, за исключением пластин в форме правильных фигур и ромбов, поскольку погрешность превышает 5%. Графическое сравнение результатов представлено на рисунке 3.

**Пример 1.** Требуется определить максимальный прогиб  $w_0$  шарнирно опертой квадратной пластинки от действия равномерно распределенной по всей площади нагрузки при следующих исходных данных: сторона  $a = 0,7$  м, толщина пластинки  $t = 5$  мм, материал пластинки – сталь (модуль упругости  $E = 2,06 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ), интенсивность нагрузки  $q = 15$  кН/м<sup>2</sup>.

Максимальный прогиб:

$$w_0 = k_w \cdot k_{н.ср.} \frac{qA^2}{D},$$

где  $k_w = 1,267$  для жестко защемленной пластинки;  $k_{н.ср.} = 3,581$  - коэффициент подобия;

$A = 0,49$  м<sup>2</sup> - площадь заданной пластинки;

$$D = \frac{Et^3}{12 \cdot (1-\nu^2)} = \frac{2,06 \cdot 10^{11} \cdot 0,005^3}{12 \cdot (1-0,3^2)} = 2358,1 \text{ Н} \cdot \text{м} - \text{цилиндрическая жесткость.}$$

$$w_0 = 1,267 \cdot 3,581 \cdot \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 0,49^2}{2358,1} = 6,929 \text{ мм},$$

что отличается от результата, полученного известным методом решения ( $w_0 = 6,234$  мм) на 10,0%;

**Пример 2.** Требуется определить максимальный прогиб  $w_0$  жестко защемленной треугольной пластинки от действия равномерно распределенной по всей площади нагрузки при следующих исходных данных: основание  $a = 1$  м, углы при основании  $\alpha = 25^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ , толщина пластинки  $t = 7$  мм; материал пластинки – сталь (модуль упругости  $E = 2,06 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ), интенсивность нагрузки  $q = 20$  кН/м<sup>2</sup>.

Максимальный прогиб:

$$w_0 = \frac{k_w}{k_{н.ср.}} \frac{qA^2}{D},$$

где  $k_w = 1,573$  для шарнирно опертой пластинки;  $k_{н.ср.} = 3,581$  - коэффициент подобия;

$A = 0,127$  м<sup>2</sup> - площадь заданной пластинки;

$$D = \frac{Et^3}{12 \cdot (1-\nu^2)} = \frac{2,06 \cdot 10^{11} \cdot 0,007^3}{12 \cdot (1-0,3^2)} = 6470,5 \text{ Н} \cdot \text{м} - \text{цилиндрическая жесткость};$$

$$w_0 = \frac{1,573}{3,581} \cdot \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,127^2}{6470,5} = 0,0219 \text{ мм},$$

что отличается от результата, полученного известным методом решения ( $w_0 = 0,0207$  мм) на 5,48%.

При расчете треугольных пластинок отклонения найденных значений ИФХ от известных решений несколько снижается, а для ромбических пластинок и в виде правильных многоугольников остаются высокими.

Геометрическая характеристика – отношение конформных радиусов обладает замечательным свойством, которое заключается в следующем: «значения критического усилия при потере устойчивости от действия равномерного всестороннего сжатия для круглых, правильных  $n$ -угольных, треугольных и ромбических шарнирно опертых (без круглых) либо жестко защемленных равновеликих (равной площади) пластинок, представленные как функции от-

ношения внутреннего к внешнему конформных радиусов, вырождаются в единые кривые» [20].

Как следствие, шарнирно опертые либо жестко защемленные равновеликие пластинки указанных форм, имеющие одинаковое значение отношения конформных радиусов имеют равные значения критического усилия  $N_0$ .

Ни одна другая геометрическая характеристика не позволяет объединить одной аналитической зависимостью значения  $N_0$  для такого большого подмножества форм пластинок.

Это свойство основано на возможности представления площади плоской области  $A$  (области пластинки) через внутренний  $\dot{r}$  и внешний  $\bar{r}$  конформные радиусы:

$$A = \pi \dot{r} \bar{r} \quad (1)$$

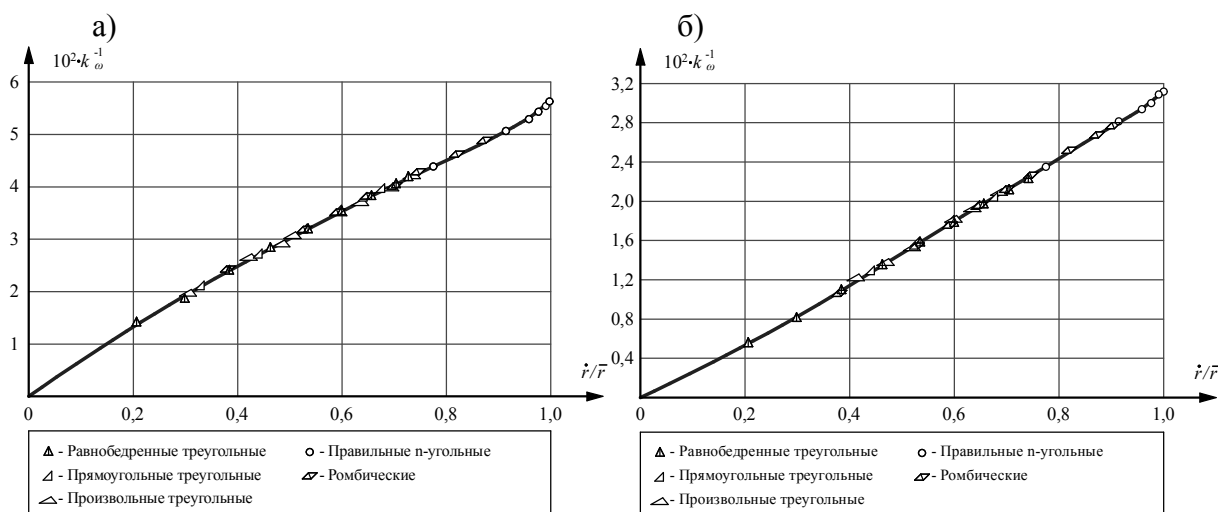
Учитывая известную математическую аналогию задач устойчивости и собственных колебаний пластинок (2), описываемых дифференциальными уравнениями эллиптического типа четвертого порядка, можно сделать вывод о том, что указанным свойством обладают и задачи по определению собственных колебаний для рассматриваемого подмножества пластинок. При этом параметром аналогичным критическому усилию будет основная частота колебаний пластинок.

$$\begin{cases} D\Delta^2\Delta^2 w - q_0\Delta^2 w = 0; \\ D\Delta^2\Delta^2 w - \omega^2 m w = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $D$  – цилиндрическая жесткость пластинки;  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $w$ – функция прогибов пластинки;  $q_0$  – интенсивность нагрузки при равномерном всестороннем сжатии пластинки;  $\omega$  – частота собственных колебаний;  $m$ – масса единицы площади пластинки [20].

Проведем аналогичные расчеты и для основных частот собственных колебаний пластинок ( $k_{cp}=1,892$ ). Полученные результаты сведем в таблицу 2.

Значения основных частот собственных колебаний правильных  $n$ -угольных, треугольных и ромбических пластинок, как и максимальные прогибы, сливаются в одну кривую (рис. 4) [20,21].



а) шарнирное опирание; б) жесткое защемление

Рисунок 4 – Кривые « $k_\omega - \dot{r}/\bar{r}$ » для правильных  $n$ -угольных, треугольных и ромбических пластинок

Погрешность полученных результатов является приемлемой для расчетов на первичных стадиях проектирования (менее 5%), за исключением некоторых значений для пластин в виде правильных фигур.

Таблица 2 – Сопоставление известных значений частот свободных колебаний шарнирно опертых пластинок жестко защемленными пластинками с учетом коэффициента подобия  $k_{cp}$ .

Форма пластинки	Отношение конформных радиусов $\dot{r}/\bar{r}$	Значения $k_{\omega}$ для шарнирно опертых пластинок	Значения $k_{\omega}$ для жестко защемленных пластинок	$k_{\omega} * k_{cp}$	$\Delta, \%$
1	2	3	4	5	6
Пластинки в форме правильных фигур					
16-угольник	0,9988	17,969	32,244	33,996	-5,43
8-угольник	0,9903	18,124	32,557	34,289	-5,32
6-угольник	0,9762	18,384	33,089	34,783	-5,12
4-угольник	0,9139	19,597	35,621	37,078	-4,09
3-угольник	0,7748	22,741	42,566	43,026	-1,08
Пластинки в форме равнобедренных треугольников					
$\alpha=80^\circ$	0,5308	31,068	61,537	58,781	4,48
$\alpha=70^\circ$	0,7270	24,007	45,441	45,422	0,04
$\alpha=60^\circ$	0,7748	22,741	42,566	43,026	-1,08
$\alpha=50^\circ$	0,7411	23,621	44,564	44,691	-0,29
$\alpha=40^\circ$	0,6556	26,151	50,256	49,478	1,55
$\alpha=30^\circ$	0,5342	30,905	61,109	58,473	4,31
Пластинки в форме прямоугольных треугольников					
$\alpha=45^\circ$	0,7034	24,678	46,961	46,691	0,57
$\alpha=40^\circ$	0,6970	24,866	47,386	47,047	0,72
$\alpha=35^\circ$	0,6771	25,477	48,738	48,184	1,14
$\alpha=30^\circ$	0,6436	26,548	51,132	50,229	1,77
$\alpha=25^\circ$	0,5941	28,334	55,034	53,608	2,59
$\alpha=20^\circ$	0,5284	31,184	61,847	59,001	4,60
Пластинки в форме ромбов					
$\alpha=90^\circ$	0,9139	19,597	35,621	37,078	-4,10
$\alpha=80^\circ$	0,9036	19,808	36,071	37,475	-3,89
$\alpha=70^\circ$	0,8724	20,465	37,491	38,720	-3,28
$\alpha=60^\circ$	0,8199	21,644	40,095	40,951	-2,13
$\alpha=50^\circ$	0,7457	23,498	44,284	44,459	-0,39
$\alpha=40^\circ$	0,6487	26,378	50,758	49,908	1,68
$\alpha=30^\circ$	0,5277	31,219	61,939	59,067	4,64

Примечание: не учитывались значения пластинок с острыми углами, так как такие пластинки редко используются в качестве строительных конструкций и элементов.

Графическое сравнение результатов представлено на рисунке 5.

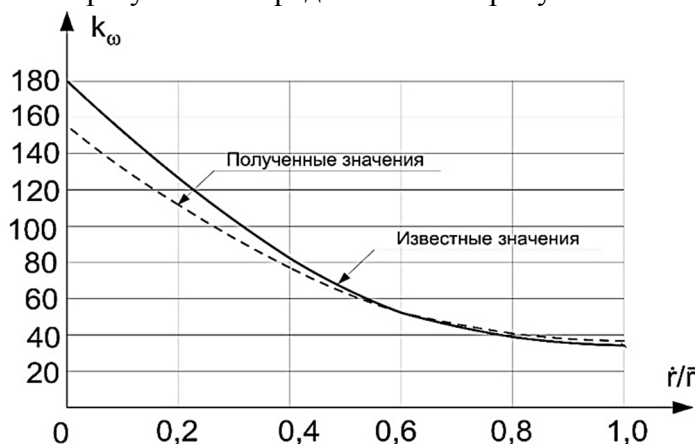


Рисунок 5 – Сопоставление известных значений частот свободных колебаний шарнирно опертых пластинок с жестко защемленными пластинками с учетом коэффициента подобия  $k_{cp}$ .

**Пример 3.** Требуется определить частоту свободных колебаний  $\omega_0$  жестко защемленной квадратной пластинки от действия равномерно распределенной по всей площади нагрузки при следующих исходных данных: сторона  $a = 0,7$  м, толщина пластинки  $t = 5$  мм, материал пластинки – сталь (модуль упругости  $E = 2,06 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ).

Основная частота свободных колебаний:

$$\omega_0 = k_\omega \cdot k_{cp} \cdot \sqrt{\frac{D/m}{A}},$$

где  $k_\omega = 19,597$  для шарнирно опертой пластинки;  $k_{cp} = 1,892$  - коэффициент подобия;

$A = 0,49 \text{ м}^2$  - площадь заданной пластинки;  $m = 19,23 \text{ кг}$  - масса заданной пластинки;

$$D = \frac{Et^3}{12 \cdot (1-\nu^2)} = \frac{2,06 \cdot 10^{11} \cdot 0,005^3}{12 \cdot (1-0,3^2)} = 2358,1 \text{ Н} \cdot \text{м} - \text{цилиндрическая жесткость};$$

$$\omega_0 = 19,597 \cdot 1,892 \cdot \sqrt{\frac{2358,1/19,23}{0,49}} = 586,549 \text{ Гц},$$

что отличается от результата, полученного известным методом решения ( $\omega_0 = 563,51 \text{ Гц}$ ) на 3,93%.

**Пример 4.** Требуется определить частоту свободных колебаний  $\omega_0$  шарнирно опертой пластинки в форме прямоугольного треугольника от действия равномерно распределенной по всей площади нагрузки при следующих исходных данных: основание  $a = 1,2$  м, толщина пластинки  $t = 7$  мм, материал пластинки – сталь (модуль упругости  $E = 2,06 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ).

Основная частота свободных колебаний:

$$\omega_0 = \frac{k_\omega}{k_{cp}} \cdot \sqrt{\frac{D/m}{A}},$$

где  $k_\omega = 46,961$  для жестко защемленной пластинки;  $k_{cp} = 1,892$  - коэффициент подобия;

$A = 0,72 \text{ м}^2$  - площадь заданной пластинки;  $m = 28,26 \text{ кг}$  - масса заданной пластинки;

$$D = \frac{Et^3}{12 \cdot (1-\nu^2)} = \frac{2,06 \cdot 10^{11} \cdot 0,007^3}{12 \cdot (1-0,3^2)} = 6470,5 \text{ Н} \cdot \text{м} - \text{цилиндрическая жесткость};$$

$$\omega_0 = \frac{46,961}{1,892} \cdot \sqrt{\frac{6470,5/28,26}{0,72}} = 442,621 \text{ Гц},$$

что отличается от результата, полученного известным методом решения ( $\omega_0 = 440,08 \text{ Гц}$ ) на 0,57%.

При определении собственных частот колебаний пластинок точность полученных решений также несколько повышается.

### Выводы

1 В статье предложен способ оценки максимального прогиба пластинок с шарнирно опертым контуром (в виде треугольника, ромба и правильного многоугольника) и основной частоты колебаний по известным решениям для соответствующих пластинок с жестко защемленным контуром и наоборот.

2 При сопоставлении известных значений максимальных прогибов шарнирно опертых пластинок с соответствующими значениями жестко защемленных пластинок с учетом коэффициента подобия  $k_{n,cp} = 3,581$ , были получены результаты, отличающиеся от известных решений, до 5%. У пластинок в форме правильных многоугольников и ромбов погрешность оказалась несколько выше.

3 При определении частот свободных колебаний с учетом коэффициента подобия  $k_{ср.} = 1,892$  полученные решения имеют более высокую точность по сравнению с задачей поперечного изгиба пластинок.

4 Использование предложенного способа определения максимального прогиба и основной частоты колебаний с помощью коэффициента подобия можно рекомендовать для получения оценочных результатов на начальной стадии проектирования конструкций в виде пластинок.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, А.В. Основы теории упругости и пластичности [Текст] / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: «Высшая школа», 1990. – 400 с.
2. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник в трех томах [Текст] / Под общей редакцией И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – Т. 1. – М.: Изд-во «Машиностроение», 1968, - 832 с.
3. Поля, Г. Изопериметрические неравенства в математической физике [Текст] / Г. Поля, Г. Сёге. – М.: Гомсмагиздат, 1962. – 336 с.
4. Коробко, А.В. Геометрическое моделирование формой области в двумерных задачах теории упругости [Текст] / А.В. Коробко. – М.: изд-во АСВ, 1999. – 302 с.
5. Коробко, В.И. Изопериметрический метод в строительной механике: Теоретические основы изопериметрического метода [Текст] / В.И. Коробко. – М.: изд-во АСВ, 1997. – 390 с.
6. Шляхов, С.В. Применение методики МИКФ для расчета треугольных и прямоугольных пластинок с использованием широко известных геометрических параметров [Текст] / С.В. Шляхов, А.В. Коробко, А.А. Чернев // Строительная механика и расчет сооружений. – 2016. - № 4. – С. 19-29.
7. Муромский, А.С. Расчет треугольных пластинок с использованием аффинных преобразований [Текст] / А.С. Муромский, А.В. Коробко // Труды 55-й Международной научно-технической конференции молодых ученых (докторантов, аспирантов и студентов) «Актуальные проблемы современного строительства» (Санкт Петербург, 2001).
8. Киржаев, Ю.В. Расчет шестиугольных пластинок методом предельного равновесия [Текст] / Ю.В. Киржаев, В.И. Коробко // Известия ОрелГТУ. Серия «Строительство, транспорт». – 2004. - № 1-2. – С. 22-25.
9. Гфель, В.В. Взаимосвязь задач поперечного изгиба и свободных колебаний треугольных пластинок [Текст] / Гфель, В.В., А.В. Коробко // Известия ОрелГТУ. Серия «Строительство». – 2006. - № 1-2. – С. 24-27.
10. Чикулаев, А.В. Решение задач устойчивости сферической оболочки [Текст] / А.В. Чикулаев, А.В. Коробко // Известия ОрелГТУ. Серия «Строительство. Транспорт». – 2007. - № 4. – С. 44-47.
11. Сенин, М.А. Взаимосвязь задач поперечного изгиба и свободных колебаний ромбических пластинок с помощью МИКФ [Текст] / М.А. Сенин, А.В. Коробко // Известия ОрелГТУ. Серия «Строительство. Транспорт». – 2008. - № 3. – С. 6-7.
12. Сенин, М.А. Определение высших форм колебаний пластинок с помощью МИКФ [Текст] / М.А. Сенин, А.В. Коробко // Строительная механика и расчет сооружений. – 2008. - № 6. – С. 31-32.
13. Фетисова, М.А. Определение максимального прогиба трапециевидных пластинок с комбинированными граничными условиями [Текст] / М.А. Фетисова, Н.Г. Калашникова // Известия ОрелГТУ. Серия «Строительство. Транспорт». – 2009. - № 1. – С. 65-67.
14. Морозов, С.А. Краткий аналитический обзор работ по проблеме расчета строительных конструкций (балок, пластинок и оболочек) методом предельного равновесия [Текст] / С.А. Морозов, В.И. Коробко // Строительство и реконструкция. – 2009. - № 6. – С. 21-35.
15. Морозов, С.А. Расчет пластинок методом предельного равновесия [Текст] / С.А. Морозов, В.И. Коробко, А.В. Коробко, М.Ю. Прокуров. – Орел: Изд-во «Типография «Труд». – 2012. – 354 с.
16. Савин, С.Ю. Расчет ортотропных пластин в виде правильных многоугольников с однородными граничными условиями [Текст] / С.Ю. Савин, В.И. Коробко // Строительство и реконструкция. – 2011. - № 1. – С. 3-11.
17. Савин, С.Ю. Изгиб ортотропных пластинок в виде параллелограмма с однородными и комбинированными граничными условиями [Текст] / Савин, С.Ю., В.И. Коробко, // Строительная механика и расчет сооружений. – 2012. - № 2. – С. 18-23.
18. Коробко, А.В. Определение максимального прогиба ромбических пластинок с комбинированными граничными условиями с использованием отношения конформных радиусов [Текст] / А.В. Коробко, А.А. Черняев // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2011. – №4. – С. 21-25.
19. Черняев, А.А. Развитие метода интерполяции по отношению конформных радиусов для решения задач поперечного изгиба пластинок [Текст]: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / Черняев Андрей Александрович. – Орел, 2013. – 211 с.
20. Черняев, А.А. Динамический расчет круглых, правильных n-угольных, треугольных и ромбических шарнирно опертых пластинок с использованием отношения конформных радиусов в качестве геометрического аргумента [Текст] // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 2. С. 63-71.

21. Черняев, А.А. Динамический расчет круглых, правильных  $n$ -угольных, треугольных и ромбических жестко защемленных пластинок с использованием отношения конформных радиусов в качестве геометрического аргумента [Текст] // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2012. Т. 2. № 1 (65). С. 24-33.

**Коробко Виктор Иванович**

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орел  
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Строительные конструкции и материалы»  
Тел.: +7 (4862) 73-43-49  
E-mail: [vikor10@mail.ru](mailto:vikor10@mail.ru)

**Черняев Андрей Александрович**

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орел  
кандидат технических наук, доцент кафедры «Строительство автомобильных дорог»  
Тел.: +7 (4862) 73-43-49  
E-mail: [chernyev87@yandex.ru](mailto:chernyev87@yandex.ru)

**Шляхов Станислав Владимирович**

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орел  
Аспирант кафедры «Строительные конструкции и материалы»  
Тел.: +7 (4862) 73-43-49  
E-mail: [shlyakhov.stas@mail.ru](mailto:shlyakhov.stas@mail.ru)

---

V. KOROBKO, A. CHERNYAEV, S. SHLYAKHOV

**THE RELATIONSHIP BETWEEN THE PROBLEMS OF TRANSVERSE BENDING AND FREE VIBRATIONS OF ELASTIC PLATES IN THE FORM OF A POLYGON, CIRCUMSCRIBED AROUND CIRCLE, WITH BOUNDARY CONDITIONS A RIGID TRAPPED BY THE HINGED SUPPORT ALONG THE CONTOUR**

*This article examines the question about the similarity of graphs "the maximum deflection of elastic plates – with respect to their conformal radii" and "the main oscillation frequency – the ratio of the conformal radius". Examines the records in the form of a polygon, circumscribed around the circle (triangles, rhombuses, correct  $n$ -squares). Introduces the concept of coefficient of similarity, which can be used according to the known values of the maximum deflection of plates with hinged support conditions on the contour to evaluate approximately the value for plates with rigid edges fixed and Vice versa. Likewise assessed and the main frequency of the considered records. Numerical examples of calculations are given. Use of the offered method of determination of the maximum sag and basic frequency of oscillations by means of coefficient of similarity can be recommended for obtaining evaluation results on initial stage of design of constructions in the form of plates.*

**Keywords:** *elastic plate in the shape of polygons circumscribed around a circle, hard pinched, a ball bearing, the maximum deflection of the plates, the main frequency of oscillation, the coefficient of similarity.*

**BIBLIOGRAPHY**

1. Alexandrov, A. V. Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity [Text] / A. V. Aleksandrov, V. D. Potapov. – М.: "Highest school", 1990. – 400 s.
2. Strength, stability, vibrations: Handbook in three volumes [Text] / Under the General editorship of I. A. Birger and Ya. G. Panovko. – Vol. 1. – М.: Publishing house "mechanical engineering", 1968, - 832 s.
3. Polya, G. Isoperimetric inequalities in mathematical physics [Text] / G. Polya, Segou. – М.: Gammatest, 1962. – 336 s.
4. Korobko, V. A. Geometric modeling the shape of a region in two-dimensional problems of the elasticity theory [Text] / A. V. Korobko. – М.: Publishing house ACB, 1999. – 302 s.
5. Korobko, V. I. Isoperimetric method in structural mechanics: Theoretical foundations isoperimetric method [Text] / V. I. Korobko. – М.: publishing house ACB, 1997. – 390 s.

6. Shlyakhov, S. V. Application of the method to the MIKF for the calculation of the triangular and rectangular plates with the use of a widely known geometric parameters [Text] / S. V. Shlyakhov, A. V. Korobko, A. A. Chernev // Construction mechanics and calculation of structures. – 2016. – No. 4. – S. 19-29.
7. Muromsky, A. S. Calculation of triangular plates using affine transformations [Text] / A. Muromsky, A. V. Korobko // Proceedings of the 55th International scientific-technical conference of young scientists (doctoral students, post-graduates and students) "Actual problems of modern construction" (St. Petersburg, 2001).
8. Kerzhaev, Yu. V. Calculation of the hexagonal plates with the limit equilibrium method [Text] / Y. V. Kerzhaev, Korobko I. V. // Izvestiya OrelGTU. A series of "Construction, transportation". – 2004. – № 1-2. – S. 22-25.
9. Gefell, V. V. Relationship between the problems of transverse bending and free vibration of triangular plates [Text] / Gefell, V. V., A. V. Korobko // Izvestiya OrelGTU. Series "Construction". – 2006. – № 1-2. – S. 24-27.
10. Chikulaev, A. V. The Decision of problems of stability of spherical shells [Text] / A. V. Chikulaev, A. V. Korobko // Izvestiya OrelGTU. Series "Construction. Transport". – 2007. – № 4. – s. 44-47.
11. Senin, M. A. The Relationship of task lateral bending and free vibration of rhombic plates with MIKF [Text] / M. A. Senin, A. V. Korobko // Izvestiya OrelGTU. Series "Construction. Transport". – 2008. – № 3. – S. 6-7.
12. Senin, M. A. Determination of higher mode shapes of plates with MIKF [Text] / M. A. Senin, A. V. Korobko // Construction mechanics and calculation of structures. – 2008. – No. 6. – S. 31-32.
13. Fetisov, M. A. Determination of the maximum deflection of trapezoidal plates with Combirelated boundary conditions [Text] / M. A. Fetisova, N. G. Kalashnikov // Izvestiya OrelGTU. Series "Construction. Transport". – 2009. – № 1. – S. 65-67.
14. Morozov, S. A. An analytical review of studies on the problem of calculation of building structures (beams, plates and shells) by the method of limit equilibrium [Text] / A. S. Morozov, V. I. Korobko // Construction and reconstruction. – 2009. – No. 6. – S. 21-35.
15. Morozov, S. A., Calculation of plates by the method of limit equilibrium [Text] / A. S. Morozov, V. I. Korobko, A. V. Korobko, M. Y. Prokhorov. – Orel: Publishing house "Printing house "Trud". – 2012. – 354 s.
16. Savin, S. Yu. Calculation of orthotropic plates in the form of regular polygons with homogeneous boundary conditions [Text] / Yu. P. Savin, V. I. Korobko // Construction and reconstruction. – 2011. – No. 1. – S. 3-11.
17. Savin, S. Yu. Bending of orthotropic plates in the form of a parallelogram with homogeneous and combined boundary conditions [Text] / Savin, S. Yu., I. V. Korobko, // Construction mechanics and calculation of structures. – 2012. – No. 2. – S. 18-23.
18. Korobko, A. V. Determination of maximal bending of rhombic plates with mixed boundary conditions by using the ratio of conformal radii [Text] / A. V. Korobko, A. A. Chernyaev // Structural mechanics of engineering constructions and buildings. – 2011. – No. 4. – S. 21-25.
19. Chernyaev, A. A. The Development of the interpolation method relative conformal radius for solving problems of transverse bending of plates [Text]: Dis. kand. tech. Sciences: 05.23.17 / Chernyaev Andrey. – Eagle, 2013. – 211 s.
20. Chernyaev, A. A. Dynamic analysis round, the right polygonal, triangular, and rhombic pivotally supported plates by using the ratio of the conformal radius as a geometric argument [Text] // Structural mechanics of engineering constructions and buildings. 2012. No. 2. S. 63-71.
21. Chernyaev, A. A. Dynamic analysis round, the right polygonal, triangular, and rhombic rigidly clamped plates by using the ratio of the conformal radius as a geometric argument [Text] // Bulletin of Saratov state technical University. 2012. Vol. 2. No. 1 (65). S. 24-33.

**Viktor Korobko**

OrelStateuniversity, Orel

Doctor of technical sciences, professor, professor of the department «Building designs and materials»

Ph.: +7 (4862) 73-43-49

E-mail: [vikor10@mail.ru](mailto:vikor10@mail.ru)

**Andrey Chernyaev**

OrelStateuniversity, Orel

Candidate of technical sciences, associate professor of the department «Building highway»

Ph.: +7 (4862) 73-43-49

E-mail: [chernyev87@yandex.ru](mailto:chernyev87@yandex.ru)

**Stanislav Shlyakhov**

OrelStateuniversity, Orel

graduate student of the department «Building designs and materials»

Ph.: +7 (4862) 73-43-49

E-mail: [shlyakhov.stas@mail.ru](mailto:shlyakhov.stas@mail.ru)

## СПОСОБЫ УСИЛЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КАМЕННЫХ СВОДОВ

*Обсуждается техническое состояние и механизмы разрушения эксплуатируемых каменных сводов цилиндрического очертания. Приводятся известные способы их усиления. Описываются достоинства и недостатки методов усиления посредством устройства сплошного армирующего штукатурного слоя и ребер жесткости. Как более современный и предпочтительный предлагается способ усиления сводов путем их армирования сетками из композитных материалов (ФАП). Представляются технология устройства и достоинства системы усиления композитными материалами Fibre Reinforced Cementitious Matrix (FRCM), в рамках которой, вместо эпоксидного клея, используются специальные штукатурные растворы. Анализируются результаты экспериментальных исследований сжато-изгибаемых армированных и неармированных каменных образцов. Делается вывод о том, что наибольший эффект армирования сетками из композитных материалов (ФАП) может быть достигнут для сводов полукруглого очертания и наименьший эффект для пологих сводов.*

**Ключевые слова:** каменные своды, усиление, сетки из композитных материалов (ФАП).

Каменные своды имеют более чем тысячелетнюю историю и являются важными конструктивными элементами зданий исторической застройки. Однако их проблема до сих пор является актуальной при оценке технического состояния, ремонтах, реконструкции и модернизации зданий. Часто наблюдаемыми дефектами сводов являются трещины, деградация и расслоение кладки и даже вывалы ее отдельных фрагментов, причиной которых могут быть эксплуатационный износ, перегрузки, динамические воздействия, техногенные и другие факторы [1]. Особенно неблагоприятным является деградация растворных швов, которые в зданиях старой застройки обычно выполнялись на слабых известковых либо известково-глиняных растворах. В результате нарушения сцепления между растворными швами и камнями снижается прочность кладки на растяжение и сдвиг. Восстановление работоспособности поврежденных сводов обычно осуществляется путем усиления либо вычинки их наиболее поврежденных фрагментов.

