

## К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННО – ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ МЕТОДАМИ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

КОЛЧУНОВ ВЛ. И., ДЕМЬЯНОВ А. И.

Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Россия

**Аннотация.** Предложен новый подход к определению касательных напряжений кручения для стержней произвольного поперечного сечения, базирующийся на упрощенных предположениях сопротивления материалов. Его особенность заключается в аппроксимации прямоугольных и любых сложных поперечных сечений железобетонных конструкций с помощью их разбиения на квадраты с вписанными в них кругами, соединенными между собой в единую монолитную фигуру в большом круге, описанном вокруг любого поперечного сечения. В пределах большого и каждого  $i$ -ого круга становится справедливой зависимость касательных напряжений кручения от расстояния до центра рассматриваемого круга. Максимальные напряжения согласно предлагаемой методике достигаются в серединах длинных сторон прямоугольника, что соответствует их действительному распределению. При этом такая модель позволяет снять вопрос о необходимости использования специальных таблиц для расчета не только в упругой стадии. Она также позволяет отделить напряженно-деформированное состояние в целом наборе круглых сечений от дополнительного поля, связанного с депланацией прямоугольного сечения. Авторами откорректированы и существенно дополнены зависимости для учета депланации стержня прямоугольного поперечного сечения, вводится понятие и предложены зависимости для учета местной депланации. Акцентируется внимание на физической сути продольных перемещений, обусловленных депланацией, проводится аналогия с элементарными перемещениями, вызываемыми сдвиговыми усилиями. Предложенная методика позволяет учитывать концентрацию угловых деформаций в углах и других резко изменяющихся геометрических параметрах как относительно плоскости поперечного сечения, так и в направлении продольной оси стержня. Малые  $i$ -тые круги, попадающие в контур поперечного сечения стержня, служат в качестве “конденсирующих”, - именно в них сосредотачиваются элементы жесткости и эффективные значения параметров напряженно-деформированного состояния, которые обеспечивают сопротивление поперечного сечения стержня кручению. Трансформационные переходы от цилиндрической к декартовой системе координат и привлечение местных систем координат, позволили максимально упростить полученные зависимости. Разделение расчетных параметров на соответствующие составляющие напряженно – деформированного состояния предоставляет возможность их глубокого анализа.

**Ключевые слова:** кручение, напряженно–деформированное состояние, сопротивление материалов, произвольное сечение, предлагаемая методика, депланация, концентрация, конденсация.

## TO DETERMINATION OF STRESS-STRAIN STATE FOR A ROD OF ARBITRARY CROSS SECTION UNDER TORSION USING MECHANICS OF MATERIALS

KOLCHUNOV VL. I., DEMYANOV A.I

South-West State University, Kursk, Russia

**Abstracts.** A new approach to the determination of tangential torsional stresses for rods of arbitrary cross section, based on simplified assumptions of material resistance, is proposed. Its peculiarity lies in the approximation of rectangular and any complex cross-sections of reinforced concrete structures by breaking them into squares with circles inscribed in them, interconnected into a single monolithic figure in a large circle described around any cross-section. Within each  $i$ -th circle, the dependence of the tangential torsional stresses on the distance to the center of the circle in question becomes

*valid. The maximum stresses according to the proposed method are achieved in the middle of the long sides of the rectangle, which corresponds to their actual distribution. At the same time, this model allows us to remove the question of the need to use special tables for the calculation not only in the elastic stage. It also allows you to separate the stress-strain state in the whole set of circular sections from the additional field associated with the rectangular section. The authors corrected and significantly added dependencies to account for the deplanation of a rod of rectangular cross-section, introduced the concept and suggested dependencies to account for local deplanation. The attention is focused on the physical essence of the longitudinal displacements caused by the deplanation; an analogy is drawn with the elementary displacements caused by shear forces. The proposed method allows to take into account the concentration of angular deformations in the corners and other sharply changing geometric parameters both relative to the cross-section plane and in the direction of the longitudinal axis of the rod. Small  $i$ -th circles that fall into the contour of the cross section of the rod serve as "condensing" - it is in them that the stiffening elements and effective values of the parameters of the stress-strain state, which provide the resistance of the cross-section of the rod to torsion, concentrate. Transformational transitions from the cylindrical to Cartesian coordinate systems and the involvement of local coordinate systems, made it possible to simplify the dependencies as much as possible. The division of the calculated parameters into the corresponding components of the stress - strain state provides the possibility of their in-depth analysis.*