Начиная от простейших форм, определяемых эмпирическим путем, наибольшее архитектурное и конструктивное совершенствование каменные своды получили в 19 веке благодаря развитию методов строительной механики [2,3]. Оптимальным являлось очертание свода совпадающее с линией давления. Расчет каменных сводов до настоящего времени осуществляется с использованием упрощенных моделей, а критерием исчерпания их несущей способности является потеря устойчивости. При загрузении цилиндрических сводов предельной нагрузкой их разрушение происходит в результате потери статического равновесия, вызванного образованием шарниров (рис. 1) [4]. Последние обусловлены выходом кривой давления за пределы ядра сечения, в результате чего в нем превалирует растягивающие напряжения.

Для предотвращения такого механизма разрушения эксплуатируемых сводов возможно их усиление путем увеличения изгибной жесткости сечения, например, путем устройства армирующего штукатурного слоя (в том числе и из торкретбетона) с внутренней или внешней (хребтовой) поверхности свода. Такой способ кроме утяжеления свода приводит к снижению его паропроницаемости. Последнее является существенным для сводов с росписями и фресками на внутренней поверхности. Наличие с внешней стороны свода армирующего слоя из железобетона приводит к аккумулялированию влажности в каменной кладке и, как следствие, деградации росписей и фресок. В этом случае более предпочтительным может быть

устройством с внешней стороны свода ребер, что иногда имело место в старых сводах во время их возведения [2].

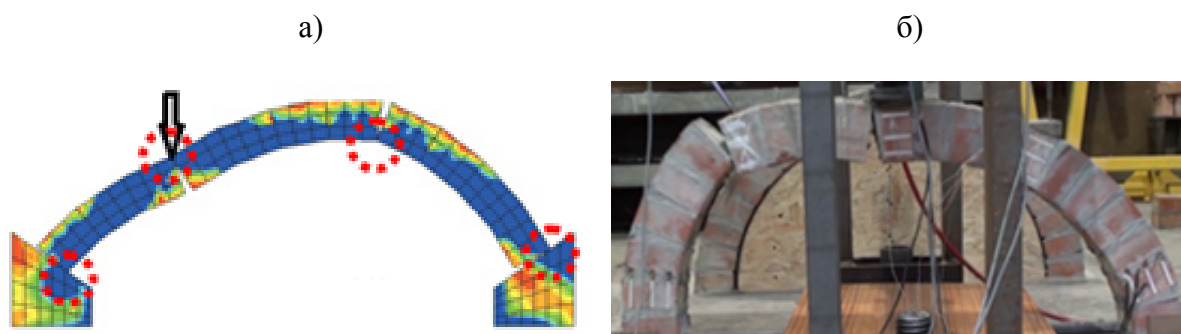


Рисунок 1 – Напряженно-деформированное состояние (а) и механизм разрушения (б) цилиндрических каменных сводов

Ребра усиления могут быть выполнены из каменной кладки, железобетона, клееной древесины и стальных профилей (рис. 2). Проблемным здесь является соединение ребер с каменным сводом, которое может быть выполнено в виде стальных анкеров или кляммеров. Такие соединения, как правило, являются податливыми, что необходимо учитывать при оценке совместной работы ребер усиления со сводом. Кроме этого при загрузке свода на участках между ребрами, например, засыпкой и расположенными на ней конструкциями пола, свод оказывается подвешенным к ребрам, в связи с чем в нем могут возникнуть растягивающие напряжения, неблагоприятно влияющие на несущую способность каменной кладки.

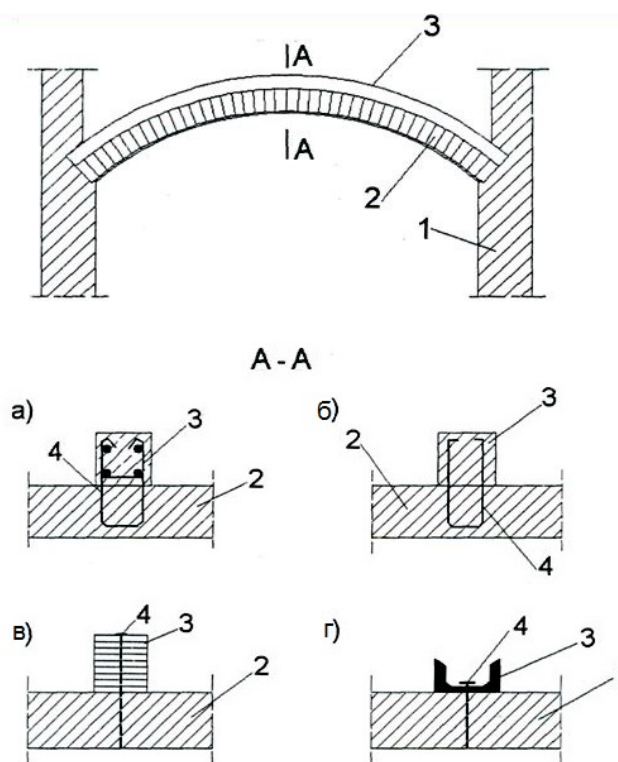


Рисунок 2 – Усиление цилиндрических каменных сводов со стороны хребтовой поверхности с помощью ребер железобетонных (а), кирпичных (б), из клееной древесины (в) и стальных профилей (г); 1 - каменные стены, 2 - каменный свод, 3 - ребра усиления, 4 - стальные анкера

Как с технической так и с экономической точек зрения более предпочтительным может быть способ усиления путем армирования внешней и внутренней поверхностей свода сетками из композитных материалов (рис. 3). По этой технологии увлажненная поверхность кладки покрывается тонким слоем раствора из неорганических минеральных материалов с модифицированными полимерными добавками, в который втапливается армирующая сетка из композитных материалов. Затем наносят защитный штукатурный слой толщиной 8-10 мм, и уже его поверхность подвергается финишной обработке. При необходимости в защитный слой может утапливаться вторая сетка, обеспечивающая повышенную прочность усиления [5]. Такая система усиления известна за рубежом как FRCM (Fibre Reinforced Cementitious Matrix) и одна из ее разновидностей является система Ruredilx Mech. В них используются сетки из углеволокон, обладающие следующими механическими свойствами: прочность на растяжение – 4800 МПа; модуль упругости – 240 ГПа; деформативность при разрыве – 1,8%. Используются также сетки из арамидных и стекловолокон. В последнее время в России начали использоваться сетки из базальтовых волокон [6].

а)



б)



*Рисунок 3 – Усиление каменных сводов сетками из композитных материалов с наружной (а) и внутренней (б) поверхностей*

Рассматриваемый способ обладает следующими достоинствами:

- простой технологией;
- высокой сцепляемостью армирующего штукатурного слоя к поверхности каменной кладки;
- высокой совместимостью армирующего слоя с кирпичной кладкой, т.е. сближенными деформационными характеристиками, такими как модули упругости, коэффициенты температурного расширения;
- высокой огнестойкостью, коррозионной стойкостью, водостойкостью и паропроницаемостью, что позволяет производить армирование каменных конструкций как изнутри, так и снаружи зданий.

К достоинствам рассматриваемого способа следует отнести его универсальность и возможность использования для любых форм и очертаний конструкций.

Следует отметить что, несмотря на имеющийся практический опыт и многочисленные экспериментально-теоретические исследования в зарубежной, равно как и отечественной нормативной литературе, приводятся весьма ограниченные данные относительно методов расчета каменных конструкций, которые армируются композиционными материалами. Во многих случаях армирование назначается методом так называемой "инженерной интуиции" без должного расчетного обоснования. Известные расчетные модели армированных каменных конструкций построенные по аналогии с железобетонными (на основе статического равновесия внешних и внутренних сил в расчетных сечениях) позволяют получить относитель-

но хорошую сходимость с опытами лишь для простейших случаев, например, изгибаемых элементов [7-11]. Для случая армирования сжато-изгибаемых конструкций, к которым относятся каменные своды, практические методы расчета отсутствуют вообще. В связи с этим авторами выполнены экспериментальные исследования армированных и неармированных образцов каменной кладки толщиной в полкирпича (12 см), которые испытывались на сжатие с изгибом согласно схеме на рис. 4.

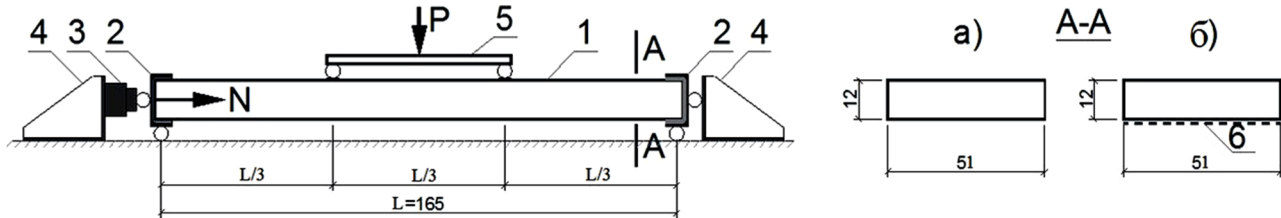


Рисунок 4 – Схема испытаний неармированных (а) и армированных (б) каменных образцов на сжатие с изгибом (размеры в см);

1 - испытываемый образец, 2 - стальное обрамление, 3 - гидравлический домкрат создающий сжимающее усилие  $N$ , 4 - стальные упоры, 5 - распределительная траверса для передачи усилия  $P$ , 6 - сетчатое армирование из композитных материалов

В качестве арматуры использовались сетки из стекловолокон торговой марки Maregrid G220 итальянской фирмы Marei. Декларированная фирмой несущая способность сеток на растяжение составляла 45 кН на 1 погонный метр ширины, а относительное удлинение при разрыве 3%.

С целью определения несущей способности при изгибе  $M_{RD}$  было испытано по одному образцу с армированием и без армирования. Такое же количество образцов испытано с целью определения их несущей способности при сжатии  $N_{RD}$ . Остальная часть образцов (3 без армирования и 3 с армированием) испытывались при совместном действии продольного усилия и изгибающего момента  $M = PL/3$ , вызванного действием силы  $P$ . При этом во время загрузки усилие  $N$  поддерживалось на одинаковом уровне, а усилие  $P$  возрастало вплоть до разрушения образцов.

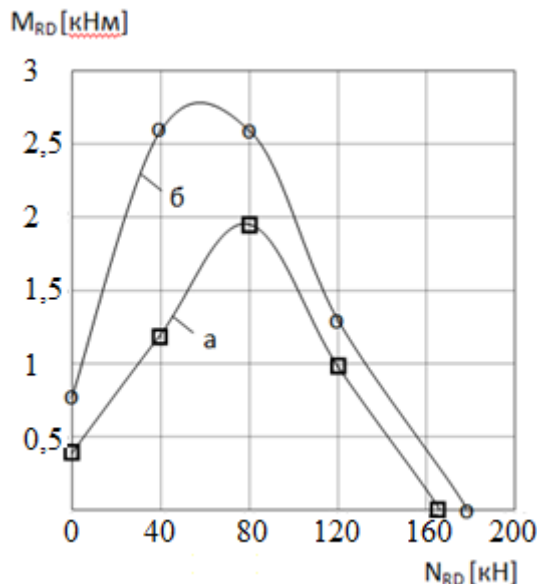


Рисунок 5 – Графики интеракции между несущей способностью на сжатие  $N_{RD}$  и изгиб  $M_{RD}$  неармированных (а) и армированных (б) сжато-изгибаемых образцов

Основные результаты испытаний представлены на рис. 5 в виде интерактивных зависимостей " $M_{RD} - N_{RD}$ ", из которых следует, что с увеличением осевого сжимающего усилия до уровня  $N = (0,4 - 0,5) N_{RD}$  несущая способность образцов при изгибе возрастает, а при более высоком уровне  $N$  падает. При этом армированные образцы показали более высокую несущую способность при сжатии с изгибом по сравнению с неармированными образцами.

Характерно, что для уровня нагружения  $N = (0,0 - 0,5) N_{RD}$  несущая способность при изгибе возросла более чем в 2 раза, в то время как при более высоком уровне усилия  $N$  это возрастание не превышало 30%. В образцах работающих только на изгиб наличие армирования увеличило несущую способность  $M_{RD}$  почти на 100%, в то время как работающих только на сжатие всего лишь на 8%. Приведенные эффекты армирования для разных уровней загрузки продольным уси-

лием  $N$  коррелируют с механическими разрушениями образцов. При малых уровнях усиления  $N$  разрушение происходило в результате разрыва арматуры, а при более высоких – в результате раздробления каменной кладки в сжатой зоне.

На основании приведенных экспериментальных данных можно сделать вывод, что армирование сетками из композитных материалов будет наименее эффективным для пологих сводов, в которых лимитирующими являются сжимающие усилия. Для вспарушенных, например, сводов полукруглого очертания, в которых определяющими являются изгибающие моменты, можно ожидать наибольший эффект армирования.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физдель, И.А. Дефекты в конструкциях, сооружениях и методы их устранения [Текст]. – 3-е издание. – М.: Стройиздат, 1987.
2. Бернгард, В.Р. Арки и своды [Текст]: Руководство по устройству и расчету арочных и сводчатых перекрытий. – С-Петербург: Типография Ю.Н. Эрлих. – 1901. – 128 с.
3. Ahnert R., Krause K. H. Typische Baukonstruktionen von 1860 bis 1960 zur Beurteilung der vorhandenen Bausubstanz [Text]. – Band 1,2. – Berlin, 2009.
4. Van Parys L., Noel J., D. Lamblin, Bultot E., Delehouzee L. FE "Block & Interaction" Approach for Computing the Impact of Tower Inclinations on the Safety of a Masonry Arch System in the Our Lady Cathedral of Tournai (BE) [Text]. – Structural Analysis of Historical Constructions. – Wroclaw, 2012.
5. Орлович, Р.Б. Зарубежный опыт армирования каменных конструкций [Текст] / Р.Б. Орлович, В.А. Деркач. – Жилищное строительство, 2011. – №11.
6. Альбом технических решений по применению базальтовой сетки ГРИДЕКС в строительстве [Текст]: методическое пособие по проектированию. – Москва, 2016.
7. Papanikolaou C., Triantafyllou T., Fabregat P.R. Increase of load-carrying capacity of masonry with textile reinforced rendering [Text]. – Mauerwerk. – № 19/2015. – pp. 40-51.
8. Seim W., Pfeiffer U., Vog T. Nachträgliche Verstärkung gemauerter Tragwerke mit Faserverbundwerkstoffen. – Bautechnik 87 (2010). – Heft 2.
9. Mousa M.A., Uddin N. Experimental and analytical study of carbon fiber-reinforced polymer (FRP)/autoclaved aerated concrete (AAC) sandwich panels. – Engineering Structures. – vol. 31. – 2009. – pp. 2337-2344.
10. Aiello M.A., Sciolti S.M. Bond analysis of masonry structures strengthened with CFRP sheets, Construction and Building Materials. – Vol. 20. – № 1–2. – 2006. – pp. 90-100.
11. Biolzi L., Ghittoni C., Fedele R., Rosati G. Experimental and theoretical issues in FRP-concrete bonding. Construction and Building Materials. – Vol. 41. – 2013. – pp. 182-190.

#### **Орлович Роман Болеславович**

Западно-Померанский технологический университет, г. Щецин, Республика Польша  
Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Общего строительства»  
E-mail: [orlowicz@mail.ru](mailto:orlowicz@mail.ru)

#### **Чакалиди Валерий Христофорович**

Строительная компания "Инвест Проект", г. Санкт-Петербург  
Инженер  
E-mail: [tsakalidis88@yahoo.com](mailto:tsakalidis88@yahoo.com)

---

R. ORLOVICH, V. CHAKALIDI

## STRENGTHENING METHODS FOR CYLINDRICAL MASONRY VAULTS

*The technical condition and failure mechanisms of exploited cylindrical masonry vaults are discussed. Known techniques for their strengthening are given. The advantages and disadvantages of strengthening techniques by installation of solid reinforced plaster layer and stiff edges (beams) are described. The strengthening of vault by composite mesh (FRP) reinforcement is offered as more modern and preferred method. Installation technology and advantages of strengthening system by using composite materials which is called Fibre Reinforced Cementitious Matrix (FRCM) are presented, within which, instead of an epoxy adhesive, used special plasters. The results of experimental investigations of*

*reinforced and unreinforced masonry compression bending specimens are analyzed. It is concluded that the greatest effect of composite mesh (FRP) reinforcement can be obtained for semicircular vaults, and the least effect for shallow (low angle) vaults.*

**Keywords:** masonry vaults, strengthening, composite mesh (FRP).

## **BIBLIOGRAPHY**

1. Fizdel', I.A. Defekty v konstruktsiyakh, sooruzheniyakh i metody ikh ustraneniya [Tekst]. – 3-ye izdaniye. – M.: Stroyizdat, 1987.
2. Bergard, V.R. Arki i svody [Tekst]: Rukovodstvo po ustroystvu i raschetu arochnykh i svodchatykh perekrytiy. – S-Peterburg: Tipografiya YU.N. Erlikh. – 1901. – 128 s.
3. Ahnert R., Krause K. H. Typische Baukonstruktionen von 1860 bis 1960 zur Beurteilung der vorhandenen Bausubstanz [Text]. – Band 1,2. – Berlin, 2009.
4. Van Parys L., Noel J., D. Lamblin, Bultot E., Delehouzee L. FE "Block & Interaction" Approach for Computing the Impact of Tower Inclinations on the Safety of a Masonry Arch System in the Our Lady Cathedral of Tournai (BE) [Text]. – Structural Analysis of Historical Constructions. – Wroclaw, 2012.
5. Orlovich, R.B. Zarubezhnyy opyt armirovaniya kamennykh konstruktsiy [Tekst] / R.B. Orlovich, V.A. Derkach. – Zhilishchnoye stroitel'stvo, 2011. – №11.
6. Al'bom tekhnicheskikh resheniy po primeneniyu bazal'tovoy setki GRIDEKS v stroitel'stve [Tekst]: metodicheskoye posobiye po proyektirovaniyu. – Moskva, 2016.
7. Papanikolaou C., Triantafillou T., Fabregat P.R. Increase of load-carrying capacity of masonry with textile reinforced rendering [Text]. – Mauerwerk. – № 19/2015. – pp. 40-51.
8. Seim W., Pfeiffer U., Vog T. Nachträgliche Verstärkung gemauerter Tragwerke mit Faserverbundwerkstoffen. – Bautechnik 87 (2010). – Heft 2.
9. Mousa M.A., Uddin N. Experimental and analytical study of carbon fiber-reinforced polymer (FRP)/autoclaved aerated concrete (AAC) sandwich panels. – Engineering Structures. – vol. 31. – 2009. – pp. 2337-2344.
10. Aiello M.A. , Sciolti S.M. Bond analysis of masonry structures strengthened with CFRP sheets, Construction and Building Materials. – Vol. 20. – № 1–2. – 2006. – pp. 90-100.
11. Biolzi L., Ghittoni C., Fedele R., Rosati G. Experimental and theoretical issues in FRP-concrete bonding. Construction and Building Materials. – Vol. 41. – 2013. – pp. 182-190.

### **R. Orlovich**

West Pomeranian technological university, Szczecin, Republic Poland  
Doctor of technical science, professor, head of the department «General construction»  
E-mail: [orlowicz@mail.ru](mailto:orlowicz@mail.ru)

### **V. Chakalidi**

Construction company "Invest Project", Saint Petersburg  
Engineer  
E-mail: [tsakalidis88@yahoo.com](mailto:tsakalidis88@yahoo.com)

УДК 624.012.41

ПЛЕВКОВ В.С., БАЛДИН И.В., ПЛЕВКОВ Р.А.

## ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ПРОЧНОСТИ НОРМАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ИЗГИБАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБЛАСТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

*Рассматриваются особенности решения некоторых задач расчета прочности нормальных сечений изгибаемых железобетонных элементов прямоугольного сечения с одиночной и двойной ненапрягаемой арматурой с использованием областей относительного сопротивления. Показано влияние на армирование элементов прочности бетона и геометрических размеров сечения. Предложены зависимости для определения минимальной прочности бетона, минимальных размеров сечения, минимального одиночного или двойного армирования изгибаемых железобетонных элементов в зависимости от величины внешнего воздействия и расположения арматуры по высоте сечения. Рассмотрен расчет железобетонных элементов со смешанным армированием растянутой зоны арматурой разных классов, которое часто встречается при усилении железобетонных конструкций. Полученные зависимости позволяют решать задачи прямого и обратного проектирования нормальных сечений изгибаемых железобетонных элементов с одиночным и двойным армированием, получая экономичные и наглядные решения.*

**Ключевые слова:** *изгибаемые железобетонные элементы, прочность нормальных сечений, области относительного сопротивления*

Железобетонные изгибаемые элементы с одиночной и двойной ненапрягаемой арматурой широко применяются в строительстве. Несмотря на достаточно хорошую разработку расчетов таких элементов по прочности нормальных сечений, некоторые вопросы остаются нерешенными и вызывают сомнения. К таким вопросам относятся: нормирование минимального армирования сечения; вопросы определения граничного значения относительной высоты сжатой зоны бетона; прочность перearмированных сечений; вопросы проектирования элементов минимальных размеров, армирования и другие [1-6].

В данной статье рассматриваются особенности решения этих задач с использованием областей относительного сопротивления по прочности на примере изгибаемых железобетонных элементов прямоугольного сечения с одиночной и двойной ненапрягаемой арматурой. Однако полученные результаты и подходы будут также справедливы и для других случаев загрузки железобетонных элементов.

Условия прочности нормальных сечений изгибаемых железобетонных элементов прямоугольного профиля с двойным армированием имеют вид (рис. 1):

$$M \leq 0,5R_b b x (h - x) + \sigma_s A_s (0,5h - a) + \sigma_{sc} A'_s (0,5h - a'), \quad (1)$$

$$R_b b x = \sigma_s A_s - \sigma_{sc} A'_s. \quad (2)$$

Если разделить выражение (1) на максимальный момент, воспринимаемый бетонным сечением относительно его центра тяжести (при  $x = h/2$ )  $M_{b,max} = R_b b h^2 / 8$ , а уравнение (2) – на максимальное продольное усилие, воспринимаемое бетонным сечением  $N_{b,max} = R_b b h$ , то можно получить условия прочности нормальных сечений в относительных величинах, которые для элементов с одиночным армированием примут вид [3]:

$$\alpha_m \leq \alpha_{mb} + \alpha_{ms}, \quad (3)$$

$$\xi = \alpha_s \Psi_{st}, \quad (4)$$

где  $\alpha_m = \frac{8M}{R_b b h^2}$  – относительный момент, действующий на рассматриваемое сечение;

$\alpha_{mb} = 4\xi(1 - \xi)$  и  $\alpha_{ms} = 8\alpha_s\psi_{st}\zeta_s$  – относительные моменты, воспринимаемые сжатой зоной бетона и растянутой арматурой относительно центра тяжести бетонного сечения;

$\alpha_s = \frac{R_s A_s}{R_b b h}$  – относительное усилие, воспринимаемое арматурой растянутой зоны;

$\zeta_s = 0,5 - \delta_s$ ,  $\delta_s = a_s/h$ ,  $\xi = x/h$  – относительные характеристики сечения,

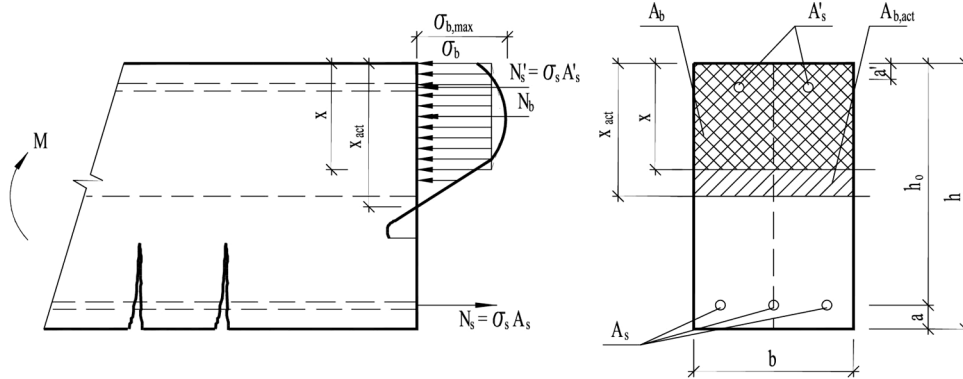


Рисунок 1 – К расчету прочности нормальных сечений железобетонных элементов прямоугольного профиля

$\psi_{st} = \sigma_s(\xi)/R_s$  – относительные напряжения в арматуре растянутой зоны, определяемые по формулам

$$\psi_{st} = \begin{cases} \psi[0,8 \cdot \xi^{-1}(1 - \delta) - 1], & \text{- по СП 63.13330.2012*} \\ \frac{\psi[\omega \cdot \xi^{-1}(1 - \delta) - 1]}{1 - \frac{\omega}{1,1}}, & \text{- по СНиП 2.030.1-84*†} \\ 2 \frac{1 - \delta - \xi}{1 - \delta - \xi_R} - 1, & \text{- по [8],} \end{cases} \quad (5)$$

где  $\xi = x/h = \xi_1(1 - \delta)$  – относительная высота сжатой зоны бетона нормального сечения;  
 $\delta = a/h$  – относительное положение продольной арматуры в нормальном сечении;  
 $\psi = \sigma_{sc,u}/R_s$ .

Из выражения (5) следует, что изменение напряжений в продольной арматуре зависит не только от относительной высоты сжатой зоны  $\xi$ , но и от положения арматуры по высоте сечения. При этом напряжения в продольной арматуре линейно связаны с величиной  $\delta$ , что соответствует линейному распределению деформаций по высоте сечения.

Условие (3) с учетом (4) можно представить в виде

$$\alpha_m \leq 4\alpha_s\psi_{st}(1 + 2\zeta_s - \alpha_s\psi_{st}), \quad (6)$$

или

$$\alpha_m \leq 4\xi(1 + 2\zeta_s - \xi). \quad (7)$$

Из выражения (6) видно, что величина относительного предельного момента, воспринимаемого нормальным сечением изгибаемого элемента с одиночным армированием, зависит в основном от относительного усилия в арматуре растянутой зоны, а также ее располо-

\* СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003 / ГУП НИИЖБ. М.: ФАУ «ФЦС», 2012 г. – 162 с.

† СНиП 2.03.01-84\*. Бетонные и железобетонные конструкции / Госстрой России. – М.: ГУП ЦПП, 2000. – 76 с.

жения в сечении. Эта зависимость при  $\psi_{st} = const$  имеет вид параболы с максимальным значением (при  $\xi = \alpha_s = 0,5$ )  $\alpha_m = 1 + 4\xi_s$ .

На рис. 2 зависимость показана кривой 1. Однако на эту зависимость накладывается ряд ограничений. На начальном участке зависимости – это требования СП 63.13330.2012 о минимальном армировании ( $\mu \geq \mu_{min}$ ) изгибаемых элементов, которые ограничивают кривую 1.

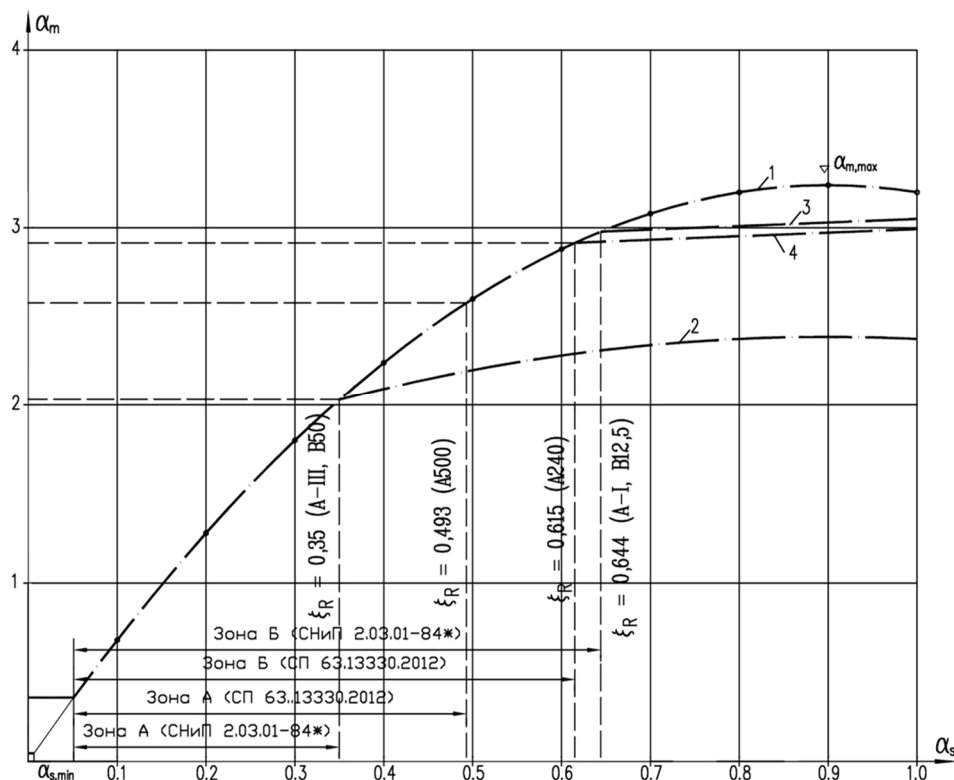


Рисунок 2 – Зависимости  $\alpha_m, \alpha_s$  для изгибаемого элемента: 1 – при  $\psi_{st} = const$ , 2, 3 и 4 – при  $\psi_{st}$  согласно (5)

На участке  $0 < \alpha_s \leq \alpha_{s,min}$ ,  $\alpha_m = \alpha_{m,min} = const$ . Однако, требования СП 63.13330.2012 в отношении минимальных процентов армирования изгибаемых элементов вряд ли можно признать обоснованным, так как полученные по их требованиям относительные усилия в арматуре растянутой зоны и соответствующие им относительные моменты для разных классов бетона и арматуры отличаются в 5–7 раз. Более логичным было бы нормировать значениями относительных усилий в рабочей арматуре  $\alpha_s = R_s A_s / (R_b A)$ . Другим ограничением зависимости (6) (кривая 1 на рис. 2) является значение  $\alpha_s = \xi_R$ , выше которого увеличение  $\xi$  приводит к снижению  $\psi_{st}$ . Изменение  $\alpha_m$  в зависимости от  $\alpha_s$  в этой зоне имеет более сложный характер и существенно зависит от относительных напряжений в растянутой арматуре  $\psi_{st}$ .

Из рис. 2 видно, что прирост относительных моментов  $\alpha_m$  уменьшается с увеличением величины  $\xi_R$ . Для реальных железобетонных изгибаемых элементов с ненапрягаемой арматурой используются, как правило, бетоны невысокой прочности. Прочность нормальных сечений таких элементов в зоне  $\xi > \xi_R$  возрастает незначительно (кривые 3 и 4 на рис. 2). Поэтому для упрощения расчетов в области  $\xi > \xi_R$  несущая способность сечения принимается постоянной, равной соответствующей величине  $\alpha_m$  на границе  $\alpha_s = \xi_R$ . Однако проектирование изгибаемых железобетонных элементов, нормальные сечения которых могут работать в зоне  $\xi > \xi_R$  не эффективно, поскольку в этой зоне прирост относительного момента  $\alpha_m$  значительно отстает от требуемого количества арматуры растянутой зоны. При  $\xi > \xi_R$

требуемая величина  $\alpha_s = \xi/\psi_{st}$  резко возрастает по гиперболической или линейной зависимостям [2, 8, 9].

Условия прочности нормальных сечений [выражения (3) и (6)] графически можно представить в виде перемещающейся границы области относительной прочности бетонного сечения  $\alpha_{mb} = 4(\xi - \xi^2)$  по линейным направляющим, наклонным к оси  $\alpha_n$  под углом  $\beta = \arctg(8\zeta_s)$  (рис. 3, а). На рис. 3,а видно, что для любого относительного изгибающего момента от внешних воздействий  $\alpha_{mi} = 8M_i/(R_b b h^2)$  условие прочности по нормальным сечениям будет соблюдаться, если точка  $\alpha_{mi}$ , нанесенная на оси  $\alpha_m$ , окажется на границе или внутри области прочности (сопротивления) нормального сечения. При этом максимальный относительный момент ( $\alpha_{m,max}$ ), который может воспринять нормальное сечение изгибаемого железобетонного элемента с одиночным армированием, будет достигать величины  $\alpha_{m,max} = 1 + 4\zeta_s$  (при  $\alpha_{mb} = \alpha_{mb,max} = 1$ ). На рис. 3,а граница области прочности из  $i$ -го положения перемещается в положение 2, для которого  $\xi = \alpha_s \psi_{st} = 0,5$

$$\alpha_{m,max} = 1 + 4\zeta_s. \quad (8)$$

Этому моменту соответствует максимальная площадь сечения одиночной арматуры изгибаемых элементов, которая равна

$$A_{s,max} = 0,5bhR_b/R_s \quad (9)$$

Выражение (8) позволяет определить для изгибаемых железобетонных элементов с одиночным армированием при заданном внешнем моменте  $M_i$  минимально возможную прочность бетона ( $R_{b,min}$ ), а также минимальные ширину ( $b_{min}$ ), высоту ( $h_{min}$ ) и площадь ( $A_{b,min}$ ) сечения элемента.

$$R_{b,min} = \frac{8M_i}{bh^2(1 + 4\zeta_s)}.$$

При постоянной высоте сечения  $h = const$

$$b_{min} = \frac{8M_i}{R_b h^2(1 + 4\zeta_s)}.$$

При заданном соотношении сторон сечения  $b = \chi h$

$$b_{min} = \sqrt[3]{\frac{8M_i \chi^2}{R_b(1 + 4\zeta_s)}};$$

$$h_{min} = \sqrt[3]{\frac{8M_i}{R_b \chi(1 + 4\zeta_s)}}.$$

При постоянной ширине сечения  $b = const$

$$h_{min} = \sqrt{\frac{8M_i}{R_b b(1 + 4\zeta_s)}}.$$

Минимальная площадь нормального сечения определяется выражениями:

$$A_{b,min} = \frac{8M_i}{R_b h(1 + 4\zeta_s)}, \quad \text{при } h = const;$$

$$A_{b,min} = \sqrt{\frac{8M_i b}{R_b(1 + 4\zeta_s)}}, \quad \text{при } b = const;$$

$$A_{b,min} = \sqrt[3]{\frac{64M_i^2 \chi}{R_b^2(1 + 4\zeta_s)^2}}, \quad \text{при } b = \chi h.$$

Увеличение прочности бетона или геометрических размеров сечения по сравнению с минимальными их значениями, приводит к уменьшению относительных усилий в растянутой арматуре  $\alpha_{si}$ , а следовательно, и ее площади  $A_{si}$  (рис. 4). В этом случае относительные усилия  $\alpha_{si}$  определяются из выражения (6):

$$\alpha_{si} = 0,5 \left[ 1 + 2\zeta_s - \sqrt{(1 + 2\zeta_s)^2 - \alpha_{mi}} \right].$$

Площадь растянутой арматуры, соответствующая  $\alpha_{si}$ , равна

$$A_{si} = \alpha_{si} \frac{R_b}{R_s} \cdot b \cdot h.$$

При смешанном армировании растянутой зоны арматурой разных классов, которое часто встречается при усилении железобетонных конструкций, величина дополнительного армирования может быть достаточно просто определена с учетом рис. 3, б, на котором искомая величина  $\alpha_{s2}$  равна горизонтальному смещению границы области  $\alpha_{mb} - \alpha_{nb}$  из положения 3 в положение 5.

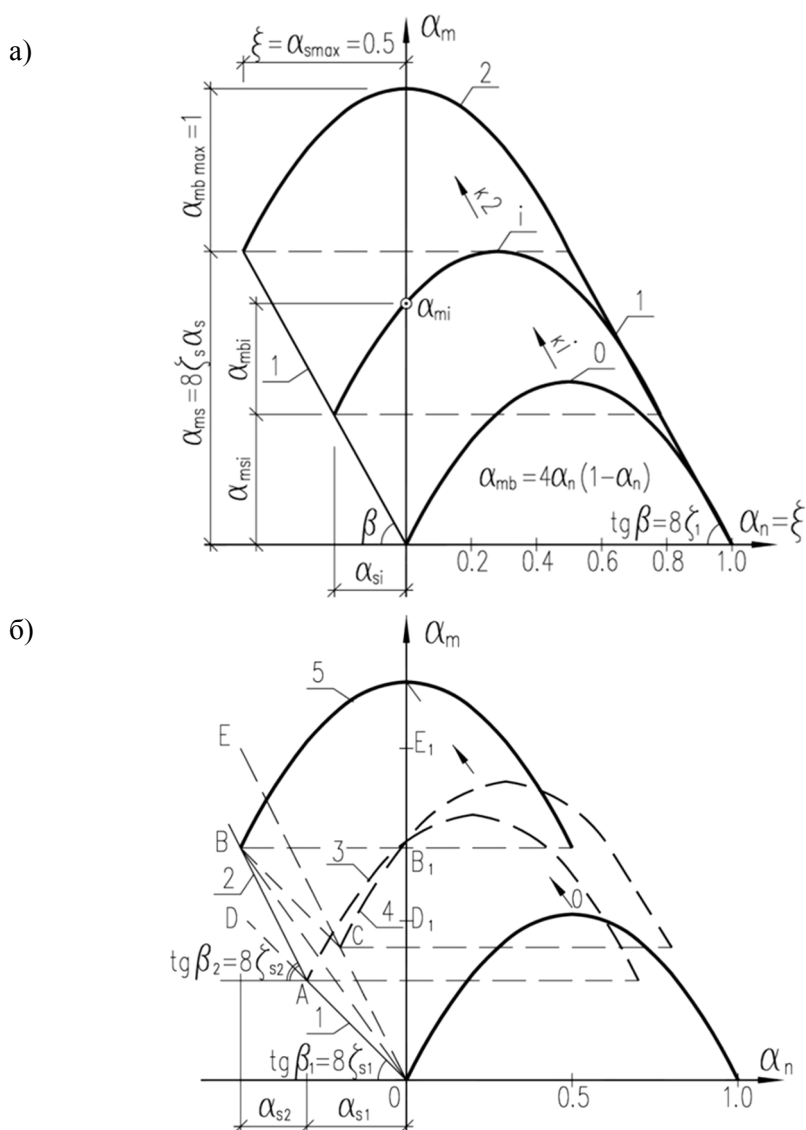


Рисунок 3 – К расчету прочности нормальных сечений изгибаемых железобетонных элементов с одиночным армированием (а) и со смешанным армированием (б)

Аналитически величина  $\alpha_{s2}$  определяется выражением:

$$\alpha_{s2} = 0,5 \cdot \left[ 1 + 2\zeta_{s2} - 2\alpha_{s1} - \sqrt{(1 - 2\zeta_{s2} - 2\alpha_{s1})^2 - \alpha_m + \alpha_{s1} \cdot (1 + 2\zeta_{s1} - \alpha_{s1})} \right].$$

Максимальную площадь одиночной дополнительной арматуры растянутой зоны можно определить из условия

$$A_{s2,max} = (0,5 - \alpha_{s1}) \cdot \frac{R_b}{R_s} A.$$

Этому условию соответствует такое положение области  $\alpha_{mb} - \alpha_{nb}$ , при котором  $\alpha_{mb} = \alpha_{mb,max} = 1$  (положение 5 на рис. 3, б).

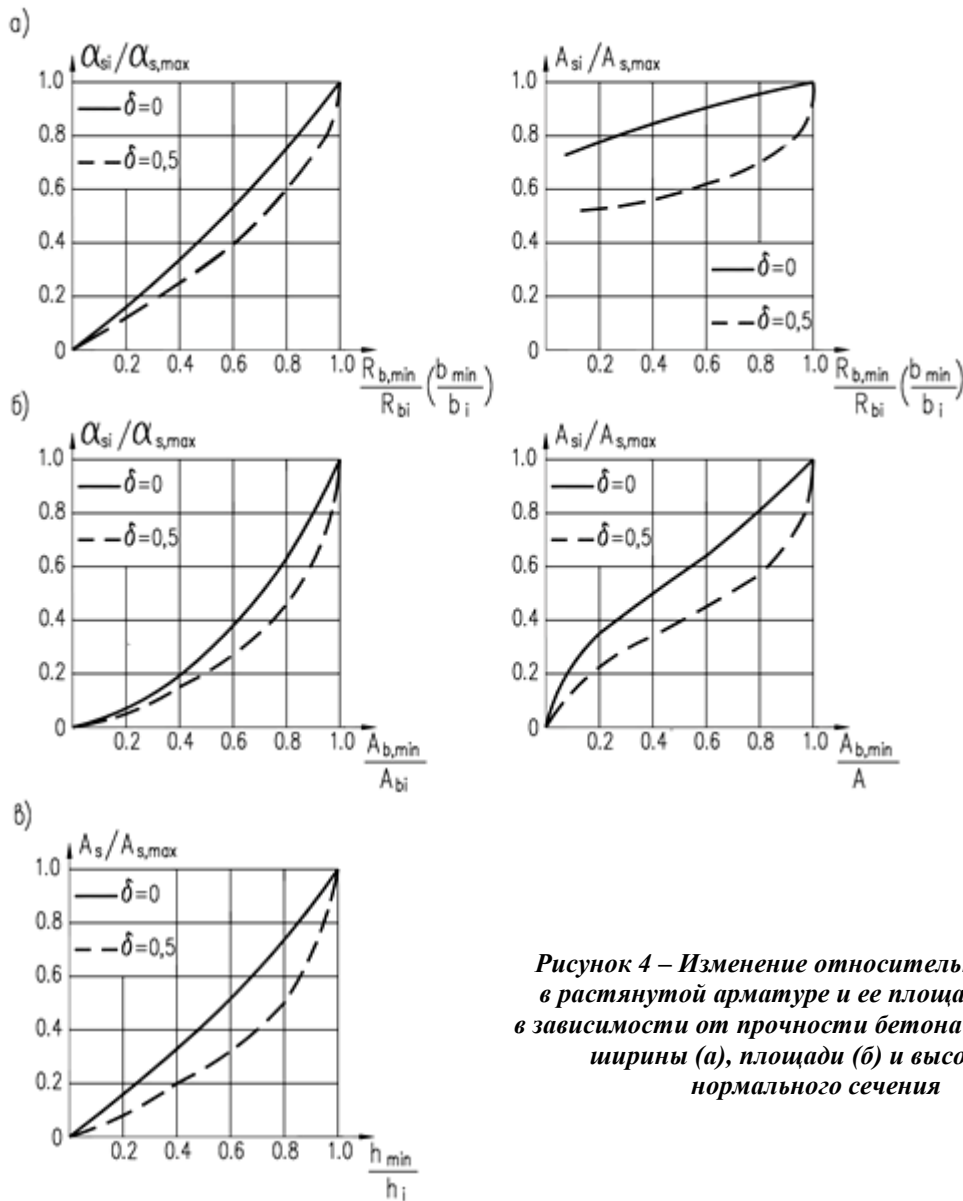


Рисунок 4 – Изменение относительных усилий в растянутой арматуре и ее площади сечения в зависимости от прочности бетона (а), а также ширины (а), площади (б) и высоты (в) нормального сечения

Из рассмотрения рис. 3, а и 3, б видно, что наличие в изгибаемом элементе одиночной арматуры в разных уровнях растянутой зоны или различных классов приводит к замене прямой направляющей ОВ двумя ломаными линиями ОАВ и ОСВ. При этом, независимо в какой последовательности будет перемещаться область  $\alpha_{mb} - \alpha_{nb}$  (по направляющим ОАВ или ОСВ), конечный результат расчета одинаков. Перераспределение арматуры  $A_{s1}$  в уровень  $A_{s2}$  или наоборот приводит к замене ломаных направляющих ОАВ и ОСВ на прямые ОД или ОЕ. При этом более эффективным является замена  $A_{s1}$  на  $A_{s2}$ , так как относительный момент, воспринимаемый арматурой, в этом случае принимает наибольшее значение. На рис. 3, б  $\alpha_{ms,max}$  равен отрезку ОЕ<sub>1</sub> на оси  $\alpha_m$ , который больше ОВ<sub>1</sub> и ОД<sub>1</sub>.

Предложенный метод позволяет быстро определить одиночную арматуру растянутой зоны сечения при расположении ее в произвольном числе уровней по высоте сечения.

Нормальные сечения изгибаемых железобетонных элементов могут работать в зоне «А» (рис. 2, где  $\xi_R < 0,5$ ). Это возможно при использовании бетона и арматуры повышенных классов.

Изменение характера армирования в сечении может перевести работу нормального сечения из зоны «Б» в зону «А». Для таких сечений воспринимаемый максимальный относительный момент при одиночном армировании равен

$$\alpha_{m1} = \alpha_{mbR} + \alpha_{ms1}.$$

На рис. 5 этому условию соответствует положение 1 области  $\alpha_{mb} - \alpha_{nb}$ . При дальнейшем увеличении внешнего воздействия относительный момент, воспринимаемый бетоном сжатой зоны, согласно [3] принимается постоянным

$$\alpha_{mb} = \alpha_{mbR} = 4\xi_R(1 - \xi_R) = const,$$

и сжатая зона усиливается дополнительным армированием. На рис. 5 область  $\alpha_{mb} - \alpha_{nb}$  из положения 1 перемещается по оси  $\alpha_m$  вверх и занимает положение 2, когда точка  $\alpha_{m1}$  оказывается внутри или на границе области  $\alpha_{mb} - \alpha_{nb}(\xi)$ . В этом случае

$$\alpha_{m1} = \alpha_{mbR} + \alpha_{ms1} = 4\xi_R(1 - \xi_R) + 8\zeta_s\alpha_{s,tot}.$$

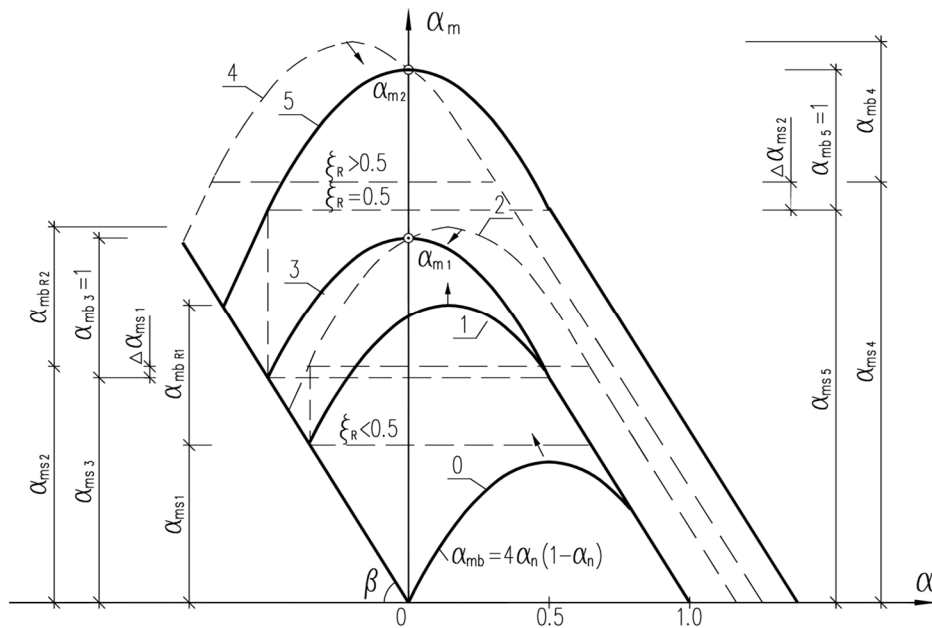


Рисунок 5 – К расчету прочности нормальных сечений изгибаемых железобетонных элементов с двойным армированием

На рис. 5 видно, что в положении 2 сжатая зона бетона используется не эффективно, поскольку  $\alpha_{mbR} < \alpha_{mb,max}$ , которая равна единице при  $\xi = 0,5$ . Максимальное использование сжатой зоны бетона приводит к снижению относительного момента, воспринимаемого арматурой в сечения. На рис. 5 область  $\alpha_{mb} - \xi$  занимает положение 3, которое соответствует одиночному армированию, хотя и в переармированной зоне работы сечения. В отдельных случаях одиночное армирование при  $\xi > \xi_R$  (положение 3 на рис. 5) может оказаться экономичнее или равным суммарному двойному армированию сечения (положение 2), кроме того одиночное армирование может оказаться более технологичным. Для положения 3 на рис. 5

$$\alpha_{m1} = 1 + \alpha_{ms2}.$$

Из совместного рассмотрения положений 2 и 3 имеем

$$1 - \alpha_{mbR} = \alpha_{ms2} - \alpha_{ms3} = \Delta\alpha_{ms1},$$

или

$$1 - 4\xi_R(1 - \xi_R) = 8\zeta_s(\alpha_{s,tot} - \alpha_s\psi_{st}).$$

Отсюда

$$\alpha_s = \frac{1}{\psi_{st}} \left[ \alpha_{s,tot} - \frac{1 - 4\xi_R(1 - \xi_R)}{8\zeta_s\alpha_{s,tot}} \right].$$

Для гиперболической зависимости  $\psi_s - \xi$  в переармированной зоне работы нормального сечения

$$\alpha_{s,tot} \leq \frac{1 - 4\xi_R(1 - \xi_R)}{8\zeta_s \left[ 1 - \frac{\psi \cdot (2\omega(1 - \delta) - 1)}{1 - \frac{\omega}{1,1}} \right]} \quad \text{- по СНиП 2.03.01-84*}; \quad (10)$$

$$\alpha_{s,tot} \leq \frac{1 - 4\xi_R(1 - \xi_R)}{8\zeta_s [1 - \psi \cdot (1,6 \cdot (1 - \delta) - 1)]} \quad \text{- по СП 63.13330.2012.}$$

Таким образом, одиночное армирование нормальных сечений изгибаемых элементов будет меньше суммарного двойного армирования, если внешний относительный момент находится в пределах

$$\bar{\alpha}_m < \alpha_{mi} \leq \bar{\bar{\alpha}}_m,$$

где  $\bar{\alpha}_m = 4\xi_R(1 + 2\zeta_s - \xi_R)$  – относительный предельный момент, воспринимаемый нормальным сечением с одиночным армированием при  $\xi = \xi_R < 0,5$  (на рис. 6 – положение 1);

$\bar{\bar{\alpha}}_m = 4\xi_R(1 + 2\zeta_s - \xi_R) + 2\zeta_s\alpha_{s,tot}$  – относительный момент, воспринимаемый нормальным сечением изгибаемого элемента с двойным армированием, где  $\alpha_{s,tot}$  не превышает значений, определяемых выражением (10) (на рис 5 – положение 2).

При работе нормальных сечений в зоне «Б» ( $\xi_R > 0,5$ ), что имеет место в большинстве изгибаемых элементов с двойной арматурой, наименьшее суммарное армирование имеет место также при  $\xi_R = 0,5$  (положение 5 на рис. 5).

Тогда

$$\alpha_{ms5} = \alpha_{ms4} - 1 + 4\xi_R(1 - \xi_R),$$

или

$$\alpha_{s,tot,5} = \alpha_{s,tot,4} - \frac{1 + 4\xi_R(1 - \xi_R)}{8(\zeta_s + \zeta'_s)}.$$

Такое положение полностью совпадает с полученными ранее результатами П.Л. Пастернака [10]. При  $\delta_s = \delta'_s$  П.Л. Пастернаком выявлено, что для элементов любой формы поперечного сечения, минимальная площадь ( $A_s + A'_s$ ) имеет место в тех случаях, когда граница сжатой зоны бетона делит пополам расстояние между центрами тяжести арматур  $A_s$  и  $A'_s$  [10]. Поэтому эффективная высота сжатой зоны

$$x_{ef} = 0,5 \cdot (h_0 - a') + a' = 0,5 \cdot (h_0 + a') \approx 0,55h_0.$$

При этом минимальную сумму растянутой и сжатой арматуры можно определить, используя формулы [10, 11]:

$$A'_s = \frac{M - \alpha_R R_b b h_0^2}{R_{sc}(h_0 - a')}; \quad (11)$$

$$A_s = \frac{\xi_R R_b b h_0}{R_s} + A'_s. \quad (12)$$

Анализ показывает, что формулы (11) и (12) не во всех случаях дают минимальное суммарное армирование в сечении  $(A_s + A'_s)_{\min}$ . Действительно, при  $\delta_s \neq \delta'_s$ ,  $\xi_{ef} \neq \xi = 0,5$ , так как, если  $\delta_s < \delta'_s$ , то  $\xi_{ef} > 0,5$ , а если  $\delta_s > \delta'_s$ ,  $\xi_{ef} < 0,5$ , что вызывает сомнение, особенно, если  $a_s = const$ , а  $A'_s \rightarrow 0$ .

Поскольку двойное армирование, как показано выше, эффективнее, если  $\xi = 0,5$ , то площади сечений растянутой  $A_s$  и сжатой  $A'_s$  арматуры, соответствующие минимуму их суммы, если по расчету требуется сжатая арматура, следует определять по формулам:

$$A'_s = \frac{M - 0,5R_b bh(0,75h - a_s)}{R_{sc}(h - a_s - a'_s)},$$

$$A_s = A'_s + 0,5 \frac{R_b}{R_s} bh.$$
(13)

Формулы (13) можно дополнить зависимостями:

- в абсолютных величинах

$$A_s = \frac{M + 0,5R_b bh(0,25h - a'_s)}{R_s(h - 2a_s)},$$

$$A'_s = A_s - 0,5 \frac{R_b}{R_{sc}} bh.$$
(14)

- в относительных величинах

$$A'_s = \frac{\alpha_m(3 - 4\delta)}{8(1 - \delta - \delta')} \cdot \frac{R_b}{R_{sc}} bh,$$

$$A_s = \frac{\alpha_m + 1 - 4\delta'}{8(1 - \delta - \delta')} \cdot \frac{R_b}{R_s} bh,$$
(15)

где  $\alpha_m = \frac{8M}{R_b bh^2}$ ,  $\delta = \frac{a_s}{h}$ ,  $\delta' = \frac{a'_s}{h}$ .

Формулы (14) и (15) относятся к полному железобетонному нормальному сечению и позволяют определить минимальное содержание арматуры в зависимости от величины внешнего воздействия и расположения арматуры по высоте сечения.

Полученные выше зависимости позволяют решать задачи прямого и обратного проектирования нормальных сечений изгибаемых железобетонных элементов с одиночным и двойным армированием, получая экономичные и наглядные решения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сапожников, Н.Я. Об оценке уровня надежности изгибаемых железобетонных конструкций по нормальным сечениям [Текст] / Н.Я. Сапожников // Бетон и железобетон. – 1986. – № 7. – С. 40-42.
2. Залесов, А.С. Расчет железобетонных конструкций по прочности, трещиностойкости и деформациям [Текст] / А.С. Залесов, Э.Н. Кодыш, Л.Л. Лемыш, И.К. Никитин. – М.: Стройиздат, 1988. – 320 с.
3. Болдышев, А.М. Прочность нормальных сечений железобетонных элементов [Текст] / А.М. Болдышев, В.С. Плевков. – Томск: Изд-во Том. ЦНТИ, 1989. – 236 с.
4. Алмазов, В.О. Проектирование железобетонных конструкций по Еврокодам [Текст] / В.О. Алмазов. – М.: Изд-во АСВ, 2011. – 216 с.
5. Биби, Э.В. Руководство для проектировщиков к Еврокоду 2: Проектирование железобетонных конструкций [Текст] / Э.В. Биби, Р.С. Нараян. – М.: МГСУ, 2012. – 292 с.
6. Плевков, В.С. Оценка прочности и трещиностойкости железобетонных конструкций по российским и зарубежным нормам [Текст] / В.С. Плевков, А.П. Малиновский, И.В. Балдин // Вестник ТГАСУ. – 2013. – № 4. – С. 144-153.
7. Колмогоров, А.Г. Расчет железобетонных конструкций по российским и зарубежным нормам [Текст] / А.Г. Колмогоров, В.С. Плевков. – М.: Изд-во АСВ, 2014. – 512 с.

8. Чистяков, Е.А. Деформации внецентренно сжатых элементов в стадии близкой к разрушению [Текст] / Е.А. Чистяков, С.С. Мамедов // Теория железобетона. – М.: Стройиздат, 1972. – С. 116–122.
9. Гуца, Ю.П. Статическая прочность железобетонных конструкций и их деформация в стадии, близкой к разрушению [Текст]: Автореферат дис. ... докт. техн. наук. – М., 1980. – 44 с.
10. Мурашев, В.И. Железобетонные конструкции. Общий курс [Текст] / В.И. Мурашев, Э.Е. Сигалов, В.Н. Байков / Под ред. П.Л. Пастернака. – М.: Стройиздат, 1962. – 659 с.
11. Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелого бетона без предварительного напряжения арматуры (к СП 52-101-2003). ЦНИИПромзданий, НИИЖБ. - М.: ОАО «ЦНИИ-Промзданий», 2005. – 214 с.

**Плевков Василий Сергеевич**

Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск  
Доктор технических наук, профессор  
E-mail: [pvs@tomsksep.ru](mailto:pvs@tomsksep.ru)

**Балдин Игорь Владимирович**

Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск  
Кандидат технических наук, доцент  
E-mail: [biwem@yandex.ru](mailto:biwem@yandex.ru)

**Плевков Роман Александрович**

Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск  
Соискатель  
E-mail: [pra0709@mail.ru](mailto:pra0709@mail.ru)

---

V. PLEVKOV, I. BALDIN, R. PLEVKOV

## FEATURES OF CALCULATION OF THE STRENGTH OF NORMAL SECTIONS OF REINFORCED CONCRETE BENT ELEMENTS WITH AREAS OF RELATIVE RESISTANCE

*Discusses the features of the solution of some problems of calculating the strength of normal section of bendable reinforced concrete elements of rectangular section with single and double non-stressed reinforcement using the relative areas of resistance. Shows the impact on the reinforcement elements of concrete strength and geometric dimensions of the cross section. The proposed relations for determination of the minimum concrete strength, minimum cross-section dimensions, the minimum single or double bending reinforcement concrete elements depending on the external influence and position of the reinforcement along the height of the section. We consider the calculation of reinforced concrete elements with mixed reinforcement of stretched zone reinforcement of different classes, which are often found in the strengthening of reinforced concrete structures. The obtained dependences allow to solve problems of direct and inverse design of the normal section of bendable reinforced concrete elements with single and double reinforcement, getting economical solutions.*

**Key words:** flexible reinforced concrete elements, the strength of the normal sections, the field of relative resistance

### BIBLIOGRAPHY

1. Sapozhnikov, N.YA. Ob otsenke urovnya nadezhnosti izgibayemykh zhelezobetonnykh konstruksiy po normal'nym secheniyam [Tekst] / N.YA. Sapozhnikov // Beton i zhelezobeton. – 1986. – № 7. – S. 40–42.
2. Zalesov, A.S. Raschet zhelezobetonnykh konstruksiy po prochnosti, treshchinostoykosti i deformatsiyam [Tekst] / A.S. Zalesov, E.N. Kodysh, L.L. Lemysh, I.K. Nikitin. – М.: Stroyizdat, 1988. – 320 s.
3. Boldyshev, A.M. Prochnost' normal'nykh secheniy zhelezobetonnykh elementov [Tekst] / A.M. Boldyshev, B.C. Plevkov. – Tomsk: Izd-vo Tom. TSNTI, 1989. – 236 s.
4. Almazov, V.O. Proyektirovaniye zhelezobetonnykh konstruksiy po Yevrokodam [Tekst] / V.O. Almazov. – М.: Izd-vo ASV, 2011. – 216 s.