**Keywords:** *torsion, stress – strain state, resistance of materials, arbitrary cross section, proposed method, deplanation, concentration, condensation.*

## **Введение**

Из сопротивления материалов известно, что задачу определения напряжений и деформации при кручении стержни некруглого поперечного сечения нельзя решить методами, базирующимися на упрощенных предпосылках этой экспериментально-теоретической науки, являющейся одним из разделов строительной механики. Такая задача обычно решается с использованием методов теории упругости и пластичности. Тем не менее, использование рабочих гипотез сопротивления материалов применительно к стержневым конструкциям весьма привлекательно. В связи с этим возникает резонный вопрос о том, на сколько категорично утверждение о том, что нельзя решить обозначенную выше задачу методами сопротивления материалов? Все ли подходы [1-22] и резервы при этом исчерпаны?

## **Расчетная модель**

В этой статье авторы делают попытку получить такое решение, оставаясь в рамках гипотез сопротивления материалов. Для решения задачи будем аппроксимировать различные сечения стержней с помощью разбивки их на малые квадраты с последующим вписыванием в эти квадраты кругов. Тогда применительно к этим малым кругам, составляющих поперечное сечение стержней любой формы, будут справедливы формулы сопротивления материалов, полученные для круглых поперечных сечений. При этом необходимо решить **три сопутствующие задачи**: **во – первых**, необходимо учесть депланацию поперечных сечений стержней некруглой произвольной формы с помощью какой – то рекуррентной формулы; **во – вторых**, корректно просуммировать элементарные круги с помощью которых аппроксимируется поперечное сечение любой формы с распределением, приходящихся на них, крутящих моментов; **в – третьих**, необходимо учесть наличие концентрации деформаций в зоне входящих углов поперечного сечения произвольной формы и местной депланации в углах и других резко изменяющихся геометрических параметрах, а также ее «возврата» в местах, соседствующих с квадратами с нулевой жесткостью.

Решение **первой** из этих задач предложено авторами в работе [20]. При этом основные поправки будут касаться **депланации** некруглых поперечных сечений, например, прямоугольных или, состоящих из набора прямоугольников (заметим, что квадраты, на которые разбивается для выполнения процедуры предлагаемого расчета, также являются их частным случаем). Зависимости для учета депланации предложены авторами в работе [20]. Принимая ее во внимание, перемещение, обусловленное депланацией поперечного сечения, запишется в виде:

$$w = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \cdot f(y, z) \cdot f_2(x) = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \cdot \frac{a_*^2 - b_*^2}{a_*^2 + b_*^2} \cdot y \cdot z \cdot l \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (1)$$

Здесь

$$f(y, z) = \beta_t \cdot y \cdot z, \quad (2)$$

$$\beta_t = \frac{a_*^2 - b_*^2}{a_*^2 + b_*^2}. \quad (3)$$

Таким образом, перемещение  $W$  является сложной функцией, зависящей от координат  $y, z, x$ .

Физическая суть перемещений  $W$  заключается в том, что они обусловлены касательными напряжениями кручения и вызываемыми ими деформациями сдвига (здесь можно провести аналогию с перемещениями  $\Delta_Q$ , вызываемыми поперечной силой [16]). Абсолютным перемещениям депланации  $W$  будут соответствовать относительные деформации сдвига  $\gamma_{zx}$ , вызываемые касательными напряжениями кручения  $\tau_t$ .

При отыскании относительных угловых (сдвиговых) деформаций депланации  $\gamma_{d,zx}$  и  $\gamma_{d,yx}$  с использованием зависимостей Коши, они примут вид:

$$\gamma_{d,zx} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z} + 0 = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\gamma_{d,yx} = \gamma_{yx} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} + 0 = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (5)$$

где  $w, v, \omega$  – перемещения по направлению осей  $x, y$  и  $z$ , соответственно.