5. Bibi, E.V. Rukovodstvo dlya proyektirovshchikov k Yevrokodu 2: Proyektirovaniye zhelezobetonnykh konstruksiy [Tekst] / E.V. Bibi, R.S. Narayan. – M.: MGSU, 2012. – 292 s.
6. Plevkov, V.S. Otsenka prochnosti i treshchinostoykosti zhelezobetonnykh konstruksiy po rossiyskim i zarubezhnym normam [Tekst] / V.S. Plevkov, A.P. Malinovskiy, I.V. Baldin // Vestnik TGASU. – 2013. – № 4. – S. 144-153.
7. Kolmogorov, A.G. Raschet zhelezobetonnykh konstruksiy po rossiyskim i zarubezhnym normam [Tekst] / A.G. Kolmogorov, V.S. Plevkov. – M.: Izd-vo ASV, 2014. – 512 s.
8. Chistyakov, Ye.A. Deformatsii vnetsentrenno szhatykh elementov v stadii blizkoy k razrusheniyu [Tekst] / Ye.A. Chistyakov, S.S. Mamedov // Teoriya zhelezobetona. – M.: Stroyizdat, 1972. – S. 116–122.
9. Gushcha, YU.P. Statischeeskaya prochnost' zhelezobetonnykh konstruksiy i ikh deformatsiya v stadii, blizkoy k razrusheniyu [Tekst]: Avtoreferat dis. ... dokt. tekhn. nauk. – M., 1980. – 44 s.
10. Murashev, V.I. Zhelezobetonnyye konstruksii. Obshchiy kurs [Tekst] / V.I. Murashev, E.Ye. Sigalov, V.N. Baykov / Pod red. P.L. Pasternaka. – M.: Stroyizdat, 1962. – 659 s.
11. Posobiye po proyektirovaniyu betonnykh i zhelezobetonnykh konstruksiy iz tyazhelogo betona bez predvaritel'nogo napryazheniya armatury (k SP 52-101-2003). TSNIIPromzdaniy, NIIZHB. - M.: OAO «TSNII-Promzdaniy», 2005. – 214 s.

**V. Plevkov**

Tomsk state university of architecture and civil engineering, Tomsk  
Doctor of tech. sciences, professor  
E-mail: [pvs@tomsksep.ru](mailto:pvs@tomsksep.ru)

**I. Baldin**

Tomsk state university of architecture and civil engineering, Tomsk  
Candidate of tech. sciences, docent  
E-mail: [biwem@yandex.ru](mailto:biwem@yandex.ru)

**R. Plevkov**

Tomsk state university of architecture and civil engineering, Tomsk  
Student  
E-mail: [pra0709@mail.ru](mailto:pra0709@mail.ru)

УДК 624.04:534.1

САВИН С.Ю., ИВЛЕВ И.А.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОРТОТРОПНОЙ ПАРАЛЛЕЛОГРАММНОЙ ПЛАСТИНЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОЭФФИЦИЕНТА ФОРМЫ

*В статье рассматривается задача о свободных колебаниях упругих ортотропных пластинах, срединная плоскость которых имеет форму параллелограмма, а условия закрепления на контуре представляют собой произвольную комбинацию шарнирного опирания и жесткого защемления вдоль сторон. Для решения указанной задачи используется приближенный аналитический метод интерполяции по коэффициенту формы, основанный на функциональной связи интегрального геометрического параметра формы срединной плоскости пластины (коэффициент формы) и её интегрального физико-механического параметра (основная частота собственных колебаний в ненагруженном состоянии). Форму срединной плоскости параллелограммной пластины предлагается получать путем аффинного геометрического преобразования из ромбической или прямоугольной пластин. Значения основных частот собственных колебаний этих пластин являются опорными решениями. Интерполяция осуществляется с использованием полиномиальной аппроксимирующей функции.*

*В статье впервые получены выражения для поверхностей значений основных частот собственных колебаний ортотропных ромбических пластин (одна из осей ортотропии направлена вдоль стороны пластины), аргументами в которых являются коэффициент формы и отношения цилиндрических изгибных жесткостей.*

*Полученные результаты сопоставлены с решениями по МКЭ в программах SCAD и ЛИРА-САПР.*

**Ключевые слова:** ортотропная пластина, свободные колебания, основная частота собственных колебаний, комбинированные граничные условия, метод интерполяции по коэффициенту формы

### Введение

Среди используемых в последнее время в научной литературе подходов к решению задачи о свободных колебаниях ортотропных пластин, можно выделить следующие: дискретный, дискретно-континуальный и аналитический.

К дискретным относятся метод конечных элементов, вариационно-разностный метод и др. В статье Габбасова Р.Ф., Уваровой Н.Б., Александровского М.В. [1] для определения частоты основного тона и формы колебаний ортотропной прямоугольной пластины, произвольным образом опертой по контуру, применяется численный метод последовательных аппроксимаций, в основе которого лежат идеи метода конечных разностей. Авторы также указывают на возможность применения данного подхода к определению второй и последующей частот и форм колебаний пластины путем последовательного итерационного расчета с учетом полученных на предыдущих этапах значений. Ступишиным Л.Ю. и Никитиным К.Е. предлагается новый тип смешанного оболочечного конечного элемента для решения задачи о свободных колебаниях ортотропных круглых пластин и оболочек вращения с учетом их геометрической нелинейности [2]. В работе [3] метод конечных элементов используется для вычисления частот собственных колебаний панели с сотовым наполнителем, для которой принята модель ортотропной пластины. Упругие характеристики условной ортотропной пластины устанавливались по результатам численного исследования трехмерных моделей в программном комплексе ANSYS, реализующем МКЭ. В работе [4] для вычисления частот колебаний ортотропной пластины, лежащей на упругом винклеровом основании, авторы применяют нелокальную теорию упругости Эренгена и метод коллокаций.

Появление дискретно-континуальных методов (иногда их называют полуаналитическими методами) является попыткой преодоления недостатков выше перечисленных дис-

кретных методов. Дискретно-континуальные методы в большинстве случаев позволяют получать решения задач частично в аналитическом виде (вдоль одного из направлений). Такой подход позволяет с одной стороны снизить размерность задачи, с другой – повышает точность для областей с краевыми эффектами, где наблюдается быстрое изменение искомой величины. Данные эффекты не всегда с достаточной точностью могут быть учтены дискретными методами в их классической постановке. Рыбаков Л.С. и Сильченко Л.Г. [5] разделяют конструктивно ортотропную цилиндрическую панель на отдельные элементы и сводят решение задачи о собственных колебаниях к решению дифференциально-разностной задачи. Акимовым П.А. и Мозгалёвой М.Л. предлагается использовать аппарат теории вейвлетов в рамках дискретно-континуального подхода (физико-геометрические параметры считаются постоянными либо кусочно-постоянными вдоль одного из направлений конструкции) к решению двумерных задач теории упругости [6].

Паймушин В.Н. и Полякова Т.В. [7, 8], задавая перемещения в виде тригонометрических функций, получили точные аналитические решения для двумерной задачи о свободных колебаниях упругой ортотропной прямоугольной пластины со свободными краями и трехмерной задачи для прямоугольного упругого ортотропного параллелепипеда (балка, пластина) со свободными гранями. Для некоторых частных случаев полученные в работах результаты могут быть сведены к точным решениям задачи в рамках классической теории пластин Кирхгофа-Лява. Егорычевым О.А. и Брендэ В.В. [9] получено частотное уравнение для бесконечно вытянутой ортотропной предварительно напряженной пластины из вязкого материала, упруго закрепленной с двух сторон. Применительно к круглым ортотропным пластинам Кореновой Е.Б. и Гросманом В.Р. [10, 11] использовано уравнение Нильсена, позволившее получить аналитическое решение задачи об осесимметричных колебаниях ортотропных круглых пластин в функциях Бесселя. В работе [12] представлено решение задачи о колебаниях круглых, кольцевых и секториальных ортотропных пластин с помощью модифицированного метода Ритца. При этом авторы задавали функцию перемещений в виде рядов Фурье.

Точные и приближенные аналитические методы, основанные на полном или частичном удовлетворении функциональных зависимостей граничным условиям задачи, находят в расчетной практике все меньшее применение. Во многом это связано с ограниченностью перечня задач, которые удается решить с их применением. Однако, на наш взгляд, в тех случаях, когда необходимо определить интегральные параметры пластины, например при вычислении основной частоты собственных колебаний, использование приближенного аналитического метода может оказаться эффективным.

Для решения подобных задач мы предлагаем использовать метод интерполяции по коэффициенту формы [13 ... 19]. Достаточно подробный обзор работ по данному методу представлен в статье [20]. В основе его лежит функциональная связь между интегральной характеристикой формы срединной плоскости пластины и интегральными физико-механическими характеристиками (максимальный прогиб, частота собственных колебаний, критическая сила при потере устойчивости). На данный момент применение метода интерполяции по коэффициенту формы к решению задач о свободных колебаниях пластин ряда форм (например, параллелограммные) ограничивается отсутствием одной из граничных поверхностей – для пластин в виде ромбов.

Настоящая статья посвящена построению граничных поверхностей основных частот собственных колебаний упругих ортотропных ромбических пластин, а также развитию метода интерполяции по коэффициенту формы к решению задач о свободных колебаниях ортотропных параллелограммных пластин с комбинированными граничными условиями (рисунок 1).

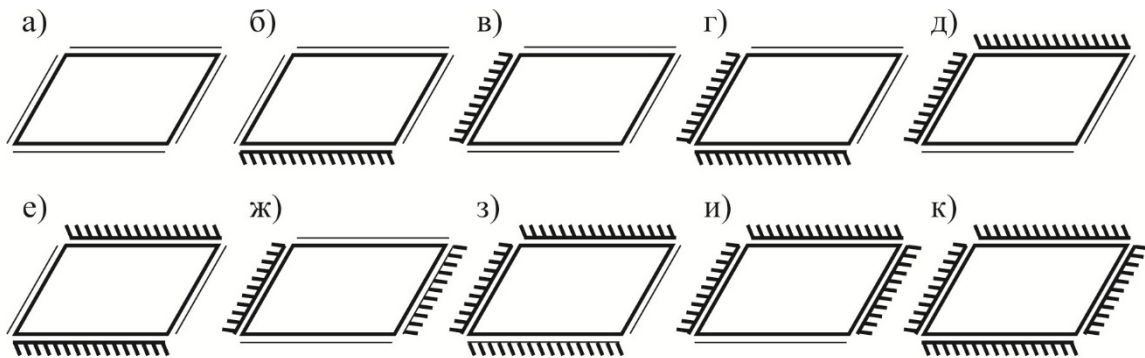


Рисунок 1 – Варианты граничных условий для ортотропной параллелограммной пластины

**Получение опорных поверхностей собственных частот колебаний для ромбических пластин**

В данной работе ограничимся рассмотрением пластин, у которых одна из главных осей ортотропии направлена вдоль стороны пластины. Случай, когда оси ортотропии совпадают с диагоналями ромба, был рассмотрен ранее в работе [21].

Для свободных колебаний ортотропной пластины из теории упругости известно следующее дифференциальное уравнение:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - m\omega^2 w = 0, \tag{1}$$

где  $H = D_1 + 2D_{xy}$ ,  $D_1 = D_x \nu_y = D_y \nu_x$ .

В этих выражениях  $D_x, D_y, D_{xy}$  – цилиндрические жесткости пластинки,  $\nu_x, \nu_y$  – коэффициенты Пуассона по соответствующим направлениям,  $m$  – масса пластинки, приходящаяся на единицу её площади. Разделим правую и левую части уравнения (1) на  $H$ :

$$\frac{D_x}{H} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D_y}{H} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \beta^4 w = 0, \tag{2}$$

где  $\beta^4 = \frac{m\omega^2}{H}$  – собственное значение дифференциального уравнения.

С учетом (2) основную частоту собственных колебаний ортотропной пластины будем искать в виде:

$$\omega = K_\omega(K_f; D_x/H; D_y/H) \cdot \left(\frac{H}{A^2 m}\right)^{1/2}, \tag{3}$$

где  $K_\omega$  – безразмерная функция, зависящая от формы пластины, соотношений изгибных цилиндрических жесткостей и граничных условий;

$$K_f = \oint_L \frac{ds}{h} - \text{коэффициент формы [17].}$$

Неизвестную функцию  $K_\omega$  из выражения (3) будем искать следующим образом. По значениям частот собственных колебаний, полученных численным путем в ПК SCAD для пластин фиксированной формы (фиксируется угол  $\alpha = 10, 15, \dots, 90$ ) при переменных отношениях цилиндрических жесткостей  $D_x/H \in [0,2; 5]$  и  $D_y/H \in [0,2; 5]$ , используя программный комплекс *Table Curve 3D*, получим функции вида:

$$K_{\omega, \alpha} = a_1 + a_2 \frac{D_x}{H} + a_3 \frac{D_y}{H} + a_4 \frac{D_x^2}{H^2} + a_5 \frac{D_y^2}{H^2} + a_6 \frac{D_x D_y}{H^2} + a_7 \frac{D_x^3}{H^3} + a_8 \frac{D_y^3}{H^3} + a_9 \frac{D_x D_y^2}{H^3} + a_{10} \frac{D_x^2 D_y}{H^3}. \tag{4}$$

Таблица 1 – Коэффициенты  $A, \dots, I$  из выражения (5)

Шарнирное опирание (рисунок 1, а)										
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$
A	0,0399	5,232	14,20	7,854	4,498	-14,89	0,0415	-0,0104	0,0250	0,9185
B	1,690	0,6296	-0,4900	-8,051	0,4286	6,727	-0,2885	0,0626	-0,2734	-0,3977
C	0,9421	-1,610	-1,951	11,49	0,1299	1,810	-0,1316	-0,0413	-0,0649	-0,2346
D	-0,6375	-0,4006	0,0519	1,497	-0,0706	-1,639	-0,1348	-0,0234	0,0627	0,0636
E	0,0587	-0,9579	-0,2307	-1,920	-0,1698	-0,3958	0,0111	0,0092	0,0166	0,0222
F	0,0537	0,0524	-0,0016	-0,0191	0,0054	0,1130	0,0281	0,0019	-0,0090	-0,0022
G	-0,2966	0,1715	0,0404	0,0483	0,0195	0,0618	-0,0001	-0,0008	-0,0014	-0,0009
H	0,0002	-0,0005	-2,0·10 <sup>-6</sup>	0,0005	0,0001	0,0008	-3,4·10 <sup>-5</sup>	3,6·10 <sup>-5</sup>	0,0006	0,0001
I	0,0409	0,0002	-0,0014	-0,0016	-0,0010	-0,0039	0,0001	3,7·10 <sup>-5</sup>	3,9·10 <sup>-5</sup>	1,6·10 <sup>-5</sup>
Комбинированное опирание (рисунок 1, б)										
A	0,0286	3,860	21,13	-0,4932	3,912	-11,40	0,0023	-0,2897	0,0236	1,092
B	0,5687	0,9949	1199	-0,4344	-0,0927	1,7734	-0,2984	-0,0924	-0,3016	-0,6227
C	2,4790	-3,8849	-23,65	0,3262	-0,8885	1,9784	-0,0016	0,0693	-0,0061	-0,2661
D	-0,2671	-0,7142	-318,2	0,0523	0,0055	-0,4490	0,0240	0,0016	0,0346	0,1052
E	0,1611	-1,516	452,9	-0,0373	0,0713	-0,1930	-0,0006	-0,0057	0,0006	0,0236
F	0,0274	0,0980	32,17	-0,0011	0,0002	0,0345	0,0000	0,0002	-0,0017	-0,0018
G	-0,1957	0,3077	-281,6	0,0003	-0,0030	0,0138	0,0001	0,0002	-3,0·10 <sup>-5</sup>	-0,0007
H	0,0001	-0,0010	0,1560	7,2·10 <sup>-6</sup>	0	-8,3·10 <sup>-6</sup>	-6,1·10 <sup>-6</sup>	0	3,3·10 <sup>-5</sup>	4,4·10 <sup>-5</sup>
I	0,0281	0,0003	38,01	-4,9·10 <sup>-7</sup>	0	-0,0008	-1,6·10 <sup>-6</sup>	0	5,7·10 <sup>-7</sup>	1,5·10 <sup>-5</sup>
Комбинированное опирание (рисунок 1, в)										
A	13,76	11,16	0,1440	-0,5035	5,699	5,547	-0,3593	-0,2533	0,0051	17,92
B	0,0584	0,1430	2,402	-3,855	1,120	10,83	-0,5007	-0,2145	-0,3227	3,1952
C	-0,1797	-1,618	7,298	5,480	0,8431	3,299	-0,4162	0,0873	-0,0024	-3,3649
D	-0,0241	-0,0909	-0,9655	0,7955	-0,2184	-3,436	-0,9172	0,0097	0,0373	-0,7979
E	0,0461	-0,1228	2,7328	-0,9071	-0,6140	-1,233	-0,0307	-0,0107	0,0004	0,2072
F	0,0033	0,0097	0,1097	-0,0198	0,0087	0,2852	0,2067	0,0002	-0,0018	0,1503
G	-0,0050	0,0306	-1,500	0,0209	0,0766	0,1279	0,0107	0,0006	0,0000	-0,0020
H	1,4·10 <sup>-5</sup>	-0,0001	0,0007	0,0002	0,0002	0,0009	-0,0020	-1,4·10 <sup>-5</sup>	3,0·10 <sup>-5</sup>	-0,0007
I	0,0032	-0,0001	0,1420	-0,0002	-0,0030	-0,0087	0,0001	-1,1·10 <sup>-5</sup>	4,0·10 <sup>-7</sup>	0,0003
Комбинированное опирание (рисунок 1, г)										
A	6,269	6,305	-0,063	-0,7879	8,365	30,14	-0,3205	-0,4537	-0,1895	-0,0720
B	-0,3302	0,0109	10,38	-0,4235	0,7092	72,17	-0,2483	-0,1479	-0,1616	-0,2463
C	-1,171	-1,254	12,97	0,4096	-0,4244	54,01	0,0661	0,1531	-0,0292	0,0600
D	0,0333	-0,0732	-2,466	0,0522	-0,0855	-21,61	0,0159	-0,0055	0,1933	0,0028
E	-0,1192	-0,1026	-0,7517	-0,0472	-0,2641	-32,06	-0,0064	-0,0176	0,0175	-0,0099
F	-0,0011	0,0096	0,2840	-0,0011	0,0020	2,473	0,0025	0,0008	-0,0323	0,0037
G	0,0288	0,0309	-1,834	0,0007	0,0320	2,785	0,0005	0,0008	-0,0011	0,0006
H	-7,3·10 <sup>-6</sup>	-0,0001	0,0014	7,2·10 <sup>-6</sup>	0,0001	0,0202	-4,5·10 <sup>-5</sup>	-2,5·10 <sup>-5</sup>	0,0023	-4,4·10 <sup>-5</sup>
I	-0,0014	1,5·10 <sup>-5</sup>	0,3228	-3,7·10 <sup>-6</sup>	-0,0012	-0,1177	-5,4·10 <sup>-6</sup>	-1,5·10 <sup>-5</sup>	2,3·10 <sup>-5</sup>	-3,3·10 <sup>-6</sup>
Комбинированное опирание (рисунок 1, д)										
A	23,26	8,425	0,2954	-0,9330	3,8628	-5,118	-0,0318	-0,0457	0,0283	0,6829
B	3,317	-0,0911	5,883	-0,3612	0,3790	-0,1833	-0,4786	0,0367	-0,2457	-0,0934
C	-0,1914	-1,286	8,513	0,4863	-0,0825	0,5199	-0,0409	-0,0202	-0,0765	-0,1596
D	-1,277	-0,0052	-1,970	-0,0196	-0,0731	0,0515	-0,5394	-0,0261	0,0154	-0,0145
E	1,409	0,0531	7,029	0,0201	-0,1736	-0,0297	-0,0499	0,0082	0,0185	0,0139
F	0,2224	0,0005	0,2098	0,0118	0,0043	-0,0002	0,1116	0,0020	-0,0012	0,0038
G	-0,0321	-0,0012	-3,148	-0,0085	0,0244	-0,0008	0,0054	-0,0010	-0,0014	-0,0005
H	0,0005	-1,5·10 <sup>-6</sup>	0,0004	-0,0001	3,3·10 <sup>-5</sup>	0	-0,0006	2,7·10 <sup>-5</sup>	0,0004	1,6·10 <sup>-5</sup>
I	0,2284	0,0001	0,3103	-0,0002	-0,0012	0	0,0002	4,9·10 <sup>-5</sup>	4,6·10 <sup>-5</sup>	2,1·10 <sup>-5</sup>

Комбинированное опирание (рисунок 1, е)										
	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	a <sub>6</sub>	a <sub>7</sub>	a <sub>8</sub>	a <sub>9</sub>	a <sub>10</sub>
A	-7,899	3,424	-68,65	-0,2540	20,99	-8,746	0,0199	-0,6659	0,1002	0,1064
B	-6,824	-0,2400	0,4186	-0,3772	0,4544	0,6364	-0,2875	0,0747	-0,2386	-0,3081
C	2,313	-1,337	14,71	0,1520	-3,269	1,074	-0,0035	0,0761	-0,0257	-0,0232
D	1,353	-0,0131	-0,0134	0,0415	0,0066	-0,1525	0,0245	0,0151	0,0243	0,0308
E	-3,975	0,0413	-0,1585	-0,0126	0,0187	-0,0469	-0,0004	0,0036	0,0026	0,0015
F	-0,0167	0,0049	0,0001	-0,0009	-0,0006	0,0147	-0,0004	-0,0008	-0,0013	-0,0005
G	1,385	0,0114	0	-0,0006	0,0004	0,0010	0,0001	-0,0002	-0,0001	6,3·10 <sup>-6</sup>
H	0,0001	-4,6·10 <sup>-5</sup>	0	4,4·10 <sup>-6</sup>	1,4·10 <sup>-5</sup>	-0,0001	4,8·10 <sup>-7</sup>	1,5·10 <sup>-5</sup>	2,9·10 <sup>-5</sup>	2,2·10 <sup>-6</sup>
I	-0,0128	0,0002	0	1,4·10 <sup>-5</sup>	-0,0001	-0,0002	-1,5·10 <sup>-6</sup>	5,8·10 <sup>-6</sup>	2,3·10 <sup>-6</sup>	-2,0·10 <sup>-7</sup>
Комбинированное опирание (рисунок 1, ж)										
A	61,65	-6,072	1,334	-0,7239	6,557	13,41	0,0677	0,3582	-301,7	-0,3105
B	27,99	0,1452	7,495	-0,2840	4,162	-1,225	-0,2469	-0,9213	73,50	-0,3167
C	-14,57	2,190	16,94	-0,0660	-6,909	-1,917	-0,0133	0,6674	-226,3	0,0712
D	-9,411	-0,2496	-2,328	-0,0636	-3,735	0,2060	0,0088	-1,3799	361,0	-0,0532
E	-51,42	0,2377	18,90	0,1003	-13,03	-0,0546	0,0001	0,7425	66,16	-0,0095
F	1,2147	0,0494	0,3251	0,0140	0,6348	0,0019	0,0012	0,3694	-44,76	0,0103
G	4,757	0,1331	-6,928	-0,0116	3,563	0,0034	0,0001	-0,2053	-5,076	0,0005
H	0,0022	-0,0005	0,0014	-0,0002	0,0089	0,0001	-1,3·10 <sup>-5</sup>	0,0089	2,309	-6,4·10 <sup>-6</sup>
I	1,303	0,0011	0,5855	-0,0001	-0,2237	-0,0005	1,6·10 <sup>-6</sup>	0,0121	0,1478	3,5·10 <sup>-5</sup>
Комбинированное опирание (рисунок 1, з)										
A	0,3358	5,888	-1,058	-2,290	3,984	-10,52	-0,8343	0,7969	-0,2816	0,5546
B	-1,904	-0,0806	8,043	-1,587	-0,0436	-0,0255	-0,4633	1,8528	0,2639	-0,0368
C	0,2906	-1,1247	14,37	0,6798	-0,8614	0,5541	0,2014	-0,8605	0,0960	-0,1227
D	0,2006	-0,0407	-2,052	-1,017	0,0029	0,0934	0,0400	-0,1543	-0,0906	-0,1823
E	0,7161	-0,0518	-13,70	1,605	0,0539	-0,0274	-0,0252	0,1726	-0,0085	0,0132
F	0,0979	0,0057	0,4574	0,2293	0,0001	-0,0004	0,0076	0,0049	0,0092	0,0338
G	0,6435	0,0160	-1,0002	-0,2161	-0,0021	-0,0017	0,0019	-0,0128	0,0004	-0,0007
H	0,0003	-4,7·10 <sup>-5</sup>	0,0015	-0,0020	0	0	-0,0001	0,0003	0	-0,0001
I	0,1287	0,0003	0,7361	-0,0029	0	0	-1,6·10 <sup>-5</sup>	0,0004	0	0,0001
Комбинированное опирание (рисунок 1, и)										
A	54,28	-3,114	3,931	-0,7575	6,808	3,775	0,1523	-1,196	-0,1894	0,1249
B	15,00	-0,06671	19,02	-0,2052	1,336	0,0186	-0,4024	-4,359	-0,1180	-0,1657
C	-4,289	-0,4317	24,04	0,1248	-2,177	-0,4466	-0,0403	2,076	0,0501	-0,0188
D	-4,926	-0,09438	-5,171	0,0728	-1,239	-0,0548	0,0408	0,7071	0,0171	0,0121
E	-18,41	-0,0825	37,86	-0,0188	-3,695	-0,1070	0,0024	-0,4592	-0,0035	0,0010
F	0,6166	0,0142	0,6253	-0,0004	0,1747	0,0135	-0,0004	0,0195	-0,0003	-0,0001
G	0,9605	0,0413	-13,17	-0,0043	1,028	0,0055	4,5·10 <sup>-5</sup>	0,0268	0,0001	3·10 <sup>-6</sup>
H	0,0014	-0,0001	0,0033	-1,7·10 <sup>-5</sup>	0,0028	2,7·10 <sup>-5</sup>	0	0	6,4·10 <sup>-6</sup>	0
I	0,7420	0,0006	1,197	8,0·10 <sup>-5</sup>	-0,0680	-0,0005	0	0	-9,5·10 <sup>-7</sup>	0
Заделка по контуру (рисунок 1, к)										
A	16,79	-2,982	-0,1007	-1,044	4,086	-1,547	-0,1049	-0,3656	0,0960	-0,0232
B	7,437	-0,4066	3,488	6,619	-0,2817	1,921	-0,1217	-0,2848	-0,2551	-0,2978
C	-2,837	-0,3392	8,004	-8,034	-1,541	0,5767	-0,0178	0,1341	-0,0362	0,7825
D	-2,669	0,0422	-0,1410	-2,210	0,0196	-0,4536	0,0667	0,0200	0,0286	0,6675
E	-7,983	0,0546	-1,883	2,144	0,2067	-0,5616	0,0054	-0,0176	0,0056	-0,0805
F	0,3521	-0,0015	0,0744	0,2186	-0,0007	0,0564	-0,0017	-0,0005	-0,0011	0,0227
G	0,0979	0,0002	0,0105	-0,1209	-0,0122	0,0347	4,0·10 <sup>-5</sup>	0,0010	-0,0003	0,0095
H	0,0003	8,3·10 <sup>-6</sup>	0,0001	-0,0015	-7,7·10 <sup>-6</sup>	0,0001	1,1·10 <sup>-5</sup>	-9,7·10 <sup>-6</sup>	0,0001	-0,0005
I	0,4609	-0,0001	0,1404	-0,0057	0,0004	-0,0026	-2,0·10 <sup>-6</sup>	-2,6·10 <sup>-5</sup>	8,8·10 <sup>-6</sup>	-0,0001

При этом коэффициенты  $a_i$  зависят от угла  $\alpha$  ромба и, следовательно, в свою очередь могут быть представлены в виде функций от коэффициента формы, постоянных при заданных граничных условиях:

$$a_{i,l}(K_f) = \frac{(A + C \cdot K_f + E \cdot K_f^2 + G \cdot K_f^3 + I \cdot K_f^4)}{(1 + B \cdot K_f + D \cdot K_f^2 + F \cdot K_f^3 + H \cdot K_f^4)}. \quad (5)$$

Значения коэффициентов  $A, \dots, I$  получены с использованием программы *Table Curve 2D* и приведены в таблице 1.

Сопоставление значений  $\omega$ , полученных по функции (3) с учетом (4) и (5), с результатами численного расчета в программе *SCAD* по методу конечных элементов при густоте разбиения не менее 1036 четырехугольных элементов на пластину показывает, что разница между решениями по предложенным функциям и МКЭ не превышает 1,33 %.

### Решение задачи о собственных колебаниях ортотропной параллелограммной пластины

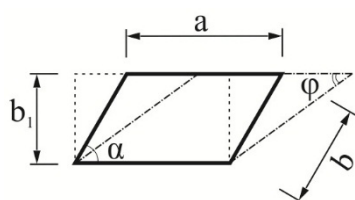


Рисунок 2 – Геометрическое моделирование формы области в виде параллелограмма

Рассмотрим решение задачи о свободных колебаниях параллелограммной пластины. Методика решения задачи аналогична описанной в работах [14, 15]. При этом выбор типа геометрического преобразования должен осуществляться таким образом, чтобы интегральная геометрическая характеристика формы области заданной пластинки занимала промежуточное положение между характеристиками опорных пластинок, то есть выполнялось условие:

$$K_{fo01} < K_f < K_{fo02},$$

где  $K_f$  – коэффициент формы заданной пластинки;  $K_{fon1}$ ,

$K_{fon2}$  – коэффициенты формы порных пластинок.

Форма области в виде параллелограмма может быть получена путем геометрического преобразования прямоугольника или ромба в заданный параллелограмм, как это показано на рисунке 2.

Значение частоты собственных колебаний для пластины в виде параллелограмма найдем, пользуясь полиномиальной аппроксимирующей функцией:

$$\omega = C_1 \cdot K_f^2 + C_2, \quad (6)$$

где  $C_1 = (\omega_2 - \omega_1) / (K_{f2}^2 - K_{f1}^2)$ ,  $C_2 = \omega_1 - C_1 \cdot K_{f1}^2$ .