Применительно к модели депланации, описываемой формулой (1), перемещения  $v = \omega = 0$ . В итоге будем иметь:

$$\gamma_{dep,yx} = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \cdot \frac{a_*^2 - b_*^2}{a_*^2 + b_*^2} \cdot l \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot z \leq \gamma_{dep,yx,ul}, \quad (6)$$

$$\gamma_{dep,zx} = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \cdot \frac{a_*^2 - b_*^2}{a_*^2 + b_*^2} \cdot l \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot y \leq \gamma_{dep,zx,ul}, \quad (7)$$

где  $\gamma_{dep,yx,ul}$  и  $\gamma_{dep,zx,ul}$  – составляющие предельных относительных угловых деформаций депланации.

Составляющие касательных напряжений, обусловленных депланацией, определяются из зависимостей:

$$\tau_{dep,yx} = \gamma_{dep,yx} \cdot G = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \cdot \frac{a_*^2 - b_*^2}{a_*^2 + b_*^2} \cdot l \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot z \cdot G \leq \tau_{dep,yx,ul}, \quad (8)$$

$$\tau_{dep,zx} = \gamma_{dep,zx} \cdot G = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \cdot \frac{a_*^2 - b_*^2}{a_*^2 + b_*^2} \cdot l \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot y \cdot G \leq \tau_{dep,zx,ul}, \quad (9)$$

где  $\tau_{dep,yx,ul}$  и  $\tau_{dep,zx,ul}$  – составляющие предельных касательных напряжений депланации.

Предлагаемая методика при оценке сопротивления железобетонных конструкций прямоугольного и сложных поперечных сечений (состоящих из набора прямоугольников) строится на том, что вокруг прямоугольного или любого более сложного поперечного сечения описывается большой круг, по которому условно «рассеивается» фигура поперечного

сечения. При этом все поле большого круга разбивается на ряд квадратов, которые впоследствии заменяются вписанными в них малыми кругами. Малые круги, которые попали в зону, ограниченную контуром поперечного сечения стержня, служат в качестве «конденсирующих», - именно в них сосредотачиваются элементы жесткости и эффективные значения параметров напряженно – деформированного состояния, которые обеспечивают сопротивление поперечного сечения стержня кручению.

Ранее авторами была рассмотрена подобная задача только с одним рядом разбивки по ширине прямоугольного сечения на малые круги, связывая напряженно – деформированное состояние этих малых кругов с различными типами пространственных трещин. Другими словами, различные типы трещин, имеющих место снизу, в середине и сверху поперечного сечения, попадали именно в эти малые круги соответственно их расположению по высоте прямоугольного сечения, - нижний круг использовался, как правило, для трещин первого типа, средний – для второго и третьего типа [20].

Теперь, проанализировав все недостатки отмеченного разбиения, авторы несколько усовершенствовали предлагаемый подход. А именно для решения обозначенной выше **второй** задачи, опишем вокруг поперечного сечения стержня произвольной формы круг, который полностью включает в себя любое поперечное сечение (рис. 1 и рис. 2), - фигура А- В – С - D для прямоугольного сечения, рис. 1, а; фигура А - В – С – D – К – D – J – E – I – P – G – H для двутаврового сечения, рис. 1, б; - фигура А- В – С – D – I - F для Г - образного сечения, рис. 2, а; - фигура А- В – С – D – I – F – G - H для коробчатого сечения, рис. 2, б.

Заметим, что приведенные фигуры для наиболее характерных поперечных сечений не исчерпывают всего их многообразия, на которые распространяется предлагаемый подход, и служат лишь в качестве конкретных примеров. Таким образом, из рис. 1 и 2 следует, что вокруг поперечных сечений любой формы можно описать круг, геометрический **центр которого совпадает с геометрическим центром поперечного сечения**. В пределах этого круга выполняется разбивка фигуры поперечного сечения и дополнительной площади, охватываемой кругом, на квадраты, с вписанными в них, малыми кругами. Разбивку на квадраты с вписанными в них кругами, формально выполняем на всей площади охватываемой большим кругом для получения рекуррентных зависимостей, принимая крутильные моменты инерции, площади и жесткости в квадратах, расположенных за пределами поперечного сечения стержня, равными нулю.

Будем различать среди кругов, входящих в поперечное сечение, круги, которые расположены в угловых зонах этого сечения (позиция 1 на рис. 1 и 2) и круги, расположенные во входящих внутренних углах сечения (позиция 2 на рис. 1 и 2). При этом, если напряженно-деформированное состояние кругов, обозначенных позицией 1, в соответствии с гидродинамической аналогией близко к нулю, то в напряженно-деформированное состояние кругов, обозначенных позицией 2, необходимо вводить коэффициенты, учитывающие здесь концентрацию.