Коэффициент формы параллелограмма:

$$K_f = \frac{4(a/b + b/a)}{\sin \alpha};$$

коэффициент формы прямоугольника

$$K_{f1} = 4(a/b_1 + b_1/a);$$

коэффициент формы ромба  $K_{f2} = 8/\sin \phi$ . При данном геометрическом преобразовании площадь пластин остается постоянной. Значения  $\omega_1$  находим согласно [17],  $\omega_2$  – по функции (3) с учетом (4) и (5).

Для параллелограммной пластины из семислойной фанеры ФСФ по ГОСТ 3916.2-96 (в первом приближении принята как ортотропный материал) при  $\alpha = 45^\circ$ ,  $a = 1,5$  м,  $b = 1$  м,  $h = 0,01$  м,  $D_x/H = 3,537$ ,  $D_y/H = 2,779$ ,  $H = 165,5$  Н·м/м,  $m = 7$  кг/м<sup>2</sup> и условиях закрепления на контуре, соответствующих смехе «ж» на рисунке 1 по формуле (6) получим следующее численное значение  $\omega = 232,2$  с<sup>-1</sup>. Та же задача была решена в программных комплексах *SCAD* и *ЛИРА-САПР*, при этом были получены следующие результаты:  $\omega = 223,6$  с<sup>-1</sup> (*SCAD*),  $\omega = 223,5$  с<sup>-1</sup> (*ЛИРА-САПР*).

## Выводы

В статье получены граничные поверхности значений основных частот собственных колебаний упругих ортотропных ромбических пластин с комбинированными условиями закрепления на контуре. Для каждой комбинации условий закрепления эти поверхности образуют одну из границ всего множества значений основных частот собственных колебаний упругих ортотропных пластин с выпуклым контуром, поэтому они могут быть использованы в качестве опорных решений по методу интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ). С использованием МИКФ в общем виде получено решение задачи о свободных колебаниях ортотропных параллелограммных пластин с комбинированными условиями опирания. Рассмотрен численный пример, демонстрирующий хорошую точность метода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габбасов, Р.Ф. Численное решение задачи о собственных колебаниях изгибаемых ортотропных пластин / Р.Ф. Габбасов, Н.Б. Уварова, М.В. Александровский // ПГС. – 2015. – №11. – С. 37-39.
2. Ступишин, Л.Ю. Определение частот собственных колебаний ортотропных геометрически нелинейных пологих оболочек вращения и круглых пластин с использованием смешанного конечного элемента // С.Ю. Ступишин, К.Е. Никитин // ПГС. – 2009. – №1. – С. 28-30.
3. Осадчий, Н.В. Оценка свойств сотового заполнителя с использованием метода конечных элементов / Н.В. Осадчий, Шепель В.Т. // Вестник Рыбинской государственной авиационной технологической академии им. П.А. Соловьева. – 2015. – №1 (32). – С.129-135.
4. Maen S. Sari. Vibration analysis of non-uniform orthotropic Kirchhoff plates resting on elastic foundation based on nonlocal elasticity theory / Maen S. Sari, Wael G. Al-Kouz // International Journal of Mechanical Sciences. – 2016. – Vol.114. – pp. 1-11.
5. Рыбаков, Л.С. Собственные колебания дискретно подкрепленных цилиндрических панелей / Л.С. Рыбаков, Л.Г. Сильченко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1998. – Т. 4. – № 1. – С. 73-86.
6. Акимов, П.А. О корректной многоуровневой вейвлет-реализации дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций часть 1: двумерная задача теории упругости / П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2013. – Т.9. – №1. – С.18-25.
7. Паймушин, В.Н. Точные аналитические решения трехмерной задачи о свободных колебаниях ортотропного прямоугольного параллелепипеда со свободными гранями / В.Н. Паймушин, Т.В. Поляков // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2006. – Т.12. – №3. – С.317-336.
8. Паймушин, В.Н. Точные аналитические решения задачи о плоских формах свободных колебаний прямоугольной пластины со свободными краями // Изв. вузов. Матем. – 2006. – №8. – С.54-62.
9. Егорычев, О.А. Постановка задачи о колебании ортотропной пластины / О.А. Егорычев, В.В. Брендэ // Вестник МГСУ. – 2011. – №4. – С.50.
10. Гросман, В.Р. Некоторые вопросы статики круглых ортотропных и изотропных пластин // Вестник МГСУ. – 2012. – №7. – С. 65-68.
11. Гросман, В.Р. Задача о свободных колебаниях с одним узловым диаметром круглых ортотропных и изотропных пластин // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2013. – Т. 9. – №1. – С.48-52.
12. Qingshan Wang. A unified solution for free in-plane vibration of orthotropic circular, annular and sector plates with general boundary conditions // Qingshan Wang, Dongyan Shi, Qian Liang, Fazl e Ahad // Applied Mathematical Modelling. – 2016. – Vol. 40. – Iss. 21-22. – pp.9228-9253.
13. Савин, С.Ю. Совершенствование МИКФ для расчета упругих ортотропных пластинок в виде параллелограммов / С.Ю. Савин, М.А. Скотникова // Строительство и реконструкция. – 2015. – № 1 (57). – С.48-56.
14. Савин, С.Ю. Решение задачи о свободных колебаниях упругой ортотропной пластинки методом интерполяции по коэффициенту формы // ПГС. – 2014. – №2. – С.19-22.
15. Савин, С.Ю. Развитие МИКФ к деформационному расчету упругих ортотропных пластинок в задачах поперечного изгиба // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2014. – Т.10. – №1. – С.121-131.
16. Коробко, В.И. Свободные колебания треугольных ортотропных пластинок с однородными и комбинированными граничными условиями / В.И. Коробко, С.Ю. Савин // Строительство и реконструкция. – 2013. – №2 (46). – С.33-40.
17. Коробко, В.И. Свободные колебания прямоугольных ортотропных пластинок с однородными и комбинированными граничными условиями / В.И. Коробко, С.Ю. Савин // Строительство и реконструкция. – 2013. – №1 (45). – С.13-18.

18. Черняев, А.А. Динамический расчет правильных  $n$ -угольных, треугольных и ромбических шарнирно опертых пластинок с использованием отношения конформных радиусов в качестве геометрического аргумента // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2012. – №2. – С. 63-71.

19. Korobko, V.I. Solving the transverse bending problem of thin elastic orthotropic plates with form factor interpolation method / V.I. Korobko, A.V. Korobko, S.Y. Savin, A.A. Chernyaev // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. – 2016. – Vol. 10. – No 2. – pp. 9-17.

20. Коробко, В.И. Основные этапы развития геометрических методов решения двумерных задач теории упругости и строительной механики пластинок / В.И. Коробко, А.В. Коробко, С.Ю. Савин, А.А. Черняев // Научное обозрение. Технические науки. – 2016. – № 3. – С. 54-69.

21. Савин, С.Ю. Свободные колебания ортотропных пластинок в виде ромбов с однородными и комбинированными граничными условиями / С.Ю. Савин, М.А. Скотникова // Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения. Материалы Международных академических чтений (г. Курск, 20-21 ноября 2014 г.) – Курск: КГУ, 2014. – С. 114-120.

**Савин Сергей Юрьевич**

ФГБОУ ВО «ЮЗГУ», г. Курск

К.т.н., доцент кафедры уникальных зданий и сооружений

E-mail: [suwin@yandex.ru](mailto:suwin@yandex.ru)

**Ивлев Иван Андреевич**

ФГБОУ ВО «ОГУ имени И.С. Тургенева», г. Орел

Аспирант кафедры строительных конструкций и материалов

E-mail: [ivan542009@rambler.ru](mailto:ivan542009@rambler.ru)

S. SAVIN, I. IVLEV

**SOLUTION TO THE FREE VIBRATION PROBLEM FOR ORTHOTROPIC PARALLELOGRAM PLATE, USING FORM FACTOR**

*The article deals with the free vibration problem of elastic orthotropic parallelogram plates, boundary conditions of which are simple supporting or clamping along the sides. It is used approximate analytical technique – form factor interpolation method. This method based on the relation between integral geometrical parametr, which is known as form factor of midplane, and mechanical parameters (for example, frequency of free vibrations). Rectangular plate's shape can be obtained from rhombic or rectangular plates, using affine geometrical transformation of its midplane. Rhombic and rectangular plate's frequency values are the referense solutions to the all plates with convex contour. Polynomial function is used as interpolation function.*

*In the article we obtained functions for values of free vibration frequencies for orthotropic rhombic plates, when one of the orthotropy axes is directed along the side of a plate. Form factor and flexural rigidity ratios are parameters of these functions.*

*The results of this investigation are compared with the FEM (SCAD and LIRA-SAPR programs).*

**Keywords:** *orthotropic plate, free vibration, natural frequency, combined boundary conditions, form factor interpolation method*

**BIBLIOGRAPHY**

1. Gabbasov, R.F. Chislennoye resheniye zadachi o sobstvennykh kolebaniyakh izgbayemykh ortotropnykh plastin / R.F. Gabbasov, N.B. Uvarova, M.V. Aleksandrovskiy // PGS. – 2015. – №11. – S. 37-39.

2. Stupishin, L.YU. Opredeleniye chastot sobstvennykh kolebaniy ortotropnykh geometricheski nelineynykh pologikh obolochek vrashcheniya i kruglykh plastin s ispol'zovaniyem smeshannogo konechnogo elementa // S.YU. Stupishin, K.Ye. Nikitin // PGS. – 2009. – №1. –S. 28-30.

3. Osadchiy, N.V. Otsenka svoystv sotovogo zapolnitelya s ispol'zovaniyem metoda konechnykh elementov / N.V. Osadchiy, Shepel' V.T. // Vestnik Rybinskoy gosudarstvennoy aviatsionnoy tekhnologicheskoy akademii im. P.A. Solov'yeva. – 2015. – №1 (32). – S.129-135.

4. Maen S. Sari. Vibration analysis of non-uniform orthotropic Kirchhoff plates resting on elastic foundation based on nonlocal elasticity theory / Maen S. Sari, Wael G. Al-Kouz // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2016. – Vol.114. – pp. 1-11.
5. Rybakov, L.S. Sobstvennyye kolebaniya diskretno podkreplennykh tsilindricheskikh paneley / L.S. Rybakov, L.G. Sil'chenko // *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*. – 1998. – T. 4. – № 1. – S. 73-86.
6. Akimov, P.A. O korrektnoy mnogourovnevoy veyvlet-realizatsii diskretno-kontinual'nykh metodov lokal'nogo rascheta stroitel'nykh konstruksiy chast' 1: dvumernaya zadacha teorii uprugosti / P.A. Akimov, M.L. Mozgaleva // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. – 2013. – T.9. – №1. – S.18-25.
7. Paymushin, V.N. Tochnyye analiticheskiye resheniya trekhmernoy zadachi o svobodnykh kolebaniyakh ortotropnogo pryamougol'nogo parallelepipeda so svobodnymi graniyami / V.N. Paymushin, T.V. Polyakov // *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*. – 2006. – T.12. – №3. – 317-336.
8. Paymushin, V.N. Tochnyye analiticheskiye resheniya zadachi o ploskikh formakh svobodnykh kolebaniy pryamougol'noy plastiny so svobodnymi rkayami // *Izv. vuzov. Matem.* – 2006. – №8. – S.54-62.
9. Yegorychev, O.A. Postanovka zadachi o kolebanii ortotropnoy plastiny / O.A. Yegorychev, V.V. Brende // *Vestnik MGSU*. – 2011. – №4. – S.50.
10. Grosman, V.R. Nekotoryye voprosy statiki kruglykh ortotropnykh i izotropnykh plastin // *Vestnik MGSU*. – 2012. – №7. – S. 65-68.
11. Grosman, V.R. Zadacha o svobodnykh kolebaniyakh s odnim uzlovym diametrom kruglykh ortotropnykh i izotropnykh plastin // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. – 2013. – T. 9. – №1. – S.48-52.
12. Qingshan Wang. A unified solution for free in-plane vibration of orthotropic circular, annular and sector plates with general boundary conditions // Qingshan Wang, Dongyan Shi, Qian Liang, Fazl e Ahad // *Applied Mathematical Modelling*. – 2016. – Vol. 40. – Iss. 21-22. – pp.9228-9253.
13. Savin, S.Yu. Sovershenstvovaniye MIF dlya rascheta uprugikh ortotropnykh plastinok v vide parallelogrammov / S.Yu. Savin, M.A. Skotnikova // *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya*. – 2015. – № 1 (57). – S.48-56.
14. Savin, S.Yu. Resheniye zadachi o svobodnykh kolebaniyakh uprugoy ortotropnoy plastinki metodom interpolatsii po koeffitsiyentu formy // *PGS*. – 2014. – №2. – S.19-22.
15. Savin, S.Yu. Razvitiye MIF k deformatsionnomu raschetu uprugikh ortotropnykh plastinok v zadachakh poprechnogo izgiba // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. – 2014. – T.10. – №1. – S.121-131.
16. Korobko, V.I. Svobodnyye kolebaniya treugol'nykh ortotropnykh plastinok s odnorodnymi i kombinirovannymi granichnymi usloviyami / V.I. Korobko, S.YU. Savin // *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya*. – 2013. – №2 (46). – S.33-40.
17. Korobko, V.I. Svobodnyye kolebaniya pryamougol'nykh ortotropnykh plastinok s odnorodnymi i kombinirovannymi granichnymi usloviyami / V.I. Korobko, S.YU. Savin // *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya*. – 2013. – №1 (45). – S.13-18.
18. Chernyayev, A.A. Dinamicheskiy raschet pravil'nykh n-ugol'nykh, treugol'nykh i rombicheskikh sharnirno opertykh plastinok s ispol'zovaniyem otnosheniya konformnykh radiusov v kachestve geometricheskogo argumenta // *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy*. – 2012. – №2. – S. 63-71.
19. Korobko, V.I. Solving the transverse bending problem of thin elastic orthotropic plates with form factor interpolation method / V.I. Korobko, A.V. Korobko, S.Y. Savin, A.A. Chernyayev // *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. – 2016. – Vol. 10. – No. 2. – pp. 9-17.
20. Korobko, V.I. Osnovnyye etapy razvitiya geometricheskikh metodov resheniya dvumernykh zadach teorii uprugosti i stroitel'noy mekhaniki plastinok / V.I. Korobko, A.V. Korobko, S.YU. Savin, A.A. Chernyayev // *Nauchnoye obozreniye. Tekhnicheskiye nauki*. – 2016. – №3. – S.54-69.
21. Savin, S.Yu. Svobodnyye kolebaniya ortotropnykh plastinok v vide rombov s odnorodnymi i kombinirovannymi granichnymi usloviyami / S.Yu. Savin, M.A. Skotnikova // *Bezopasnost' stroitel'nogo fonda Rossii. Problemy i resheniya. Materialy Mezhdunarodnykh akademicheskikh chteniy (g. Kursk, 20-21 noyabrya 2014 g.)* – Kursk: KGU, 2014. – S. 114-120.

**S. Savin**

South-West State University, Kursk

Candidate of Technical Sciences, associated prof. of the unique buildings and structures department

E-mail: [suwini@yandex.ru](mailto:suwini@yandex.ru)

**I. Ivlev**

Orel State University, Orel

Postgraduate student of the building constructions and materials department

E-mail: [ivan542009@rambler.ru](mailto:ivan542009@rambler.ru)

ТИРАТУРЯН А.Н., УГЛОВА Е.В., ЛЯПИН А.А.

## ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТА ДИНАМИЧЕСКОГО ГИСТЕРЕЗИСА ДОРОЖНОЙ КОНСТРУКЦИИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

*В статье рассмотрены вопросы и приведены результаты имитационного моделирования эффекта динамического гистерезиса дорожной конструкции при воздействии на ее поверхность подвижной нагрузки от расчетного транспортного средства. Механические параметры слоев дорожной конструкции, при проведении моделирования динамического воздействия расчетного транспортного средства, дополнены значениями декрементов затухания, определение которых возможно в натурных условиях. Установлена связь между значениями модулей упругости конструктивных слоев дорожной одежды и площадью петли динамического гистерезиса, характеризующей плотность энергии передаваемой на поверхность дорожной одежды при проезде колеса транспортного средства. Отмечена возможность увязки площади рассеиваемой энергии с суммарным числом приложений расчетной нагрузки на поверхности дорожной одежды. Рассмотрены перспективы проведения исследований в рамках данной тематики.*

**Ключевые слова:** дорожная одежда; динамическая нагрузка; петля гистерезиса; модуль упругости

### Введение

Конструкция дорожной одежды представляет собой композиционную систему, включающую в себя материалы, значительно различающиеся по своим структурным и механическим параметрам. Этим объясняется, то что задача повышения их долговечности является чрезвычайно сложной и комплексной. Одним из путей ее решения является развитие методов учета реальных процессов деформирования в структуре дорожных одежд при воздействии современного транспортного потока.

Современные положения механики деформируемого твердого тела позволяют найти ответы на вопросы, практически не исследованные ранее. Одним из таких вопросов является оценка дорожных конструкций с позиций их диссипативных свойств, определяющих процессы рассеивания энергии на поверхности нежестких дорожных одежд. Теоретические основы и критерии энергетического метода расчета дорожных конструкций были сформулированы в работах проф. А.В. Смирнова [1]. Также вопросы энергетического баланса дорожных конструкций изучались в работах С.К. Илиополова, Е.В. Угловой, М.Г. Селезнева и др [2-7].

Большой объем опытных наблюдений и натурных исследований, проведенных в РГСУ в последние годы, позволяет сделать вывод, о том, что процессы затухания колебаний от динамической нагрузки в конструкциях нежестких дорожных одежд в значительной степени отличаются, а их анализ позволит ответить на ряд вопросов, касающихся оценки их состояния на стадии эксплуатации.

### Цель и методика исследований

Одним из показателей, характеризующих величину рассеянной энергии при динамическом нагружении, принятом в механике, является площадь петли механического гистерезиса (рисунок 1). Под механическим гистерезисом принято понимать свойство систем, мгновенный отклик которых на приложенные к ним воздействия зависит в том числе и от их текущего состояния, а поведение системы на интервале времени во многом определяется её предысторией.

Для анализа форм расчетных петель гистерезиса на поверхности дорожной конструкции нами была использована аналитическая модель динамического напряженно-деформированного состояния многослойного полупространства, разработанная в РГСУ [8].

В качестве источника нагружения рассматривался проезд колеса расчетного автомобиля со следующими параметрами:

нагрузка на заднюю ось  $F = 115$  кН;

давление на покрытие  $p=0.6$  МПа

диаметр расчетного отпечатка колеса  $D=33$  см

время контактного воздействия на поверхность покрытия  $t= 0.1$  с.

Входные параметры для моделирования конструкции нежесткой дорожной одежды задавались: для слоев покрытия, слоев основания – средневзвешенный модуль упругости, МПа ( $E_1, E_2$ ); толщины, см ( $h_1, h_2$ ), коэффициенты Пуассона ( $\mu_1, \mu_2$ ); плотности,  $\text{кг/м}^3$  ( $\rho_1, \rho_2$ ), декременты затухания ( $\lambda_1, \lambda_2$ ). Для грунта земляного полотна – модуль упругости ( $E_{гр}$ ), плотности,  $\text{кг/м}^3$  ( $\rho_{гр}$ ), коэффициент Пуассона ( $\mu_{гр}$ ), декремент затухания ( $\lambda_{гр}$ ).

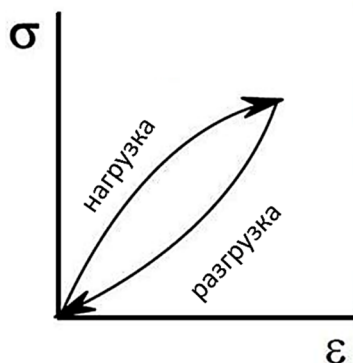


Рисунок 1 – Петля упругого гистерезиса эластомера

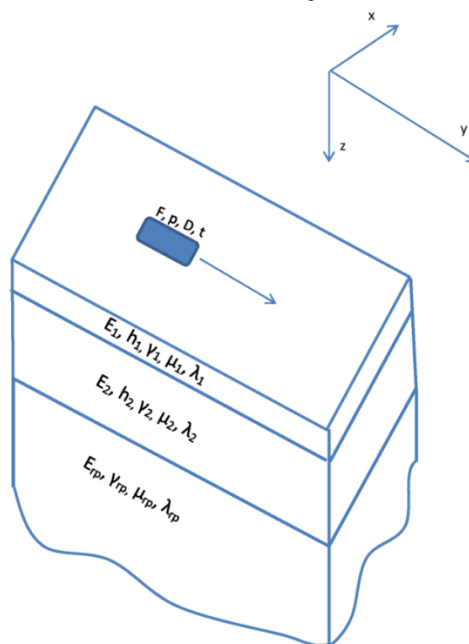


Рисунок 2 – Расчетная схема проезда колеса транспортного средства на поверхности покрытия дорожной одежды

Расчет осуществлялся для двух дорожных одежд различной капитальности, конструкции которых приведены в таблице 1. Значения модулей упругости отдельных слоев нежестких дорожных конструкций рассматривались в двух вариантах:

1. Модули упругости конструктивных слоев дорожной одежды соответствуют проектным значениям (числитель – таблица 1);
2. Модули упругости конструктивных элементов нежестких дорожных одежд снижены в 1.5 (знаменатель таблица 1).

Модельные значение декрементов затухания в рамках рассматриваемых задач принимались следующими: асфальтобетон – 20 %; слой основания – 10 %, грунт земляного полотна – 10 %

Таблица 1 – Конструкции нежестких дорожных одежд, принимаемые в численном эксперименте

Конструкция дорожной одежды № 1			Конструкция дорожной одежды № 2		
Слой	h, см	E, МПа	Слой	h, см	E, МПа
Асфальтобетон	20	2700/1800	Асфальтобетон	15	2500/1700
Несвязное основание	64	370/250	Несвязное основание	45	370/250
Грунт земляного полотна		41/30	Грунт земляного полотна		41/30

**Результаты имитационного моделирования эффекта динамического гистерезиса дорожной конструкции при воздействии подвижной нагрузки**

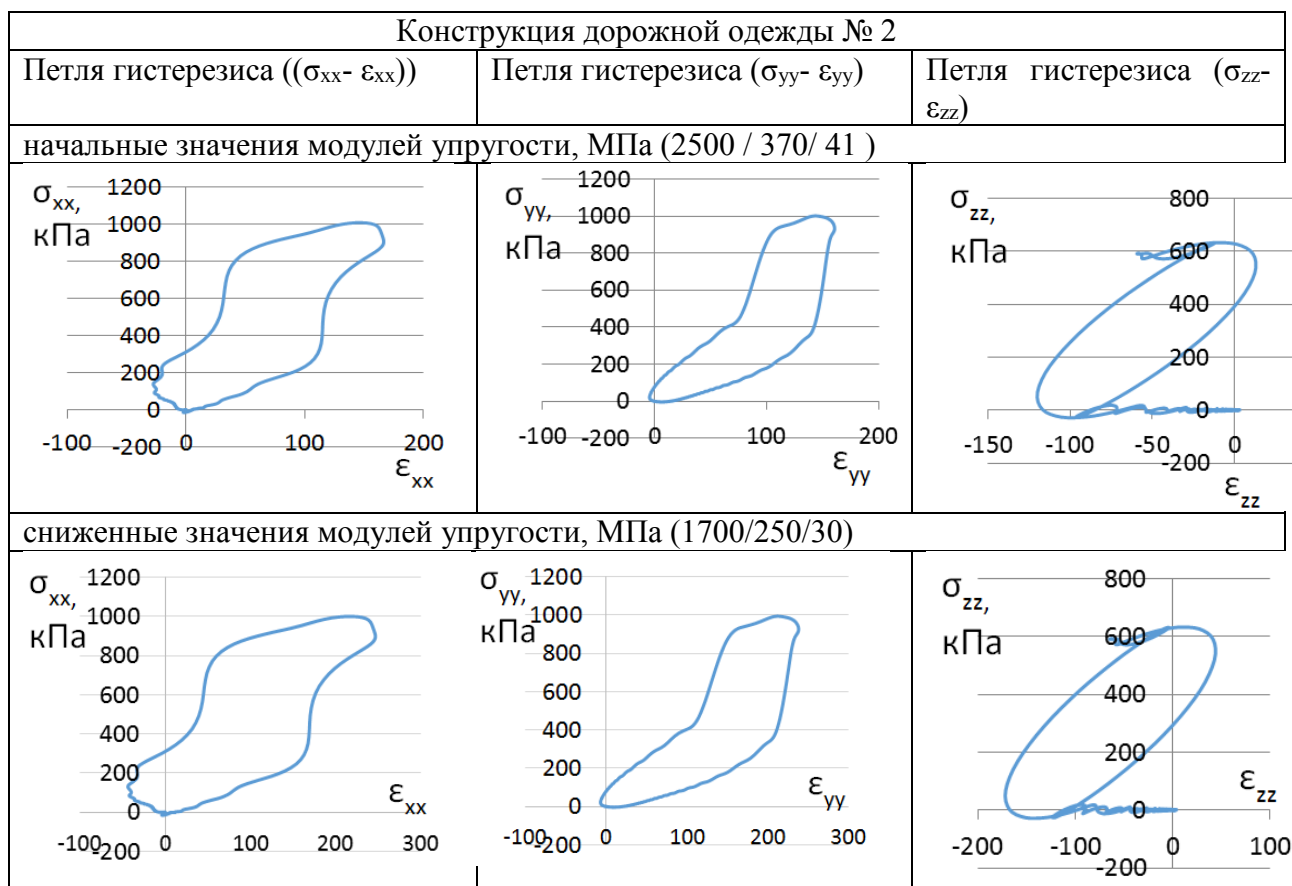
Для каждой конструкции осуществлялся полный расчет динамической картины напряженно-деформированного состояния нежесткой дорожной конструкции с вычислением значений нормальных напряжений ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ) и деформаций ( $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ). Учитывая, что данные напряжения и деформации являются критическими при прогнозировании накопления разрушений и повреждений в структуре дорожной конструкции [9-10], в частности  $\sigma_{xx}$ ,  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  используются для прогнозирования усталостного и продольного трещинообразования, а  $\sigma_{zz}$  и  $\varepsilon_{zz}$  для прогнозирования накопления пластических деформаций, то можно предположить, что объем энергии рассчитываемый исходя из площадей петель гистерезиса, построенных в координатах  $\sigma_{xx} - \varepsilon_{xx}$ ,  $\sigma_{yy} - \varepsilon_{yy}$ ,  $\sigma_{zz} - \varepsilon_{zz}$ , также может служить основанием для прогнозирования накопления повреждений и разрушений дорожных конструкций. Результаты, проведенного имитационного моделирования проезда расчетного автомобиля представлены на рисунке 1 – 2.

Как видно из представленных графиков площадь петли гистерезиса при снижении модулей упругости ее слоев, значительно увеличивается, что позволяет сделать вывод об увеличении объема рассеивания энергии в структуре дорожной конструкции со снижением ее прочности. Так при снижении модулей упругости слоев нежестких дорожных одежд в 1.5 раза, величина энергии передаваемой дорожной конструкции также увеличивается в 1.5 – 1.6 раз для конструкции № 1, и в 1.5 – 1.7 раз для конструкции № 2. Важно отметить, что площадь петли гистерезиса также напрямую зависит от величины декрементов затухания слоев дорожной конструкции (что обусловлено фундаментальными положениями механики деформируемого твердого тела), которые в данном случае принимались в виде постоянных значений.

Таблица 2 – Результаты расчета петель гистерезиса для модельных конструкций дорожных одежд

начальные значения модулей упругости, МПа (2700 / 370/ 41 )		
Петля гистерезиса ( $\sigma_{xx}- \varepsilon_{xx}$ )	Петля гистерезиса ( $\sigma_{yy}- \varepsilon_{yy}$ )	Петля гистерезиса ( $\sigma_{zz}- \varepsilon_{zz}$ )
сниженные значения модулей упругости, МПа (1800/250/30)		
Петля гистерезиса ( $\sigma_{xx}- \varepsilon_{xx}$ )	Петля гистерезиса ( $\sigma_{yy}- \varepsilon_{yy}$ )	Петля гистерезиса ( $\sigma_{zz}- \varepsilon_{zz}$ )

Таблица 3 – Результаты расчета петель гистерезиса для конструкции дорожной одежды № 2



Проведенный численный эксперимент позволяет сделать вывод о возможности увязки плотности рассеиваемой энергии с суммарным числом приложений расчетной нагрузки к точке на поверхности дорожной одежды за ее расчетный срок службы. Однако реализация подобного подхода требует установления качественных и количественных зависимостей изменения значений модулей упругости слоев нежестких дорожных одежд, и их декрементов затухания, как в течении отдельных периодов года, так и в течении всего расчетного срока службы дорожной одежды, что требует проведения широкого комплекса численных и натурных экспериментов

### Выводы

- На основе аналитической модели динамического напряженно-деформированного состояния нежесткой дорожной одежды осуществлено имитационное моделирование эффекта динамического гистерезиса дорожной конструкции при воздействии подвижной нагрузки;

- Отмечено, что при снижении прочности нежесткой дорожной конструкции увеличивается площадь петли гистерезиса, характеризующей плотность энергии воздействия, передаваемой на поверхность дорожной конструкции при проезде транспортного средства. Так при снижении модулей упругости слоев нежестких дорожных одежд в 1.5 раза, величина энергии передаваемой дорожной конструкции также увеличивается в 1.5 – 1.6 раз для конструкции № 1, и в 1.5 – 1.7 раз для конструкции № 2. Важно отметить, что площадь петли гистерезиса также напрямую зависит от величины декрементов затухания слоев дорожной конструкции (что обусловлено фундаментальными положениями механики деформируемого твердого тела), которые в данном случае принимались в виде постоянных значений.

- Возможность определения плотности энергии, передаваемой на поверхность дорожной конструкции от движущегося транспортного средства (в данном случае с параметрами, соответствующими расчетному автомобилю) может быть использована для расчета суммарной плотности энергии, передаваемой на поверхность дорожной конструкции в течение всего срока ее службы. Однако решение данной задачи требует проведения экспериментальных и теоретических исследований зависимостей изменения значений модулей упругости слоев нежестких дорожных одежд, и их декрементов затухания, как в течении отдельных периодов года, так и в течении всего расчетного срока службы дорожной одежды, что требует проведения широкого комплекса численных и натурных экспериментов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов, А.В. Механика дорожных конструкций [Текст] / А.В. Смирнов, А.С. Александров. - Омск: СибАДИ, 2009. - 233 с.
2. Смирнов, А.В. Динамическая устойчивость и расчет дорожных конструкций [Текст] / А.В. Смирнов, С.К. Илиополов, А.С. Александров — Омск: СибАДИ, 2003. — 187 с.
3. Илиополов, С.К. Динамика дорожных конструкций [Текст] / С.К. Илиополов, М.Г. Селезнев, Е.В. Углова. — Ростов-на-Дону: РГСУ, 2002. — 258 с.
4. Илиополов, С.К. Некоторые аспекты практического использования современных механико-математических моделей конструкции дорожной одежды [Текст] / С.К. Илиополов, Е.В. Углова, М.Г. Селезнев // Известия Ростовского государственного строительного университета. - 1998. - №2. - С. 122-128.
5. Илиополов, С.К., Уточненный метод расчета напряженно-деформированного состояния системы "дорожная одежда-грунт" [Текст] / С. К. Илиополов, М. Г. Селезнев - Ростов-на-Дону: МП "Новая книга", 1997. - 142 с.
6. Углова, Е.В. Усталостная долговечность эксплуатируемых асфальтобетонных покрытий / Е.В. Углова, М.Г. Селезнев, С.К. Илиополов. - Ростов-на-Дону: РГСУ, 2009. - 244 с.
7. Ляпин, А.А. О построении фундаментальных решений для слоистых полуограниченных сред. [Текст] // Труды XI международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 2007
8. Тиратурян, А.Н. Расчетно-экспериментальный метод оценки модулей упругости элементов нежестких дорожных конструкций на стадии эксплуатации [Текст]: дис. ... канд техн наук: 05.23.11. - Волгоград, 2014. - 175 с.
9. NCHRP Guide for mechanistic-empirical design of new and rehabilitated pavement structures — 2004.
10. Cost 336 Use of Falling Weight Deflectometers in Pavement Evaluation: Main Report 2nd Edition European Cooperation in the Field of Scientific and Technical Research — April 2005. — 350 p.

#### **Тиратурян Артем Николаевич**

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону  
Кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры «Автомобильные дороги»  
E-mail: [Tiraturjan@list.ru](mailto:Tiraturjan@list.ru)

#### **Углова Евгения Владимировна**

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону  
Доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой «Автомобильные дороги»  
E-mail: [Uglova.ev@ya.ru](mailto:Uglova.ev@ya.ru)

#### **Ляпин Александр Александрович**

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону  
Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Информационные системы в строительстве»

---

A. TIRATURYAN, E. UGLOVA, A. LYAPIN

## **SIMULATION OF THE EFFECT OF DYNAMIC HYSTERESIS PAVEMENT UNDER THE INFLUENCE OF MOVING LOAD**

*The questions and the results of simulation of the dynamic hysteresis effect of pavement when exposed to the surface of the moving load of the design of the vehicle. Mechanical road structure layers during the simulation of dynamic effects of the design of the vehicle, complemented values damping*

*rates, the determination of which is possible in field conditions. The relationship between the values of the elastic moduli of structural pavement layers and dynamic area of the hysteresis loop that characterizes the energy density transmitted to the surface of the pavement when driving wheels of the vehicle. The possibility of linking the energy dissipation area to the total number of rated load applications on the pavement surface. The prospects of research in the framework of this subject.*

**Keywords:** *pavement, dynamic load, hysteresis loop, modulus of elasticity*

## BIBLIOGRAPHY

1. Smirnov, A.V. Mekhanika dorozhnykh konstruksiy [Tekst] / A.V. Smirnov, A.S. Aleksandrov. - Omsk: SibADI, 2009. - 233 s.
2. Smirnov, A.V. Dinamicheskaya ustoychivost' i raschet dorozhnykh konstruksiy [Tekst] / A.V. Smirnov, S.K. Iliopolov, A.S. Aleksandrov — Omsk: SibADI, 2003. — 187 c.
3. Iliopolov, S.K. Dinamika dorozhnykh konstruksiy [Tekst] / S.K. Iliopolov, M.G. Seleznev, Ye.V. Uglova. — Rostov-na-Donu: RGSU, 2002. — 258 c.
4. Iliopolov, S.K. Nekotoryye aspekty prakticheskogo ispol'zovaniya sovremennykh mekhaniko-matematicheskikh modeley konstruksii dorozhnoy odezhdy [Test] / S.K. Iliopolov, Ye.V. Uglova, M.G. Seleznev // Izvestiya Rostovskogo gosudarstvennogo stroitel'nogo universiteta. - 1998. - №2. - S. 122-128.
5. Iliopolov, S.K., Utochnennyy metod rascheta napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya sistemy "dorozhnaya odezhda-grunt" [Test] / S. K. Iliopolov, M. G. Seleznev - Rostov-na-Donu: MP "Novaya kniga", 1997. - 142 s.
6. Uglova, Ye.V. Ustalostnaya dolgovechnost' ekspluatiruyemykh asfal'tobetonnykh pokrytiy / Ye.V. Uglova, M.G. Seleznev, S.K. Iliopolov. - Rostov-na-Donu: RGSU, 2009. - 244 s.
7. Lyapin, A.A. O postroyenii fundamental'nykh resheniy dlya sloistykh poluogranichennykh sred. [Tekst] // Trudy XI mezhdunarodnoy konferentsii «Sovremennyye problemy mekhaniki sploshnoy sredy». Rostov-na-Donu, 2007
8. Tiraturyan, A.N Raschetno-eksperimental'nyy metod otsenki moduley uprugosti elementov ne-zhestkikh dorozhnykh konstruksiy na stadii ekspluatatsii [Tekst]: dis. ... kand tekhn nauk: 05.23.11. - Volgograd, 2014. - 175 s.
9. NCHRP Guide for mechanistic-empirical design of new and rehabilitated pavement structures — 2004.
10. Cost 336 Use of Falling Weight Deflectometers in Pavement Evaluation: Main Report 2nd Edition European Cooperation in the Field of Scientific and Technical Research — April 2005. — 350 p.

### A. Tiraturyan

Don state technical university, Rostov-upon-Don  
Doctor of technical sciences, senior lecturer of the department of roads  
E-mail: [Tiraturjan@list.ru](mailto:Tiraturjan@list.ru)

### E. Uglova

Don state technical university, Rostov-upon-Don  
Candidate of technical sciences, head of the department of roads  
E-mail: [Uglova.ev@ya.ru](mailto:Uglova.ev@ya.ru)

### A. Lyapin

Don state technical university, Rostov-upon-Don  
Doctor of physical and mathematic sciences, professor,  
head of the department of information system in civil engineering

ТУРКОВ А.В., МАКАРОВ А.А., ВЕТРОВА О.А.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК НА КВАДРАТНОМ ПЛАНЕ С РАЗМЕРОМ ЯЧЕЕК 0,4x0,4 М С ПОКРЫТИЕМ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СХЕМАХ ОПИРАНИЯ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ И СТАТИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ

Рассматривается экспериментальное исследование системы перекрёстных балок (СПБ) на квадратном плане с размером ячеек 0,4x0,4 м с покрытием, при изменении схемы опирания. В ходе эксперимента проводятся статистические и динамические испытания, в результате которых, находятся максимальный прогиб и частота собственных колебаний системы. Выявлено что с уменьшением количество опор по одной стороне, прогибы увеличиваются, а частоты уменьшаются. Так же установлено что при уменьшении жесткости узлового соединения максимальный прогиб увеличивается, а частоты собственных колебаний системы уменьшаются. Произведено сопоставление теоретических и экспериментальных данных. Анализ, которых показывает, независимо от податливости узловых соединений и схемы опирания экспериментальные прогибы и частоты больше полученных численным способом. Для СПБ в зависимости от схемы опирания, разница между экспериментальными и численными значениями прогибов составляет от 1,70% до 6,84%, а разница между частотами составляет от 1,33% до 4,68%. Основной причиной расхождения экспериментальных и численных значений прогибов и частот поперечных колебаний являются то обстоятельство, что за счёт высокой степени податливости узлов системы её деформации при высоких уровнях нагрузки проходят в нелинейной области. Для коэффициента  $K$  разница между теоретическими и экспериментальными данными достигает 15,62%. На основании исследования можно сделать вывод о достаточной хорошей сходимости результатов численных и экспериментальных прогибов и частот собственных колебаний, а также соответствие экспериментального коэффициента  $K$  и его применимость для систем перекрёстных балок, аналитическим значениям, выведенным В.И. Коробко для изотропных пластин.

**Ключевые слова:** система перекрёстных балок, испытательный стенд, элементы покрытия, динамические испытания, статические испытания, модуль упругости, частота собственных колебаний, максимальный прогиб.

Статические и динамические испытания системы перекрёстных балок проводились на специальном стенде. Стенд представляет собой пространственную конструкцию, состоящую из вертикальных опор, сложенных из кирпича и установленных по углам конструкции. По опорам сверху уложены железобетонные балки сечением 120x130(h) мм, на которые СПБ опирается через стальные цилиндрические опоры диаметром 20 мм.

Система перекрёстных балок выполнена из деревянных элементов цельного сечения 10x100(h) длиной 390 мм, которые в узлах соединяются при помощи стальных гнутых уголков из листа толщиной 1 мм на болтах М6 (рисунки 1 и 2). Система перекрёстных балок имеет в плане размер 2400x2400 мм, размер ячейки 400x400 мм.

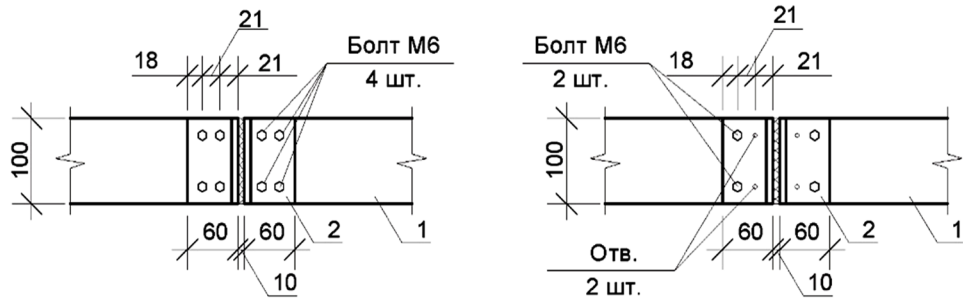
а)



б)



Рисунок 1– Конструкция СПБ с элементами покрытия (а) и узел крепления элементов (б)



а) крепление элементов СПБ в узле 4 болтами

б) крепление элементов СПБ в узле 2 болтами

Рисунок 2 – Узел крепления элементов СПБ

(1 – элемент СПБ; 2 – уголки, соединяющие между собой элементы СПБ)

**А) Определение фактической податливости узловых соединений и крепления покрытия**

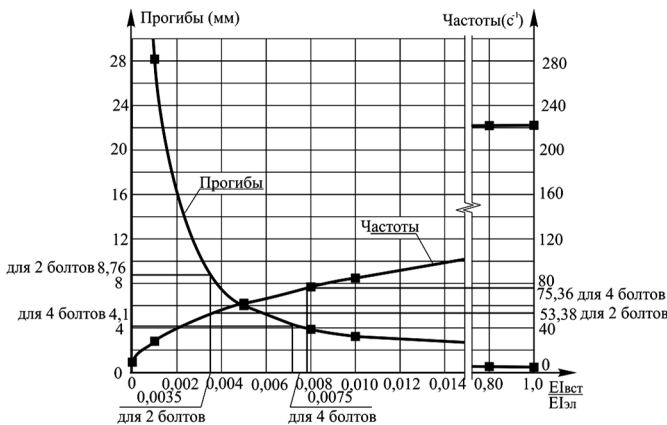


Рисунок 3 – Изменение частот собственных колебаний и прогибов СПБ в зависимости от соотношения жесткости вставки к жесткости элемента

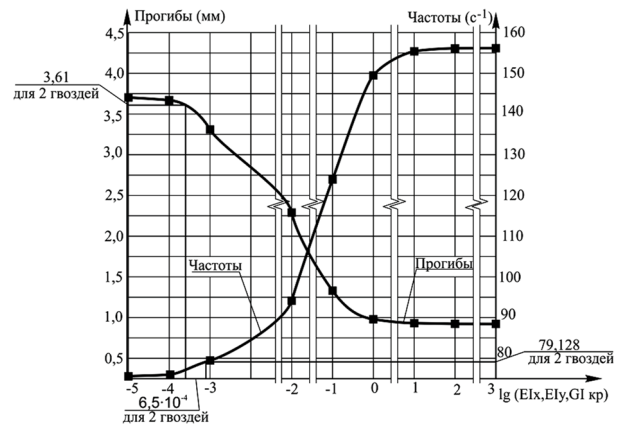


Рисунок 4 – Изменение частот собственных колебаний и прогибов в зависимости от жесткости вертикальных элементов, крепящих настил к СПБ

На первом этапе выполнены исследования по экспериментальному определению фактической податливости узловых соединений. Элементы СПБ моделировались стержнями со вставками на концах [4], которые в свою очередь моделировали податливость узловых соединений. По результатам расчёта и по экспериментальным прогибам и частотам колебаний были определены фактическая податливость узлов при креплении элементов четырьмя нагелями, которая составила  $EI_{вст}/EI_{эл} = 0,0075$  при креплении узла 4 болтами, и  $EI_{вст}/EI_{эл} = 0,0035$  при креплении узла 2 болтами.

Для определения фактической податливости крепления покрытия к СПБ в программном комплексе SCAD рассчитана экспериментальная конструкция. Были введены вертикальные элементы, моделирующие крепление покрытия [1]. Жесткость вертикальных конечных элементов изменялась от 0 (в практических расчётах принято  $EI_x = 10^{-5} \text{кН}\cdot\text{м}^2$ ;  $EI_y = 10^{-5} \text{кН}\cdot\text{м}^2$ ;  $GI_{кр} = 10^{-5} \text{кН}\cdot\text{м}^2$ ,  $EA = 1,1 \cdot 10^4 \text{кН}$ ) до достаточно большой ( $EI_x = 10^3 \text{кН}\cdot\text{м}^2$ ;  $EI_y = 10^3 \text{кН}\cdot\text{м}^2$ ;  $GI_{кр} = 10^3 \text{кН}\cdot\text{м}^2$ ,  $EA = 1,1 \cdot 10^4 \text{кН}$ ), при которой изменение прогибов и частот колебаний стабилизировалось. При жёсткости вертикальных элементов, равных 0, покрытие не включается в совместную работу с системой перекрёстных балок, а при очень большой жёсткости вертикальных элементов податливость связей, крепящих элементы покрытия к СПБ, отсутствует. Соотношение жесткости вставки к жесткости элемента самой системы перекрёстных балок принято постоянным  $EI_{вст.}/EI_{эл} = 0,0075$  для четырёх болтов в узле. По результатам расчёта определялся максимальный прогиб и основная частота поперечных коле-

баний системы перекрёстных балок. По полученным данным построен график изменения прогибов и частот колебаний в зависимости от жесткости вертикальных конечных элементов (рисунок 3).

По графику была определена фактическая жесткость вертикальных элементов, для случая крепления покрытия по одной стороне 2 гвоздями составляет  $EI_x = 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ Кн} \cdot \text{м}^2$ ;  $EI_y = 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ Кн} \cdot \text{м}^2$ ;  $GI_{кр} = 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ Кн} \cdot \text{м}^2$ ,  $EA = 1,1 \cdot 10^4 \text{ Кн}$ . Соответственно увеличение количества гвоздей по одной стороне достигалось введение новых вертикальных элементов

### Б) Статические испытания



Рисунок 5- Загрузка СПБ распределенной нагрузкой на элементы покрытия

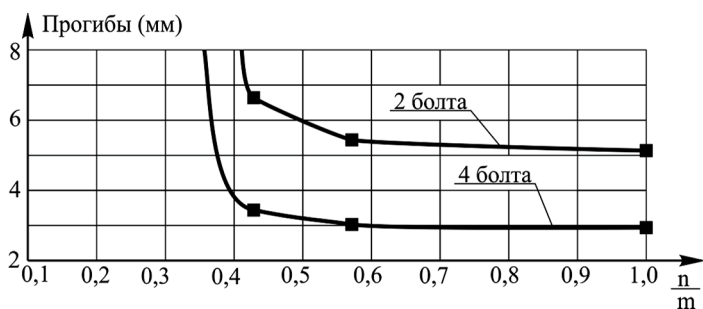


Рисунок 6 – Изменение прогибов в зависимости от количества опор по одной стороне конструкции (n - количество опор по одной стороне конструкции, m - количество контурных узлов по одной стороне

нут «отдыха» загружалась вновь. Для каждого типа СПБ испытания проводились не менее трёх раз до получения стабильных значений экспериментальных прогибов.

Схема опирания изменялась следующим образом. На первом этапе испытаний под каждым из семи контурных узлов располагались стальные цилиндрические опоры диаметром 20 мм для осуществления шарнирного опирания. На втором этапе с каждой стороны СПБ убиралась опоры через один узел, в результате система опиралась по каждой стороне в четырех узлах. На третьем этапе опоры убрали через два контурных узла, и опирание происходило в трех узлах (в угловых узлах и в середине стороны СПБ). На четвертом этапе конструкция опиралась только в угловых узлах. Для каждого типа СПБ испытания проводились не менее трёх раз до получения стабильных значений экспериментальных прогибов.

Включение в работу покрытия моделируется следующим образом. Сверху на систему укладываются 36 листов ДВП толщиной 3мм, размером 0,4×0,4 м на каждую ячейку. Крепление элементов покрытия осуществляется по контуру гвоздями диаметром 1 мм длиной 15мм. Жесткость крепления покрытия к СПБ принята постоянной, пластина прибита по всему контуру в четвертях стороны ячейки (5 гвоздей). Результаты экспериментальных исследований приведены в таблице 1 и на рисунке 6. Обработка экспериментальных данных проводилась в соответствии с [2].

Для определения прогиба СПБ загружалась распределенной нагрузкой на элементы покрытия (рисунок 2). В качестве нагрузки использовались запаянные полиэтиленовые пакеты с песком, вес каждого из которых составлял  $10 \pm 0,05 \text{ Н}$ . Загружение осуществлялось в две ступени, вес каждой ступени составлял 250 Н; что составило  $0,0625 \text{ кН/м}^2$ . Для определения прогиба в центральном узле конструкции устанавливался индикатор часового типа ИЧ-25 с ценой деления 0,01 мм на штативе.

Податливость узловых соединений моделировалась количеством болтов в каждом узле. На 1-ом этапе в узлах было установлено по 4 болта на каждый элемент балки, примыкающий к узлу. На 2-ом этапе податливость узловых соединений увеличивают с помощью выкручивания 50% болтов из каждого узла схемы (рисунок 2).

После снятия показания по индикатору от максимальной нагрузки, которая составляла  $0,125 \text{ кН/м}^2$ , СПБ разгружалась, и после пятнадцати минут

Таблица 1 – Результаты экспериментальных исследований максимального прогиба (мм) при различной жесткости крепления узловых соединений и количестве опор по одной стороне СПБ

		Нагрузка, (Н/м <sup>2</sup> )		Максимальный прогиб(мм)			
				0	62,5	125,0	
Количество болтов в узле СПБ 4	Количество опор по одной стороне конструкции	7	Показания ИЧ-25 при соответствующем статическом нагружении	1	2108	2242	2406
				2	2114	2250	2409
				3	2127	2262	2416
			Средний прогиб по трём нагружениям			0	1,35
		4	Показания ИЧ-25 при соответствующем статическом нагружении	1	2245	2390	2558
				2	2249	2393	2550
				3	2251	2397	2546
			Средний прогиб по трём нагружениям			0	1,45
		3	Показания ИЧ-25 при соответствующем статическом нагружении	1	2237	2413	2602
				2	2287	2450	2625
				3	2305	2458	2634
			Средний прогиб по трём нагружениям			0	1,64
2	Показания ИЧ-25 при соответствующем статическом нагружении	1	2380	3634	4611		
		2	2419	3607	4602		
		3	2445	3615	4610		
	Средний прогиб по трём нагружениям			0	12,04	21,93	
Количество болтов в узле СПБ 2	Количество опор по одной стороне конструкции	7	Показания ИЧ-25 при соответствующем статическом нагружении	1	1770	2066	2316
				2	1815	2089	2343
				3	1920	2187	2421
			Средний прогиб по трём нагружениям			0	2,76
		4	Показания ИЧ-25 при соответствующем статическом нагружении	1	1885	2204	2492
				2	1956	2238	2477
				3	2107	2364	2611
			Средний прогиб по трём нагружениям			0	2,86
		3	Показания ИЧ-25 при соответствующем статическом нагружении	1	2151	2493	2847
				2	2320	2620	2981
				3	2512	2779	3147
			Средний прогиб по трём нагружениям			0	3,03
2	Показания ИЧ-25 при соответствующем статическом нагружении	1	131	2385	-		
		2	1187	3401	-		
		3	1274	3457	-		
	Средний прогиб по трём нагружениям			0	22,17	-	

Примечание. В ячейках таблицы, где стоят прочерки, система перестает работать в упругой стадии, в связи с чем эти результаты в исследованиях не учитывались.

### В) Динамические испытания

После проведения каждого этапа статических испытаний опытная конструкция разгружалась и «отдыхала» в течение 15...20 минут, после чего проводились динамические испытания СПБ. В ходе проведения динамических испытаний определялись основные частоты собственных поперечных колебаний системы перекрестных балок в зависимости от податливости узловых соединений, и при включении в работу покрытия. Измерения основных частот колебаний выполнялись

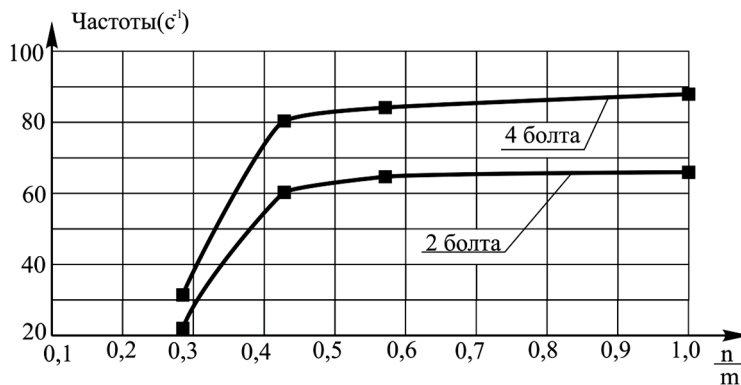


Рисунок 7 – Изменение частот собственных колебаний в зависимости от количества опор по одной стороне конструкции

при помощи виброанализатора «ВИБРАН – 2.0». Датчик крепился снизу в центральном узле СПБ; колебания возбуждались путём удара сверху резиновой киянкой по центральному узлу конструкции.

Значения собственных круговых частот определялись из виброграмм колебаний за интервал времени в 1 с, исключая переходной процесс стабилизации колебаний, по формуле:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f, \tag{1}$$

где  $f$  – частота колебаний системы.

Для каждого типа системы перекрестных балок динамические испытания проводились также не менее трёх раз до получения стабильных значений экспериментальных круговых частот колебаний.

Характерные виброграммы, полученные в ходе эксперимента, представлены на рисунках 8 и 9. Результаты измерения представлены в таблице 2.

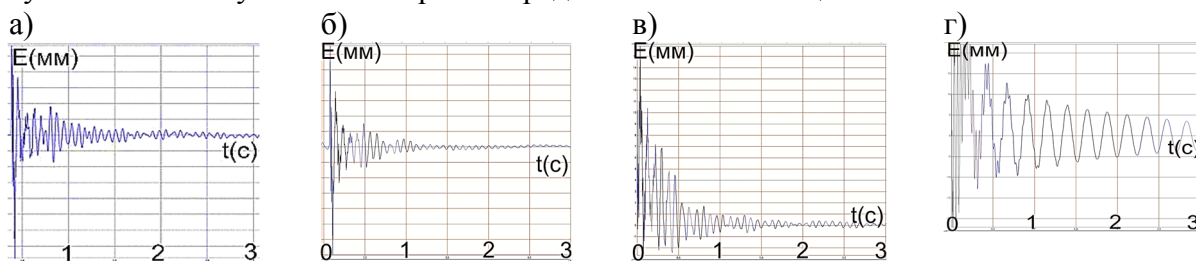


Рисунок 8 - Характерные виброграммы собственных колебаний СПБ с покрытием при 4 болтах в узле в зависимости от схемы опирания (а – 7 опор, б – 4 опоры, в – 3 опоры, г – 2 опоры)

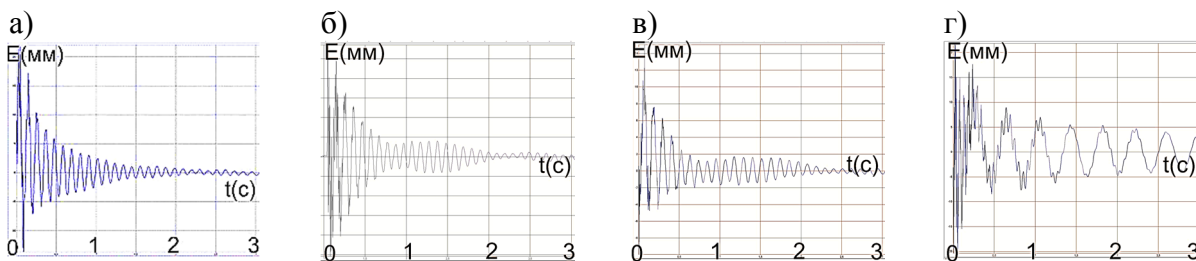


Рисунок 9 - Характерные виброграммы собственных колебаний СПБ с покрытием при 2 болтах в узле в зависимости от схемы опирания (а – 7 опор, б – 4 опоры, в – 3 опоры, г – 2 опоры)

Таблица 2 - Экспериментальные частоты собственных колебаний ( $c^{-1}$ ) СПБ при изменении схемы опирания

		Количество болтов в узле СПБ 4		Количество болтов в узле СПБ 2	
		Частота, $f$	Круговая частота, $\omega$	Частота, $f$	Круговая частота, $\omega$
Количество опор по одной стороне	7	14,00	87,92	10,50	65,94
	4	13,40	84,15	10,30	64,68
	3	12,80	80,38	9,60	60,29
	2	5,00	31,40	3,50	21,98

### Г) Сопоставление экспериментальных и теоретических данных

Полученные результаты экспериментальных и численных исследований представлены в таблице 3. Критерием точности при сопоставлении экспериментальных и численных данных является коэффициент  $K$ , связывающий частоту собственных поперечных колебаний

СПБ  $\omega$ , максимальный прогиб  $W_0$ , распределенную массу конструкции  $m$  и действующую равномерно распределенную нагрузку  $q$  в формуле В.И. Коробко [3].

$$W_0 \cdot \omega^2 = K \frac{q}{m}, \quad (2)$$

Аналитическое значение коэффициента  $K$  для квадратных пластин с шарнирно опертым контуром составляет  $K = 1,582$ .

Таблица 3 – Сравнение экспериментальных и теоретических данных для СПБ при изменении схемы опирания

		Кол-во болтов в узле 4				Кол-во болтов в узле 2			
		Количество опор по одной стороне конструкции				Количество опор по одной стороне конструкции			
		7	4	3	2	7	4	3	2
Максимальный прогиб $W_0$ (мм)	Эксперимент	2,94	3,03	3,44	21,93	5,25	5,44	6,64	-
	Численно	2,89	2,93	3,39	20,43	5,11	5,26	6,20	35,18
Откл. эксп. от числ. (%)		1,70	3,30	1,45	6,84	2,67	3,31	6,63	-
Круговая частота, $\omega$ (с <sup>-1</sup> )	Эксперимент	87,92	84,15	80,38	31,40	65,94	64,68	60,28	21,98
	Численно	84,39	83,02	77,40	30,54	63,32	61,92	57,30	23,06
Откл. эксп. от числ. (%)		4,02	1,33	3,71	2,74	4,11	4,27	4,94	4,68
К по (2)	Эксперимент	1,544	1,457	1,510	1,469	1,550	1,546	1,639	-
	Численно	1,398	1,372	1,380	1,294	1,392	1,370	1,383	1,271
Откл. эксп. от числ. (%)		9,46	5,83	8,61	11,91	10,19	11,38	15,62	-
$K_{\text{аналит}}$		1,582							
Отклонение К от $K_{\text{аналит}}$ (%)	Эксперимент	2,42	7,87	4,56	7,16	1,99	2,27	3,62	-
	Численно	11,62	13,29	12,79	18,18	12,02	13,41	12,58	19,64

Анализ полученных данных показывает, независимо от податливости узловых соединений и схемы опирания экспериментальные прогибы и частоты больше полученных численным способом.

Для СПБ в зависимости от схемы опирания, разница между экспериментальными и численными значениями прогибов составляет от 1,70% до 6,84%, а разница между частотами составляет от 1,33% до 4,68%.

Для коэффициента  $K$  разница между теоретическими и экспериментальными данными – до 15,62%. Необходимо отметить, что формула (2) выведена для изотропных пластин, непрерывно опертых по контуру, и это обстоятельство приводит к большим ошибкам при экспериментальном определении коэффициента  $K$  для систем перекрестных балок, являющимися стержневыми конструкциями с большим размером ячеек.