Теперь применительно к большому кругу, включающему в себя в том числе и поперечное сечение произвольной формы (рис. 1 и 2), можно использовать формулы сопротивления материалов для круглых стержней. Такие формулы справедливы и для каждого из малых кругов, на которые, в свою очередь, разбит большой круг. В результате предоставляется возможным записать рекуррентные формулы применительно к расчету стержней произвольного поперечного сечения с введением необходимых поправочных коэффициентов.

Формулы для определения касательных напряжений кручения  $\tau_t$  в соответствующем круге поперечного сечения, расположенном на расстоянии  $x$  от опоры, записывается в цилиндрической и декартовой системе координат:

$$\tau_{t,A} = \tau_{t,A,spr} + \tau_{t,i,A,cond} = \frac{M_t}{I_t} \cdot r_{j,A} + \frac{M_{t,i}}{I_{t,i}} \cdot r_{i,A} = \frac{M_t}{I_t} \cdot \sqrt{y_{j,A}^2 + z_{j,A}^2} + \frac{M_{t,i}}{I_{t,i}} \cdot \sqrt{y_{i,A}^2 + z_{i,A}^2} \leq \tau_{t,u}, \quad (10)$$

Здесь  $r_{j,A}$ ,  $y_{j,A}$ ,  $z_{j,A}$  – расстояния от центра большого круга, описанного вокруг поперечного сечения стержня до произвольной точки А, находящейся в малом j-том круге, в которой определяются значения касательных напряжений кручения  $\tau_t$  и её координаты в общей системе координат YOZ, соответственно;  $M_t$  – крутящий момент, действующий в поперечном сечении стержня;  $I_t$  – суммарный полярный момент инерции поперечного сечения стержня, аппроксимированного малыми квадратами - кругами;  $r_{i,A}$ ,  $y_{i,A}$ ,  $z_{i,A}$  – расстояния от центра малого i-того круга до произвольной точки А, находящейся в малом i-том круге, в которой определяются значения касательных напряжений кручения  $\tau_t$  и её координаты в местной системе координат  $Y_iO_iZ_i$ , соответственно;  $M_{t,i}$  – крутящий момент, приходящийся на i-тый малый круг, на которые разбито поперечное сечение стержня;  $I_{t,i}$  – полярный момент инерции, приходящийся на i-тый малый круг, на которые разбито поперечное сечение стержня (складывается из собственного полярного момента инерции и добавочного, равного  $r_j^2 \cdot A_i$ );  $\tau_{t,u}$  – предельные значения касательных напряжений кручения.

В формуле (10) суммарный полярный момент инерции сечения, состоящего из прямоугольников, равен сумме полярных моментов инерции квадратов - кругов, на которые разбиваются прямоугольники (с их последующей аппроксимацией малыми кругами, вписанными в эти квадраты):

$$I_t = I_{t,1} + I_{t,2} + \dots + I_{t,i} = \sum_{i=1}^n I_{t,i}, \quad (11)$$

Распределение действующего в поперечном сечении крутящего момента выполняется пропорционально соотношениям между общей крутильной жесткостью поперечного сечения и крутильной жесткостью каждого из малых кругов (на которые разбито поперечное сечение) относительно геометрического центра поперечного сечения. После сокращения на общий множитель, равный модулю сдвига при кручении, каждый из моментов кручения, приходящихся на вписанные малые круги, соответственно определяются, –

$$M_{t,1} = M_t \frac{I_{t,1}}{I_t}; \quad M_{t,2} = M_t \frac{I_{t,2}}{I_t}; \quad \dots \quad M_{t,i} = M_t \frac{I_{t,i}}{I_t}. \quad (12)$$

$I_{t,i}$  – полярный момент инерции вписанного в соответствующий квадрат малого круга, используемого в формуле (11).

Моменты кручения, приходящихся на вписанные малые круги, расположенные за пределами поперечного сечения стержня, равны нулю, так как здесь равны нулю их полярные моменты инерции.

Полярные моменты инерции малых кругов, расположенных в пределах контура поперечного сечения стержня относительно геометрического центра стержня складываются из полярных моментов инерции малых кругов относительно собственных геометрических центров ( $I_{t,ow}$ ) и дополнительных моментов инерции площади каждого малого круга относительно общего геометрического центра стержня ( $I_{t,add}$ ):

$$I_{t,i} = I_{t,i,ow} + I_{t,add} = \frac{\pi d^4}{32} + r_j^2 \cdot A_i \quad (13)$$

При этом  $\tau_{t,A}$ , отыскиваемую по формуле (10), будем рассматривать как равнодействующую двух составляющих  $\tau_{t,A,xy}$  и  $\tau_{t,A,xz}$  в общей системе координат YOZ, которые определяются из следующих зависимостей:

$$\tau_{t,A,xy} = \tau_{t,A} \cdot \sin \alpha = \left( \frac{M_t}{I_t} \cdot \sqrt{y_{j,A}^2 + z_{j,A}^2} + \frac{M_{t,i}}{I_{t,i}} \cdot \sqrt{y_{i,A}^2 + z_{i,A}^2} \right) \cdot \frac{y_j}{\sqrt{z_j^2 + y_j^2}} \leq \tau_{t,xy,ul}, \quad (14)$$

$$\tau_{t,A,xz} = \tau_{t,A} \cdot \cos \alpha = \left( \frac{M_t}{I_t} \cdot \sqrt{y_{j,A}^2 + z_{j,A}^2} + \frac{M_{t,i}}{I_{t,i}} \cdot \sqrt{y_{i,A}^2 + z_{i,A}^2} \right) \cdot \frac{z_j}{\sqrt{z_j^2 + y_j^2}} \leq \tau_{t,xz,ul}, \quad (15)$$

где  $\tau_{t,xz,ul}$ ,  $\tau_{t,xy,ul}$  – составляющие предельных значений касательных напряжений кручения.

**Важно заметить, что все геометрические характеристики рассматриваются относительно геометрического центра сложного сечения.**

Дополнительно к равнодействующим  $\tau_{t,A}$ , отыскиваемым по формуле (10) для соответствующих кругов необходимо учитывать составляющие, связанные с депланацией прямоугольного сечения [20].

Тогда, складывая составляющие касательных напряжений при кручении  $\tau_{t,A,xy}$ ,  $\tau_{t,A,xz}$ ,  $\tau_{dep,xy}$  и  $\tau_{dep,xz}$ , получим результирующее напряжение  $\tau_{sum,A}$ .

$$\tau_{sum,A} = \sqrt{(\tau_{t,A,xy} + \tau_{dep,xy})^2 + (\tau_{t,A,xz} + \tau_{dep,xz})^2}, \quad (16)$$

где  $\tau_{dep,xy}$  и  $\tau_{dep,xz}$  – составляющие касательных напряжений депланации, усредненные в  $i$ -ом круге

Знаки их определяются автоматически, – с помощью второго множителя в формулах (6) – (7), управляющего квадрантами прямоугольного сечения. Если в пределах  $j$ -того круга знаки касательных напряжений депланации разные и при их усреднении возникают некоторые сложности, – тогда радиусы аппроксимирующих кругов необходимо уменьшить.

В случае, если вдоль продольной оси железобетонной конструкции крутящий момент имеет постоянное значение, то результирующие напряжения кручения в стадии III достигают своих предельных значений  $\tau_u$ .

Зная  $\tau_u$  (или  $\tau_{sum,A}$ ) из уравнения (10) можно найти предельный крутящий момент, приходящийся на  $i$ -й круг сжатой зоны.

Итак, нулевые коэффициенты вводятся к тем малым кругам, которые расположены за пределами поперечного сечения стержня и вводятся лишь для заполнения всего большого круга, охватывающего поперечное сечение (рис. 1 и 2). Нулевые коэффициенты вводятся также к малым кругам, расположенным в угловых зонах сечения (в соответствии с результатами гидродинамической аналогии), обозначенных позицией 1 на рис. 1 и 2.

К кругам, расположенным во входящих углах поперечных сечений (обозначенных позицией 2 на рис. 1 и 2) вводятся коэффициенты, учитывающие наличие здесь **концентрации** напряженно – деформированного состояния. При упругом сопротивлении такие коэффициенты легко отыскиваются для соответствующего сечения с использованием метода конечных элементов (с малыми размерами конечных элементов). При упруго - пластическом сопротивлении и наличии трещин, например, в железобетоне, такие коэффициенты определяются по зависимостям, предложенным в работе [20].