**Заключение.** На основании исследования можно сделать вывод о достаточно хорошей сходимости результатов численных и экспериментальных прогибов и частот собственных колебаний, а также соответствие экспериментального коэффициента  $K$  и его применимость для СПБ, аналитическим значениям, выведенным В.И. Коробко для изотропных пластин.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Турков, А.В. Прогибы и частоты собственных колебаний систем перекрестных балок с пластинами по верхнему поясу с учётом податливости связей, крепящих элементы покрытия к системе [Текст]/А.В. Турков, А.А. Макаров //Строительство и реконструкция. – 2013.– №5. – С. 30-35.

2. Нефедов, В. И. Метрология и радиоизмерение [Текст]/ В.И. Нефедов, А.С. Сигов, В.К. Битюков, В.И. Хахин - М.: Высшая школа, 2006. - 518 с
3. Коробко, В.И. Об одной "замечательной" закономерности в теории упругих пластинок [Текст] / В. И. Коробко. // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1989. – № 11. – С. 32-36.
4. Турков, А.В. Прогибы и частоты собственных колебаний систем перекрестных балок на квадратном плане с учетом податливости узловых соединений [Текст]/А.В. Турков, А.А. Макаров //Строительство и реконструкция. – 2013.– №1. – С. 33-36.
5. Байда, Э.Н. Об одном методе расчёта регулярных ортогональных перекрёстных систем [Текст]/ Э.Н. Байда, Б.В. Лабудин. В кн. Конструкции из клееной древесины и пластмасс. – Л.: ЛИСИ, 1976.
6. Гулари, Л.М. К вопросу о проектировании покрытий перекрёстных ферм и балок [Текст]/ Л.М. Гулари. – Строительная механика и расчёт сооружений. – №2. – 1960.
7. Лабудин, Б.В. Влияние некоторых факторов на материалоемкость перекрёстно-балочных конструкций из клееной деревянных элементов [Текст]/ Б.В. Лабудин// Исследование конструкций из клееной древесины и пластмасс.– Л., ЛИСИ, 1977.
8. Лабудин, Б.В. Пространственные перекрёстно-балочные покрытия из клееных деревянных элементов [Текст]/Б.В. Лабудин, Е.И. Светозарова// Исследование конструкций из клееной древесины и пластмасс.– №1. –Л., ЛИСИ, 1977.
9. Лабудин, Б.В. Экспериментальные исследования перекрёстно-балочной конструкции из клееных деревянных элементов [Текст]/Б.В. Лабудин, Е.И. Светозарова// Исследование конструкций из клееной древесины и пластмасс.– №2.–Л., ЛИСИ, 1978.
10. Турков, А.В. Исследование прогибов и частот собственных колебаний составных круглых стропных пластин [Текст]/А.В. Турков, К.В. Марфин –Известия высших учебных заведений. Лесной журнал [Текст]. – №4. – 2013. – С. 66-71

**Турков Андрей Викторович**

ФГБОУ ВО «ОГУ имени И.С. Тургенева», г. Орел.

Доктор технических наук, заведующий кафедрой «Городское строительство и хозяйство».

E-mail: [aturkov@bk.ru](mailto:aturkov@bk.ru)

**Макаров Артем Алексеевич**

ФГБОУ ВО «ОГУ имени И.С. Тургенева», г. Орел.

аспирант

E-mail: [mak\\_ar@inbox.ru](mailto:mak_ar@inbox.ru)

**Ветрова Ольга Анатольевна**

ФГБОУ ВО «ОГУ имени И.С. Тургенева», г. Орел.

Кандидат технических наук, заведующий кафедрой «Строительные конструкции и материалы».

E-mail: [vetrovaoly@mail.ru](mailto:vetrovaoly@mail.ru)

---

A. TURKOV, A. MAKAROV, O. VETROVA

**PILOT STUDIES OF SYSTEMS OF CROSS BEAMS ON THE SQUARE PLAN WITH A SIZE OF CELLS OF 0,4X0,4 M THE COVERING AT VARIOUS SCHEMES SUPPORTING ON DYNAMIC AND STATIC LOADINGS**

*The pilot study of the system of cross beams on the square plan with a size of cells of 0,4x0,4 m with a covering is considered, in case of change of the scheme of an covering during the experiment statistical and dynamic tests as a result of which, there are the maximum sag and frequency of natural oscillations of system are carried out. It is revealed that with reduction quantity of support on one side, sags increase, and frequencies decrease. It is also set that in case of reduction of rigidness of nodal connection the maximum sag increases, and frequencies of natural oscillations of system decrease. Comparison of theoretical and experimental data is made. The analysis whom shows irrespective of a pliability of nodal connections and the scheme of an covering the experimental sags and frequencies is more received by a numerical method. For SPB depending on the scheme of an covering, the difference between the experimental and numerical values of sags makes from 1,70% to 6,84%, and the difference frequencies makes a boundary from 1,33% to 4,68%. A basic reason of a discrepancy of the experi-*

*mental and numerical values of sags and frequencies of cross oscillations are that circumstance that at the expense of a high level of a pliability of nodes of system of its deformation in case of the high levels of loading take place in non-linear area. For coefficient  $T_0$  a difference between theoretical and experimental data reaches 15,62%. Based on a research it is possible to draw a conclusion on rather good convergence of results of numerical and experimental sags and frequencies of own oscillations, and also compliance of the experimental coefficient  $T_0$  and its applicability for systems of cross beams, to the analytical values removed by V. I. Korobko for the isotropic plates.*

**Key words:** *system of cross beams, test bench, covering elements, dynamic testing, static testing, the elastic modulus, natural frequency, the maximum deflection.*

## BIBLIOGRAPHY

1. Turkov, A.V. Progiby i chastoty sobstvennykh kolebanij sistem perekrestnykh balok s plastinam i poverhnemu pojasu s uchjotom podatlivosti svjazej, krepjashhih elementy pokrytija k sisteme /A.V. Turkov, A.A. Makarov //Stroitel'stvo i rekonstrukcija. – 2013.– №5. – S. 30-35.
2. Nefedov V.I., Metrology and radio/ I. Nefedov, A.S. Sigov, V.K. Bitjukov, V.I. Hagin – M.: Vischaya shkola, 2006. - 518 S.
3. Korobko, V.I. Ob odnoi «zamechatelnoi» zakonomernosti v teorii uprugih plastinok [Tekst] / V.I.Korobko// Izv. Vuzov. Stroitel'stvo i arhitektura. – 1989. – №11. – S. 32-36.
4. Turkov, A.V. Progiby i chastoty sobstvennykh kolebanij sistem perekrestnykh balok na kvadratnom plane s uchjetom podatlivosti uzlovykh soedinenij /A.V. Turkov, A.A. Makarov //Stroitel'stvo i rekonstrukcija. – 2013.– №1. – S. 33-36.
5. Bayda E.N. Ob odnom metode raschjota reguljarnykh ortogonal'nykh perekrestnykh sistem / E.N. Bayda, B.V. Labudin. Proc. Construction of laminated wood and plastics. - L.: LISI 1976.
6. Gurari L.M. K voprosu o proektirovanii pokrytij perekrestnykh ferm i balok / L.M. Gurari. - Building mechanics and calculation of constructions. - №2. - 1960.
7. Labudin B.V. Vlijanie nekotorykh faktorov na materialojomkost' perekrestno-balochnykh konstrukcij iz kleenoi derevjannykh jelementov / B.V. Labudin // Study designs of laminated wood and plastmass.- L., LISI 1977.
8. Labudin B.V. Prostranstvennye perekrestno-balochnye pokrytija iz kleenykh derevjannykh jelementov /B.V. Labudin, E.I. Svetozarova // Study designs of laminated wood and plastmass.- №1. -A., LISI 1977.
9. Labudin B.V. Jeksperimental'nye issledovanija perekrestno-balochnoj konstrukcii iz kleenykh derevjannykh jelementov/B.V. Labudin, E.I. Svetozarova // Study designs of laminated wood and plastmass.- №2.-L., LISI 1978.
10. Turkov A.V. Issledovanie progibov i chastot sobstvennykh kolebanij sostavnykh kruglykh transtropnykh plastin /A.V. Turkov, K.V. Marfin -Izvestiya universities. Forest magazine. - №4. - 2013. - pp. 66-71

### A. Turkov

Orel State University, Orel

Doctor of Technical Sciences, Head of the department "Urban Construction and Management"

E-mail: [aturkov@bk.ru](mailto:aturkov@bk.ru)

### A. Makarov

Orel State University, Orel

Postgraduate student

E-mail: [mak\\_ar@inbox.ru](mailto:mak_ar@inbox.ru)

### O. Vetrova

Orel State University, Orel

Doctor of Technical Sciences, Head of the department "Building construction and materials"

E-mail: [vetrovaoly@mail.ru](mailto:vetrovaoly@mail.ru)

ЦУКАНОВА Е.С., КЕГЛИН Б.Г.

## ПРИМЕНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЕТАХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ, РАБОТАЮЩИХ ПРИ УДАРНОЙ НАГРУЗКЕ

*Рассматривается динамический конечный элемент (ДКЭ) применительно к расчету стержневых строительных конструкций при ударной нагрузке. Матрицы жесткости и инерции ДКЭ построены на основе аналитических (точных) решений уравнений колебаний стержня. При исследовании удара использовалась гипотеза о том, что местные деформации вблизи области контакта соударяющихся тел связаны с контактной силой статическими зависимостями, а также учитываются общие деформации строительной конструкции, которые определяются методами теории колебаний. Исследовано влияние параметров ударной нагрузки на движение стержневой системы на примере стержня работающего на растяжение и изгиб. При этом ударная нагрузка моделировалась синусоидой с различной частотой, а также в виде эквивалентного импульса. Показано, что при увеличении частоты ударной нагрузки характер движения сохраняется, однако происходит уменьшение амплитуды. Эффективность применения ДКЭ в задачах удара показана путем сравнения с известными аналитическими решениями, а также с результатами расчетов, использующими классический конечный элемент с полиномиальными функциями формы.*

**Ключевые слова:** метод конечных элементов; динамический конечный элемент; стержневые системы; ударная нагрузка; реакция системы; частота; собственные формы.

Многие строительные конструкции при расчетах моделируются в виде стержней или стержневых систем. Примером подобных конструкций в области строительства являются мосты, опоры линий электропередач, перекрытия стадионов и ангаров. Такие сооружения в процессе эксплуатации часто подвергаются динамическим нагрузкам: ветровым, техногенным, сейсмическим, ударным. Поэтому точная оценка поведения стержневых конструкций под действием динамических нагрузок имеет большое значение при проектировании.

Многие исследования посвящены вопросам моделирования динамики и получению уравнений движения при колебаниях стержневых конструкций различной конфигурации. Предложено множество подходов для определения частот колебаний [1]. В работе [2] приведен обзор приближенных методов расчета, таких как метод Майклстеда, подход Галеркина, метод Релея-Ритца, конечно-элементная постановка. Классический метод конечных элементов (МКЭ), в котором матрицы стержневых элементов построены на основе статических (в основном, полиномиальных) функций форм, широко используется в расчетах различных стержневых конструкций [1, 3]. Такой подход дает приближенные уравнения в форме статической матрицы жесткости и матрицы инерции. Вариации классической постановки МКЭ позволяют повысить точность расчета. Одним из таких вариантов может быть использование функций форм, отличных от полиномов. Применение альтернативных функций форм в динамической постановке МКЭ также исследовалось многими авторами.

Для повышения скорости сходимости итерационных процессов решения дискретной задачи, а также самого результата, в работах [4, 5] предлагается использовать гармонические конечно-элементные функции формы. Для их определения описано несколько алгоритмов: метод коллокации, аппроксимация лагранжевыми граничными функциями, разложение в ряд по фундаментальным решениям уравнения Лапласа. Предложенные в работах [4, 5] методики позволяют существенно повысить точность расчета, сократить число степеней свободы конструкции, однако, не учитывают в полной мере динамическое поведение элемента. В динамике колебательные формы элементов могут не являться гармониками (или их суперпозициями) [6], поэтому точный результат возможен при случайном совпадении функции формы с истинной колебательной формой элемента.

В работе [7] предложен и обоснован аналог метода конечных элементов – метод гармонического элемента (ГаЭ), основанный на использовании и развитии метода динамической податливости [8]. При таком подходе решение задачи получается разбивкой динамической системы на достаточно простые элементы, для которых можно построить аналитические решения для различных допустимых краевых условий, задаваемых в соединительных узлах элементов. Предложенный метод позволяет избежать дискретизации инерционных параметров системы, что, безусловно, повышает точность расчета. Однако, метод гармонического элемента ориентирован на моделирование вынужденных колебаний конструкции. Механизм свободных колебаний здесь не реализуется.

Для точного расчета свободных колебаний стержневых конструкций широко используется метод динамической жесткости (МДЖ) [9, 10]. Метод предполагает построение так называемой точной динамической матрицы жесткости с использованием функций форм, полученных из точных решений дифференциальных уравнений колебаний, таким образом результат расчета также является точным [11]. Следует отметить, что такая матрица является частотно зависимой и включает в себя как инерционные, так и жесткостные свойства элемента. Однако, в данном случае возможен расчет только свободных колебаний конструкций. Механизм вынужденных колебаний здесь не реализуется.

Детальные исследования существующих методов расчета стержневых конструкций привели к созданию подхода на основе динамического (частотно зависимого) конечного элемента (ДКЭ) [12]. ДКЭ может «восполнить пробел» между классическим МКЭ, МДЖ, и методом ГаЭ, сочетая в себе общность постановки МКЭ и высокую точность подходов МДЖ и метода ГаЭ. ДКЭ сочетает в себе сохранение физических аспектов аналитических подходов и широкие возможности численных методов. В работе [12] показано, что ДКЭ является эффективным инструментом расчета свободных и вынужденных колебаний стержневых конструкций, а также при оценке их напряженно-деформированного состояния.

Однако, при проектировании различных строительных сооружений необходимо учитывать специальный вид нагрузок, возникающий в результате природного или техногенного воздействия. Наиболее часто строительные конструкции подвергаются действию ударных нагрузок различного происхождения. Это, например, удары летящих тел различной природы, падение грузов, взрывы. Точная оценка поведения системы в результате действия удара позволит избежать ее разрушения.

Исследования поведения строительных конструкций при ударной нагрузке широко представлены в литературе. Так, в работе [13] изложены методы динамических расчетов конструкций, подверженных импульсивным и ударным нагрузкам, причем особое внимание уделяется упрощенным и эмпирическим методам расчета. Также приведены методы расчета нагрузок, создаваемых экстремальными воздействиями (удар при падении на сооружение самолетов, взрывы, аварии, ураган, торнадо), при проектировании АЭС.

Однако, недостаточно внимания уделяется уточненным расчетам динамики конструкций вследствие удара с применением численных методов, необходимых для проектирования ответственных конструкций. В работе [14] приведены расчеты полей скоростей стержневых конструкций при ударной нагрузке. Для повышения точности результатов стержни моделировали не только классическими конечными элементами с линейными функциями форм, но и элементами более высоких порядков. Однако, истинные колебательные формы элемента учтены не были.

В данной работе рассматривается применение ДКЭ к расчету стержневых строительных конструкций при ударных нагрузках. При исследовании удара используется гипотеза о том, что местные деформации вблизи области контакта соударяющихся тел связаны с контактной силой статическими зависимостями, а также учитываются общие деформации строительной конструкции, которые определяются методами теории колебаний [6]. Зададим ударную нагрузку как кратковременно приложенную силу в начальный момент времени. Предположим на данном этапе, что эта сила описывается синусоидой с частотой, в 10 раз превышающей первую собственную частоту  $k_1$  конструкции:

$$P(t) = \begin{cases} \sin(10k_1 t), & 0 \leq t < \frac{\pi}{10k_1}; \\ 0, & t > \frac{\pi}{10k_1}. \end{cases} \quad (1)$$

Движение стержня можно описать с помощью интеграла Дюамеля:

$$Y(x, t) = \int_0^t \dot{P}(\tau) R_1(x, t - \tau) d\tau, \quad (2)$$

где  $R_1(x, t)$  – реакция системы на внезапно приложенную единичную нагрузку. Определение реакции системы на единичную нагрузку аналогично решению задачи о движении системы по начальным условиям. В качестве начальных условий принимаются конфигурация стержня при действии единичной силы  $u_0(x)$  и нулевое распределение скоростей  $v_0(x) = 0$ .

В общем виде движение отдельного стержня определяется по формуле

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) A_n \sin(k_n t + \varphi_n), \quad (3)$$

где  $U_n(x)$  – собственные формы колебаний стержня,  $k_n$  – частота колебаний. Скорость движения точек стержня:

$$\frac{du}{dt} = v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) A_n k_n \cos(k_n t + \varphi_n). \quad (4)$$

Воспользуемся свойством ортогональности собственных форм:

$$\int_0^l u_0(x) U_m(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \varphi_n \int_0^l U_m(x) U_n(x) dx = A_m \sin \varphi_m \int_0^l [U_m(x)]^2 dx; \quad (5)$$

$$\int_0^l v_0(x) U_m(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n \cos \varphi_n \int_0^l U_m(x) U_n(x) dx = k_m A_m \cos \varphi_m \int_0^l [U_m(x)]^2 dx. \quad (6)$$

Коэффициенты  $A_m$  для стержня:

$$A_m = \frac{\int_0^l u_0(x) U_m(x) dx}{\int_0^l [U_m(x)]^2 dx}. \quad (7)$$

С учетом уравнения движения стержня, реакцию на единичную нагрузку можно записать как

$$R_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n(x) \sin(k_n t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^l u_0(x) U_n(x) dx}{\int_0^l [U_n(x)]^2 dx} U_n(x) \sin k_n t. \quad (8)$$

В качестве простейшей стержневой системы, для которой возможно получить аналитическое решение в замкнутом виде, рассмотрим консольный стержень, работающий на растяжение (рис. 1,а) и изгиб (рис. 1,б).

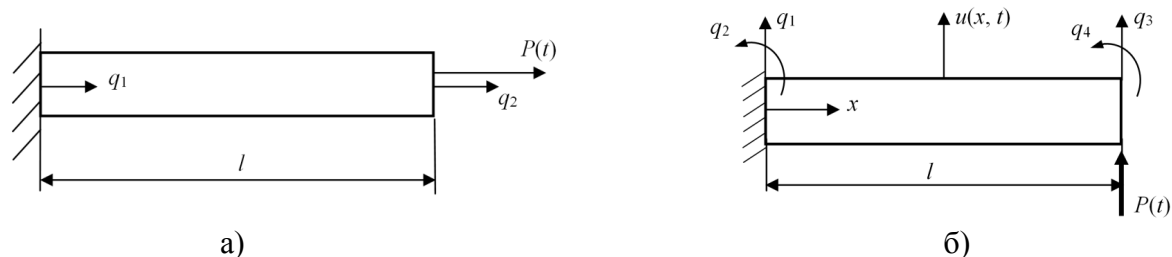


Рисунок 1 - Расчетные схемы стержней: а - работающего на растяжение; б - изгибаемого

Конфигурация стержня от единичной силы  $P_1(0) = 1$  в начальный момент времени:

$$u_0(x) = \frac{P_1(0)x}{EF} \text{ - при растяжении (см. рис. 1, а);}$$

$$u_0(x) = \frac{P_1(0)lx^2}{3EI} \text{ - при изгибе.}$$

В табл. 1 и 2 представлено сравнение результатов динамического расчета работающего на растяжение и изгибаемого стержней при указанных конфигурациях от единичной силы и нулевом распределении скоростей в начальный момент времени. Результаты получены различными методами: аналитическим, с использованием динамического конечного элемента, с использованием классического элемента (с полиномиальными функциями формы) при разном числе разбиений стержня. Для классического элемента показана относительная погрешность расчета (в %). Перемещения точки приложения удара представлены в виде отношения двух амплитуд  $A_{уд}/A_{ст}$ , где  $A_{уд}$  – амплитудное перемещение при ударе,  $A_{ст}$  – перемещение точки под действием статической единичной силы.

Таблица 1 - Амплитудные перемещения стержня, работающего на растяжение, в точке приложения силы

Параметр	№ частоты	ДКЭ (1 элемент)	МКЭ (1 элемент)	МКЭ (2 элемента)	МКЭ (4 элемента)	МКЭ (10 элементов)
$A_{уд}/A_{ст}$	1	0,811	1,000 (+23,31%)	0,854 (+5,30%)	0,821 (+1,23%)	0,812 (+0,12%)
	2	0,090	-	0,146 (+62,22%)	0,101 (+12,22%)	0,092 (+2,22%)
	3	0,032	-	-	0,045 (+40,63%)	0,034 (+6,25%)
	4	0,017	-	-	0,032 (+88,24%)	0,018 (+5,88%)

Таблица 2 - Амплитудные перемещения изгибаемого стержня в точке приложения силы

Параметр	№ частоты	ДКЭ (1 элемент)	МКЭ (1 элемент)	МКЭ (2 элемента)	МКЭ (4 элемента)	МКЭ (10 элементов)
$A_{уд}/A_{ст}$	1	2,161	2,162 (+0,05%)	2,162 (+0,05%)	2,161 (+0,00%)	2,161 (+0,00%)
	2	1,760	2,162 (+22,84%)	1,743 (-0,97%)	1,747 (-0,74%)	1,754 (-0,34%)
	3	1,025	-	1,124 (+10,74)	0,982 (-3,25%)	1,001 (-1,38%)
	4	0,728	-	0,605 (-16,90%)	0,702 (-3,57%)	0,708 (-2,75%)

Из табл. 1 видно, что в случае растяжения при небольшом числе разбиений наблюдается значительная погрешность. Это можно объяснить тем, что при малом числе разбиений классический конечный элемент плохо аппроксимирует форму колебаний стержня. Как следует из зависимости (4), форма колебаний является определяющим фактором при расчете динамики системы.

Из табл. 2 видно, что при изгибе получаются меньшие погрешности, чем при растяжении. Это можно объяснить тем, что в случае изгиба функции формы классического элемента лучше аппроксимируют истинные колебательные формы стержня (высокая точность аппроксимации достигается на первых двух частотах).

Движение точки приложения ударной нагрузки, заданной формулой (1), во времени определяется по зависимости (2) как для стержня, работающего на растяжение-сжатие, так и для изгибаемого стержня. На рис 2 и 3 представлены графики зависимости (2), полученные различными методами для случаев растяжения-сжатия и изгиба.

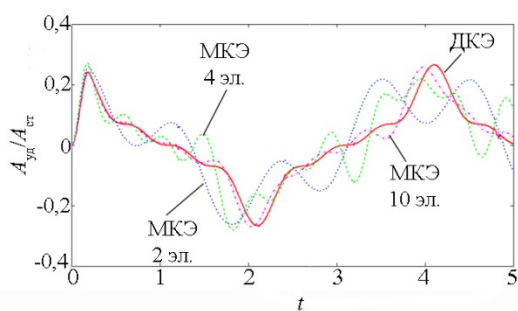


Рисунок 2 - Движение стержня, работающего на растяжение и сжатие

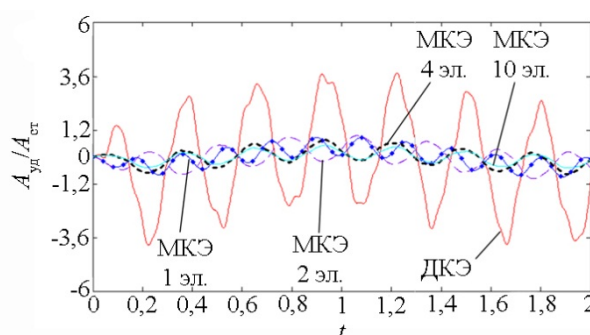


Рисунок 3 - Движение стержня, работающего на изгиб

Рис. 2 и 3 показывают движение стержня при частоте ударной нагрузки  $k_{уд}$ , превышающей первую собственную частоту стержня, согласно (1), в 10 раз. При увеличении частоты ударной нагрузки характер движения сохраняется, однако происходит уменьшение амплитуды. На рис. 4 и 5 показано движение стержня, работающего на растяжение и изгиб соответственно, при частоте удара, превышающей первую собственную в 10, 20, 50 и 100 раз.

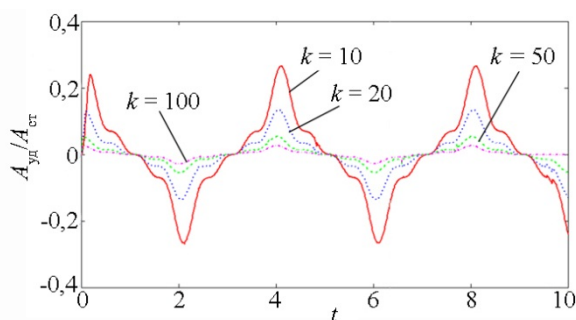


Рисунок 4 - Движение стержня, работающего на растяжение, при разной частоте удара

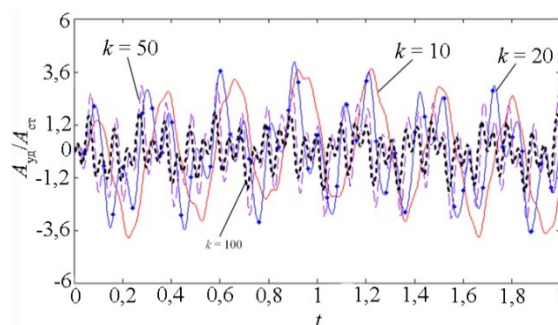


Рисунок 5 - Движение стержня, работающего на изгиб, при разной частоте удара

Рассмотрим случай, когда ударная нагрузка с частотой  $nk_1$  (где  $n > 10$ ) эквивалента по импульсу удару (1) с частотой  $10k_1$ . Тогда импульс от нагрузки (1) в начальный момент времени:

$$J = \int_0^l m_0 v(x, t) dx, \tag{9}$$

где  $m_0$  – погонная масса стержня,  $v(x,t)$  – распределение скоростей точек стержня, т.е. частная производная по времени от (2). Таким образом, импульс системы:

$$J(t) = \int_0^l m_0 \frac{\partial \int_0^t \dot{P}(\tau) R_1(x, t - \tau) d\tau}{\partial t} dx. \quad (10)$$

Движение системы от нагрузки, эквивалентной по импульсу (1), приобретаемому за время действия приложенной силы, можно записать как:

$$Y_{\text{экв}}(x, t) = \frac{J(t_{10})}{J_n(t_n)} Y_n(x, t), \quad (11)$$

где  $Y_n(x, t)$  – движение системы от нагрузки с произвольной частотой  $nk_1$ ;  $t_{10}, t_n$  – время действия нагрузки (1) и нагрузки с произвольной частотой соответственно. Коэффициент  $\frac{J(t_{10})}{J_n(t_n)}$  показывает, во сколько раз нужно повысить амплитуду нагрузки (1), чтобы получить эквивалентное по импульсу воздействие, а число  $n$  показывает, во сколько раз частота нагрузки (1) превышает первую собственную частоту конструкции.

В табл. 3 показаны значения коэффициента  $\frac{J(t_{10})}{J_n(t_n)}$  в зависимости от частоты нагрузки для стержня.

Таблица 3 - Коэффициент изменения амплитуды приложенной силы в зависимости от частоты по принципу эквивалентности импульса системы

Параметр	Растяжение				Изгиб				
	5	20	50	100	1.2	5	20	50	100
$\frac{J(t_{10})}{J_n(t_n)}$	0,096	14,31	541	8604	0,360	0,361	0,921	0,675	1,362

Из табл. 3 следует, что в случае растяжения (рис. 6, а) при увеличении частоты нагрузки требуется значительное повышение ее амплитуды, чтобы получить эквивалентное по импульсу воздействие от нагрузки с частотой  $10k_1$ . При уменьшении частоты воздействия, т.е. при приближении к первой собственной частоте стержня, а, следовательно, и к резонансу, требуется нагрузка с амплитудой, составляющей 9,6 % от амплитуды (1), чтобы получить эквивалентное по импульсу воздействие. В случае изгиба стержня сильных изменений амплитуд не требуется. Заметное увеличение амплитуды ударной нагрузки потребуется при высоких частотах внешнего воздействия (например,  $n = 100$ ) (рис. 6, б).

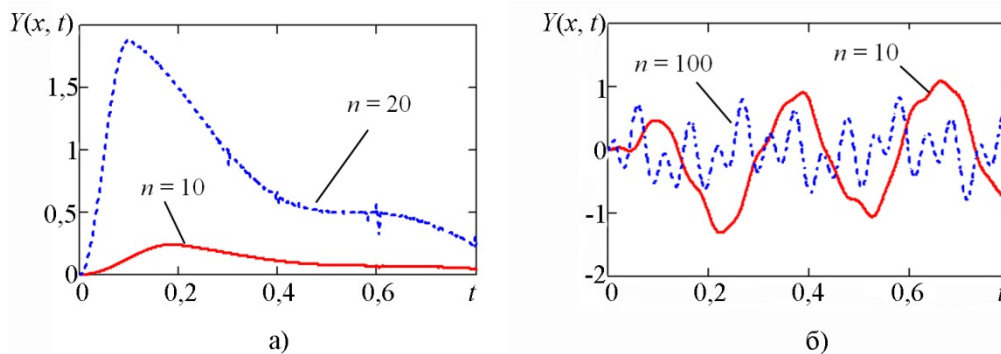


Рисунок 6 - Движение стержня от эквивалентных по импульсу сил: а – растягиваемого, б - изгибаемого

Из проведенного исследования следует, что характер движения точек системы в результате ударного воздействия зависит от характера ее собственных форм. Следовательно, №1 (69) 2017 (январь-февраль)

погрешности при определении собственных форм приводят к еще большим погрешностям при определении движения системы от ударной нагрузки, поскольку это движение интегрально зависит от собственных форм. В свою очередь, собственные формы конструкции определяются ее собственными частотами, погрешности которых могут также существенно повлиять на конечный результат.

В данной работе на примерах простых стержневых систем показана эффективность использования динамического конечного элемента в задачах удара. В случае сложных стержневых конструкций, когда аналитическими методами получить результат невозможно, динамический конечный элемент может являться универсальным средством анализа в том числе при ударном нагружении.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hodges, D.H. Free-Vibration Analysis of Rotating Beams by a Variable-order FEM [Text] / D.H. Hodges, M.J. Rutkowski // AIAA Journal. - 1981. - № 11 – 19. Pp. 1459-1466.
2. Bielawa, R.L. Rotary Wing Structural and Aeroelasticity [Text] // AIAA Education Series, 1992.
3. Gupta, K.K. Development of Block Lanczos Algorithm for Free Vibrations Analysis of Spinning Structures [Text] / K.K. Gupta, C.L. Lawson // International Journal for Numerical Method in Engineering. 1988. № 26. Pp. 1029-1037.
4. Юлдашев О.И. Гармонические базисные функции для конечных элементов высокого порядка аппроксимации [Текст] / О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева // JINR LIT Scientific report 2006-2007. Dubna: JINR, 2007. С. 317-320.
5. Юлдашев, О.И. Конечно-элементные векторные узловые базисные функции из специальных гильбертовых пространств [Текст] / О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева // JINR LIT Scientific Report 2008-2009, JINR, Dubna, 2009, С.105-108.
6. Бидерман, В.Л. Теория механических колебаний [Текст]. - М.: Высшая школа, 1980. - 408 с.
7. Соболев В.И. Дискретно-континуальные динамические системы и виброизоляция промышленных грохотов [Текст]. - Иркутск: изд-во ИрГТУ, 2002. - 202 с.
8. Колоушек, В. Динамика строительных конструкций [Текст]. - М.: Издательство литературы по строительству, 1965. - 632 с.
9. Banerjee, J.R.. Coupled Bending-Torsional Dynamic Stiffness Matrix for Beam Elements [Text] // International Journal for Numerical Methods in Engineering. - 1989. - № 28. - Pp. 1283-1298.
10. Banerjee, J.R. Dynamic stiffness formulation for structural elements: a general approach [Text] // Computers & Structures. - 1997. - № 63(1). - Pp. 101–103.
11. Lee U. Spectral Element Method in Structural Dynamics. John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd, 2009.
12. Кеглин, Б.Г. Динамический конечный элемент в строительной механике [Текст] / Б.Г. Кеглин, Е.С. Цуканова // Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. – № 4 (261). – С. 45-53.
13. Бирбраер, А.Н. Экстремальные воздействия на сооружения [Текст] / А.Н. Бирбраер, А.Ю. Роледер. – Санкт-Петербург: изд-во Политехнического университета, 2009. - 600 с.
14. Idesman, A. Accurate solutions of wave propagation problems under impact loading by standard, spectral and isogeometric high-order finite elements. Comparative study of accuracy of different space-discretization techniques [Text] / A. Idesman, D. Pham, J.R. Foley, M. Schmidt // Finite Element in Analysis and Design. - 2014. - № 88. - Pp. 67-89.

#### **Цуканова Екатерина Сергеевна**

Брянский государственный технический университет, г. Брянск  
Аспирант кафедры «Механика, динамика и прочность машин»  
E-mail: [ex-xgerm@yandex.ru](mailto:ex-xgerm@yandex.ru)

#### **Кеглин Борис Григорьевч**

Брянский государственный технический университет, г. Брянск  
Доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Механика, динамика и прочность машин»  
E-mail: [keglin@mail.ru](mailto:keglin@mail.ru)

---

E. TSUKANOVA, B. KEGLIN

### **APPLICATION OF DYNAMIC FINITE ELEMENTS IN ANALYSIS OF FRAME STRUCTURES UNDER IMPACT LOADING**

*The application of the Dynamic Finite Element (DFE) to the analysis of building frame structures at impact load is considered. The DFE stiffness and inertia matrices are constructed on the base of analytical (exact) solutions of vibration equations of a bar. At impact load research the hypothesis that local deformations near contact zone of colliding bodies are related with the contact force by static dependencies, and also the general deformations of a building structure, which are determined by vibration theory methods, are taken into account. The influence of impact load parameters on frame system response is studied on the example of a single beam, subjected to tension (compression) and bending loads. The impact load was modelled as a sine curve with various frequency, and also in the form of equivalent impulse. It is shown, that at the increase of the impact load frequency the response character remains unchanged, however, its amplitude decreases. The efficiency of DFE application in impact problems is shown by comparison with existing analytical solutions, as well as with the analysis results, obtained with usage of classical finite element with polynomial shape functions.*

**Keywords:** *finite element method; dynamic finite element, frame structures, impact load, system response, frequency, eigenmodes.*

## BIBLIOGRAPHY

1. Hodges, D.H. Free-Vibration Analysis of Rotating Beams by a Variable-order FEM [Text] / D.H. Hodges, M.J. Rutkowski // AIAA Journal. - 1981. - № 11 – 19. Pp. 1459-1466.
2. Bielawa, R.L. Rotary Wing Structural and Aeroelasticity [Text] // AIAA Education Series, 1992.
3. Gupta, K.K. Development of Block Lanczos Algorithm for Free Vibrations Analysis of Spinning Structures [Text] / K.K. Gupta, C.L. Lawson // International Journal for Numerical Method in Engineering. 1988. № 26. Pp. 1029-1037.
4. Yuldashev O.I. Garmonicheskiye bazisnyye funktsii dlya konechnykh elementov vysokogo poriyadka aproksimatsii [Tekst] / O.I. Yuldashev, M.B. Yuldasheva // JINR LIT Scientific report 2006-2007. Dubna: JINR, 2007. С. 317-320.
5. Yuldashev, O.I. Konechno-elementnyye vektornyye uzlovyye bazisnyye funktsii iz spetsial'nykh gil'bertovykh prostranstv [Tekst] / O.I. Yuldashev, M.B. Yuldasheva // JINR LIT Scientific Report 2008-2009, JINR, Dubna, 2009, S.105-108.
6. Biderman, V.L. Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy [Tekst]. - M.: Vysshaya shkola, 1980. - 408 s.
7. Sobolev V.I. Diskretno-kontinual'nyye dinamicheskiye sistemy i vibroizolyatsiya promyshlennykh grokhotov [Tekst]. - Irkutsk: izd-vo IrGTU, 2002. - 202 s.
8. Koloushek, V. Dinamika stroitel'nykh konstruksiy [Tekst]. - M.: Izdatel'stvo literatury po stroitel'stvu, 1965. - 632 s.
9. Banerjee, J.R.. Coupled Bending-Torsional Dynamic Stiffness Matrix for Beam Elements [Text] // International Journal for Numerical Methods in Engineering. - 1989. - № 28. - Pp. 1283-1298.
10. Banerjee, J.R. Dynamic stiffness formulation for structural elements: a general approach [Text] // Computers & Structures. - 1997. - № 63(1). - Pp. 101–103.
11. Lee U. Spectral Element Method in Structural Dynamics. John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd, 2009.
12. Keglina, B.G. Dinamicheskiy konechnyy element v stroitel'noy mekhanike [Tekst] / B.G. Keglina, Ye.S. Tsukanova // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. – 2015. – № 4 (261). – S. 45-53.
13. Birbrayer, A.N. Ekstremal'nyye vozdeystviya na sooruzheniya [Tekst] / A.N. Birbrayer, A.YU. Roleder. – Sankt-Peterburg: izd-vo Politekhnicheskogo universiteta, 2009. - 600 s.
14. Idesman, A. Accurate solutions of wave propagation problems under impact loading by standard, spectral and isogeometric high-order finite elements. Comparative study of accuracy of different space-discretization techniques [Text] / A. Idesman, D. Pham, J.R. Foley, M. Schmidt // Finite Element in Analysis and Design. - 2014. - № 88. - Pp. 67-89.

### **E. Tsukanova**

Bryansk State Technical University (BSTU), Bryansk  
Post graduate of the department of Mechanics, Dynamics and Strength of Machines  
E-mail: [ex-xgerm@yandex.ru](mailto:ex-xgerm@yandex.ru)

### **B. Keglina**

Bryansk State Technical University (BSTU), Bryansk  
Doctor of Technical Sciences, professor,  
professor of the department of Mechanics, Dynamics and Strength of Machines  
E-mail: [keglina@mail.ru](mailto:keglina@mail.ru)

УДК 624.011

ВОДЯННИКОВ М.А., КАШЕВАРОВА Г.Г.

## ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ АГРЕССИВНОЙ СРЕДЫ НА ДОЛГОВЕЧНОСТЬ КЛЕЕНЫХ ДЕРЕВЯННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

*Приведен анализ технического состояния строительных конструкций из клееной древесины, а также стальных деталей, эксплуатируемых в агрессивной среде. Рассмотрены результаты долгосрочных наблюдений за техническим состоянием и динамикой развития коррозионных процессов строительных материалов и конструкций. Описаны процессы химической и электрохимической коррозии пористых и сплошных материалов, влияние содержания солей на прочность и долговечность древесины, динамика развития коррозионных процессов в стальных конструкциях. Составлен прогноз развития коррозии в стальных накладных деталях существующих складов арочного очертания по результатам наблюдений за опытными образцами. Сделаны выводы об эксплуатационной надежности строительных конструкций и деталей их сопряжения. Рассмотрены перспективы замены стальных конструкций композитными материалами, со сравнимыми по совокупности свойств прочностными характеристиками.*

**Ключевые слова:** коррозия, клееные деревянные конструкции, сталь, процесс, надежность, эксплуатация, долговечность, агрессия, среда, механические свойства, наблюдение, строительные материалы, древесина.

### 1. Введение

В Российской Федерации накоплен богатый опыт эксплуатации, производства и проектирования большепролетных конструкций с применением клееной древесины (см. рисунок 1). Широкое распространение клееные деревянные конструкции получили при производстве складов хлористого калия, как на территории Верхнекамского месторождения калийно-магниевых солей Пермского края, так и в ближнем (Белоруссия, Узбекистан) и дальнем (Германия, Канада, США, Бразилия, Иордания и др.) зарубежье. Уникальные свойства и структура древесины позволяют применять ее в условиях химически агрессивных сред, при которых традиционные сталь и бетон быстро исчерпывают свои характеристики несущей способности. По данным эксплуатационных служб, периодичность ремонтов в среднем составляет 5-7 лет для стальных конструкций и 10-15 лет для конструкций из кирпича и железобетона. Это объясняется тем, что существующие составы антикоррозионной защиты не обеспечивают требуемой долговечности конструкции.

Большой опыт практического использования большепролетных арочных складов из клееной древесины для хранения минеральных удобрений накоплен на калийных предприятиях Пермского края [1]. Срок эксплуатации деревянных конструкций в условиях солевой агрессии составляет более 50 лет без выполнения ремонтных мероприятий. Зарубежный опыт подтверждает актуальность применения древесины в агрессивной среде. Склады хранения соли навалом [2] (Potassium warehouses) используют все компании рынка, так или иначе связанные с циклом производства и хранения руды и готового продукта.

В данной статье рассмотрено влияние газовой среды калийного предприятия на основные конструктивные элементы большепролетных арочных складов и выполнен анализ процессов коррозии строительных материалов по результатам периодического наблюдения и обследования.



Рисунок 1 - Стрельчатый склад пролетом 45 метров

## 2. Результаты наблюдений

За весь срок службы клееных деревянных конструкций не было выявлено ни одного случая аварий, связанных с химической коррозией древесины. Чего, к сожалению, нельзя сказать о коррозии стальных элементов узлов крепления основных несущих конструкций. Обобщение материалов испытаний образцов материалов, мониторинга и экспертных заключений позволяют прогнозировать изменение состояния строительных материалов и конструкций.

Химический состав газовой среды при добыче и хранении калийных руд (см. таблицу 1) агрессивен по отношению ко всем применяемым ныне строительным материалам.

Таблица 1 – Химический состав газовой среды

Компоненты						
MgCl <sub>2</sub>	KCl	NaCl	CaSO <sub>4</sub>	H <sub>2</sub> O	Cl-	H <sub>2</sub> O
Содержание, %						
Руда						
0,13	28,53	67,27	2,05	1,72	0,15	0,15
Готовый продукт						
0,04	95	4	0,55	0,2	0,11	0,1

Степень агрессивного воздействия на конструкции определяется химическим составом среды и характером воздействия ее компонентов на конструкции из разных материалов при определенном температурно-влажностном режиме, и классифицируется как слабоагрессивная, среднеагрессивная и сильноагрессивная [3, 4]. Для усредненного состава продуктов, приведенного в таблице 1, в условиях средней полосы России, степень агрессивного воздействия выглядит следующим образом (см. таблицу 2).

Таблица 2 – Степень воздействия среды на материал

Характеристика среды		Степень воздействия на материал			
Состав среды	Зона влажности	Железобетон	Сталь	Глиняный кирпич	Древесина
Аэрозоли солей натрия и калия	Нормальная	Средняя	Сильная	Средняя	Слабая

Разрушение капиллярно-пористых материалов, таких как бетон, кирпич и древесина происходит вследствие физической коррозии, вызванной постепенным проникновением насыщенных растворов магния и калия внутрь материала, а затем по мере изменения температуры и влажности происходит обратный процесс кристаллизации [5]. Давление при этом может достигать от 4 до 10 МПа. Этого давления достаточно для поверхностной мацерации (разрыва) материала.

Коррозионные процессы стальных конструкций в тех же условиях вызваны образованием конденсата растворов калия и магния на поверхности металла. При этом в месте контакта со сталью образуются микрогальванические элементы, являющиеся активнейшими катализаторами процессов электрохимической коррозии. Несущая способность стальных конструкций неизбежно снижается в результате постепенного уменьшения поперечного сечения элемента.

Рассмотрим влияние содержания солей и влажности на прочность древесины и стали [6, 7]. С целью установления степени насыщенности древесины солями, из полуарок эксплуатируемых складов были отобраны опытные образцы. По данным лабораторных испытаний, установлено, что при максимальном насыщении хлористым калием, содержание солей в опытных образцах не превышало 25 %, а глубина насыщенного слоя после 40 лет эксплуатации не превышает 2...5 мм, и на глубине 15 мм снижается до 6...8 % (см. рисунок 2).

Прочностные характеристики клееных деревянных образцов насыщенных солевым раствором снижаются в зависимости от количества раствора в образце. Относительное снижение прочности образцов при изгибе, а также при сжатии вдоль волокон по результатам опытов, приведены на рисунке 3.

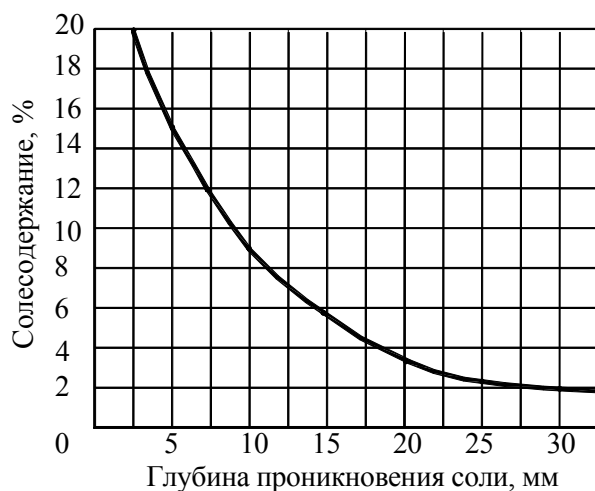


Рисунок 2 – Распределение соледержания по глубине сечения

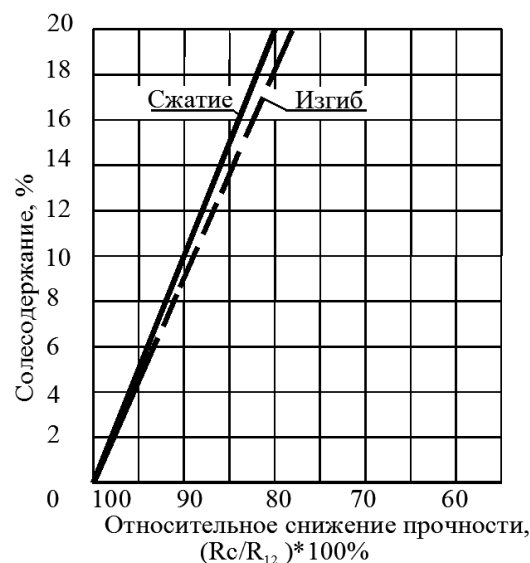


Рисунок 3 – Снижение относительной прочности древесины в зависимости от содержания соли

Таким образом, наибольшее снижение прочности древесины в агрессивной среде составляет от 20 до 25 %.

Проведем для сравнения аналогичное исследование кривой зависимости коррозионного повреждения стальных накладных деталей, применяемых на сегодняшний день во всех узловых соединениях деревянных конструкций (см. рисунки 4 и 5). По графику видно, что кривые, описывающие зависимости коррозионного износа от времени наиболее точно описываются полиномами 3й и 4й степени. Очевидно, что стальные накладки будут иметь сквозные коррозионные повреждения после ~60 лет эксплуатации. Однако дефицит несущей способности,

при котором возникнет вероятность обрушения конструкции, произойдет намного раньше этого срока.

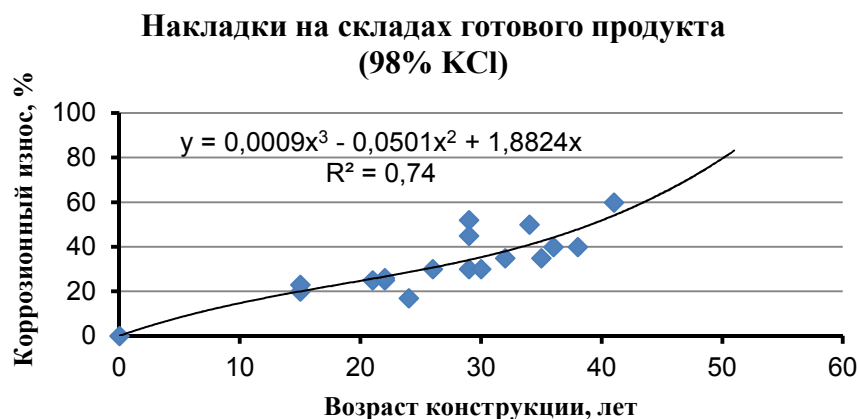


Рисунок 4 – Зависимость коррозионного износа от возраста накладок на складах готового продукта

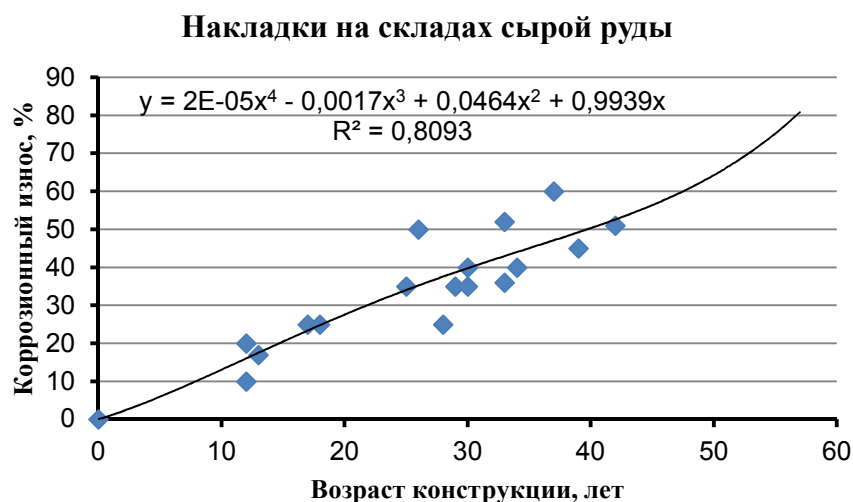


Рисунок 5 – Зависимость коррозионного износа от возраста накладок на складах сырой руды

Следует отметить, что химический состав продукта оказывает влияние на скорость протекания коррозионных процессов. Из графиков видно, что склады с большим содержанием хлористого калия (склады готового продукта) более подвержены влиянию агрессивной среды.

### 3. Заключение

Коррозионные процессы в различных строительных материалах, применяемых при возведении объектов в условиях химической агрессии неодинаковы. Эксплуатационная надежность конструкций из древесины значительно выше других материалов, однако повсеместное применение стальных соединительных деталей, нагелей, шурупов, гвоздей и накладок в узлах сопряжения накладывает серьезные ограничения на срок службы сооружений и требует постоянного контроля со стороны собственника объекта либо ответственных служб. Исследования перспективных строительных материалов, способных заменить либо в значительной степени снизить количество металлических деталей позволят продлить срок службы объектов, расположенных в зоне негативного влияния агрессивной среды [8]. Одним из возможных направлений развития мысли видится применение композитных материалов, стойких к химической агрессии, и в то же время обладающих сравнимыми по совокупности свойств со сталью [9, 10].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калугин, А. В. Деревянные конструкции: учебное пособие для вузов [Текст]. – М.: Издательство АСВ, 2008. – 286 с.
2. Гапюев, М. М. Конструкции из дерева и пластмасс [Текст]. – М.: Издательство АСВ, 2004. – 440 с.
3. СП 64.13330.2011. Актуализированная редакция СНиП II-25-80 «Деревянные конструкции». – М.: ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 2011.
4. СП 16.13330.2011. Актуализированная редакция СНиП II-23-81 «Стальные конструкции». – М.: ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 2011.
5. Арленинов, Д. К. Конструкции из дерева и пластмасс [Текст]. – М.: Издательство АСВ, -2002 г.
6. Иванова, Е. К. Клееные деревянные конструкции. Опыт строительства за рубежом [Текст]. – М.: Госстройиздат, 1961.
7. Хрулев, В. М. Деревянные конструкции и детали [Текст]. – М.: Стройиздат, 1983. – 288 с.
8. Перепелкин, К. Е. Химические волокна: развитие производства, методы получения, свойства, перспективы [Текст]. – СПб.: Издание СПГУТД, 2008. – 354 с.
9. Дорожная карта «Использование нанотехнологии в производстве углеродных волокон и продуктов на их основе» / ГК «РОСНАНОТЕХ», 2010.
10. Параничева, Н.В. Усиление строительных конструкций с помощью углеродных композиционных материалов [Текст] / Н.В. Параничева, Т.В. Назмеева // Инженерно-строительный журнал, 2010, – №2, С.19-22.

### **Водяников Михаил Алексеевич**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь  
Аспирант кафедры «Строительные Конструкции и Вычислительная Механика»  
E-mail: [vodyannikov@mail.ru](mailto:vodyannikov@mail.ru)

### **Кашеварова Галина Геннадьевна**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь  
Доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой «Строительные конструкции и вычислительная механика»  
E-mail: [ggkash@mail.ru](mailto:ggkash@mail.ru)

---

M. VODIANNIKOV, G. KASHEVAROVA

## ASSESSMENT OF THE IMPACT OF AN AGGRESSIVE ENVIRONMENT ON THE LAMINATED WOODEN STRUCTURES LIFECYCLE

*The article deals with the technical condition of glued wood building structures with steel elements, which are subjected aggressive impact. It is presented results of long-term observations over the technical condition and development dynamics of corrosion processes of building materials and structures. It is described the processes of chemical and electrochemical corrosion of the porous and solid materials, the effect of salt content on strength and durability of wood, the dynamics of the corrosion processes in steel structures. We present the forecast for the development of corrosion in steel elements of existing warehouses arched shape according to the results of observation of samples. Conclusions are made about the operational reliability of building structures and details of their pairing. The prospects are estimated for replacement of steel structures with composite materials, with comparable in the aggregate properties strength characteristics.*

**Keywords:** corrosion, laminated wooden structures, steel, process, reliability, exploitation, durability, aggressive environment, mechanical properties, observation, materials, timber.

## BIBLIOGRAPHY

1. Kalugin, A. V. Derevyannyye konstruksii: uchebnoye posobiye dlya vuzov [Tekst]. – М.: Izdatel'stvo ASV, 2008. – 286 s.
2. Gappoyev, M. M. Konstruksii iz dereva i plastmass [Tekst]. – М.: Izdatel'stvo ASV, 2004. – 440 s.

3. SP 64.13330.2011. Aktualizirovannaya redaktsiya SNIp II-25-80 «Derevyannyye konstruksii». – M: TSNIISK im. V.A. Kucherenko, 2011.
4. SP 16.13330.2011. Aktualizirovannaya redaktsiya SNIp II-23-81 «Stal'nyye konstruksii». – M: TSNIISK im. V.A. Kucherenko, 2011.
5. Arleninov, D. K. Konstruksii iz dereva i plastmass [Tekst]. –M.: Izdatel'stvo ASV, -2002 g.
6. Ivanova, Ye. K. Kleyenyye derevyannyye konstruksii. Opyt stroitel'stva za rubezhom [Tekst]. – M.: Gosstroyizdat, 1961.
7. Khrulev, V. M. Derevyannyye konstruksii i detali [Tekst]. –M.: Stroyizdat, 1983. - 288 s.
8. Perepelkin, K. Ye. Khimicheskiye volokna: razvitiye proizvodstva, metody polucheniya, svoystva, perspektivy [Tekst]. – SPb.: Izdaniye SPGUTD, 2008. – 354 s.
9. Dorozhnaya karta «Ispol'zovaniye nanotekhnologii v proizvodstve uglerodnykh volokon i produktov na ikh osnove» / GK «ROSNANOTEKH», 2010.
10. Parancheva, N.V. Usileniye stroitel'nykh konstruksiy s pomoshch'yu uglerodnykh kompozitsionnykh materialov [Tekst] / N.V. Parancheva, T.V. Nazmeyeva // Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal, 2010, – №2, S.19-22.

**M. Vodiannikov**

Perm National Research Polytechnic University, Perm  
graduate student of the Department of Building constructions and Computational Mechanics  
E-mail: [vodyannikov@mail.ru](mailto:vodyannikov@mail.ru)

**G. Kashevarova**

Perm National Research Polytechnic University, Perm  
Doctor of techn. sciences, professor, head of department of building constructions and computational mechanics  
E-mail: [ggkash@mail.ru](mailto:ggkash@mail.ru)

**Уважаемые авторы!**  
**Просим Вас ознакомиться с основными требованиями**  
**к оформлению научных статей**

- Представляемый материал должен быть **оригинальным, не опубликованным ранее** в других печатных изданиях.
- Объем материала, предлагаемого к публикации, измеряется страницами текста на листах **формата А4** и содержит от **4 до 9 страниц**; все страницы рукописи должны иметь сплошную нумерацию.
- Статья должна быть набрана шрифтом Times New Roman, размер 12 pt с одинарным интервалом, текст выравнивается по ширине; абзацный отступ – 1,25 см, правое поле – 2 см, левое поле – 2 см, поля внизу и вверху – 2 см.
- Статья предоставляется в **1 экземпляре** на бумажном носителе и в электронном виде (по электронной почте или на любом электронном носителе).
- В одном сборнике может быть опубликована только **одна статья одного автора**, включая соавторство.
- **Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.**
- Если статья возвращается автору на доработку, исправленный вариант следует прислать в редакцию повторно, приложив письмо с ответами на замечания рецензента. Доработанный вариант статьи рецензируется и рассматривается редакционной коллегией вновь. Датой представления материала считается дата поступления в редакцию окончательного варианта исправленной статьи.
- Аннотации всех публикуемых материалов, ключевые слова, информация об авторах, списки литературы будут находиться в свободном доступе на сайте соответствующего журнала и на сайте Российской научной электронной библиотеки – РУНЭБ (Российский индекс научного цитирования).

**В тексте статьи** не рекомендуется применять:

- обороты разговорной речи, техницизмы, профессионализмы;
- для одного и того же понятия различные научные термины, близкие по смыслу (синонимы), а также иностранные слова и термины при наличии равнозначных слов и терминов в русском языке;
- произвольные словообразования;
- сокращения слов, кроме установленных правилами русской орфографии, соответствующими стандартами.
- Сокращения и аббревиатуры должны расшифровываться по месту первого упоминания (вхождения) в тексте статьи.

**Обязательные элементы:**

- **заглавие (на русском и английском языке)** публикуемого материала должно быть точным и емким, слова, входящие в заглавие, должны быть ясными сами по себе, а не только в контексте; следует избегать сложных синтаксических конструкций, новых словообразований и терминов, а также слов узкопрофессионального и местного значения;
- **аннотация (на русском и английском языке)** описывает цели и задачи проведенного исследования, а также возможности его практического применения, указывает, что нового несет в себе материал; рекомендуемый объем – не менее 100 слов;
- **ключевые слова (на русском и английском языке)** – это текстовые метки, по которым можно найти статью при поиске и определить предметную область текста; обычно их выбирают из текста публикуемого материала, достаточно 5-10 ключевых слов.
- **список литературы**, на которую автор ссылается в тексте статьи.

Право использования произведений предоставлено авторами на основании п. 2 ст. 1286 Четвертой части Гражданского Кодекса Российской Федерации.

**С полной версией требований к оформлению научных статей**  
**Вы можете ознакомиться на сайте [www.build.oreluniver.ru](http://www.build.oreluniver.ru)**

---

*Учредитель журнала*  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»  
(ФГБОУ ВО «ОГУ имени И.С. Тургенева»)

*Адрес учредителя журнала*  
302026, Орловская область, г. Орел, ул. Комсомольская д. 95

*Контактные данные учредителя*  
+7 (4862) 777-318  
[www.oreluniver.ru](http://www.oreluniver.ru)  
E-mail: [rector@oreluniver.ru](mailto:rector@oreluniver.ru)

*Адрес редакции*  
302006, г. Орел, ул. Московская, 77.

*Контактные данные редакции*  
+7 (4862) 73-43-49  
[www.build.oreluniver.ru](http://www.build.oreluniver.ru)  
E-mail: [str\\_and\\_rek@mail.ru](mailto:str_and_rek@mail.ru)

Материалы статей печатаются в авторской редакции

Право использования произведений предоставлено авторами на основании  
п. 2 ст. 1286 Четвертой части Гражданского Кодекса Российской Федерации

Технический редактор С.Ю. Савин  
Компьютерная верстка С.Ю. Савин

Подписано в печать 24.02.2017 г.  
Формат 70×108 1/16. Печ. л. 6,6.  
Тираж 400 экз.  
Заказ № \_\_\_\_\_

Отпечатано с готового оригинал-макета на полиграфической  
базе ФГБОУ ВО «ОГУ имени И.С. Тургенева»  
302030, г. Орел, ул. Московская, 65.