Итак, для железобетонных элементов со сложной формой поперечного сечения, имеющих входящие углы (рис.1 и рис. 2) присуща определенная специфика расчета.

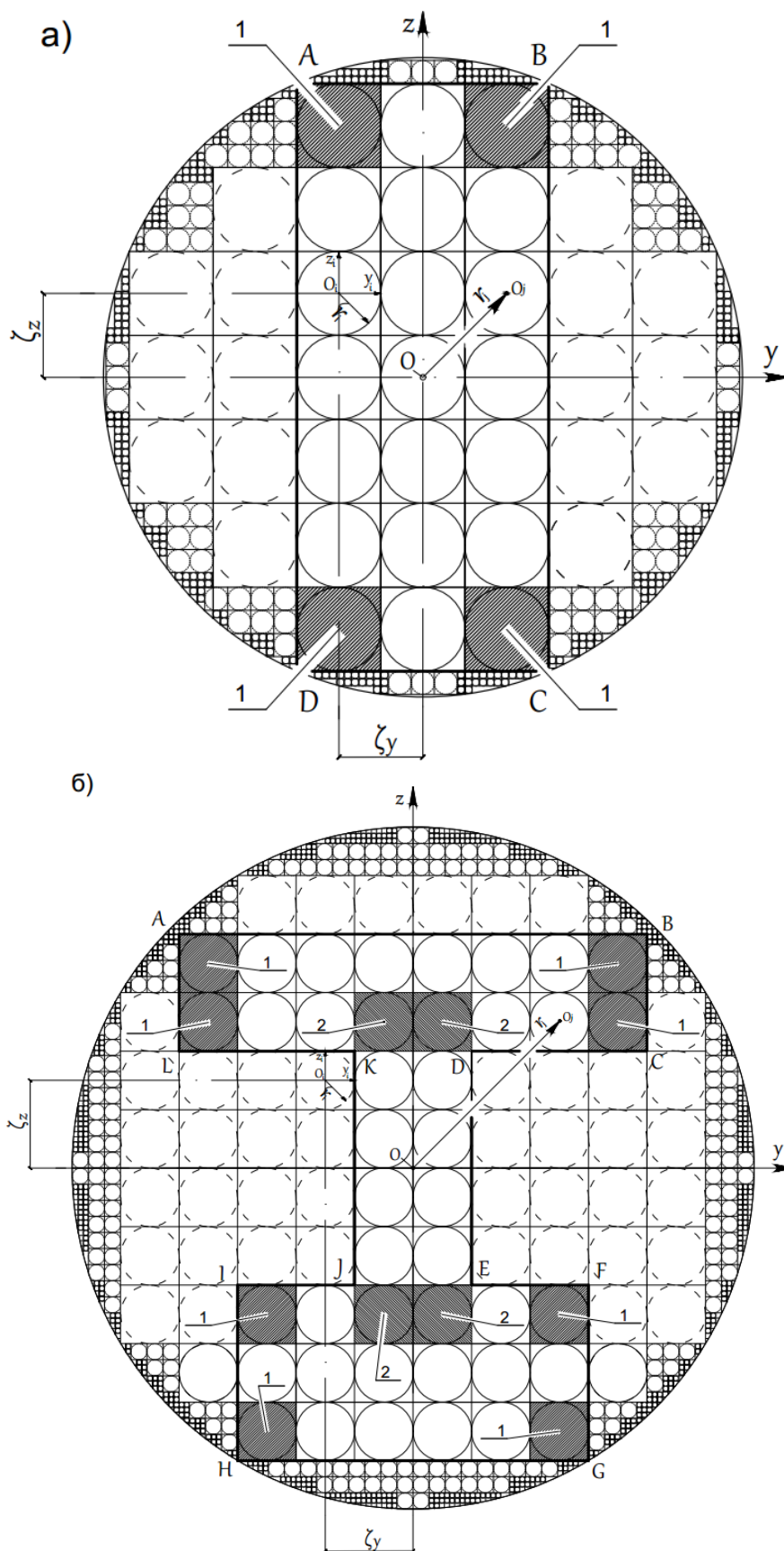


Рисунок 1 - Аппроксимация прямоугольного (а) и двустворчатого (б) поперечных сечений стержней с помощью квадратов и вписанных в них кругов

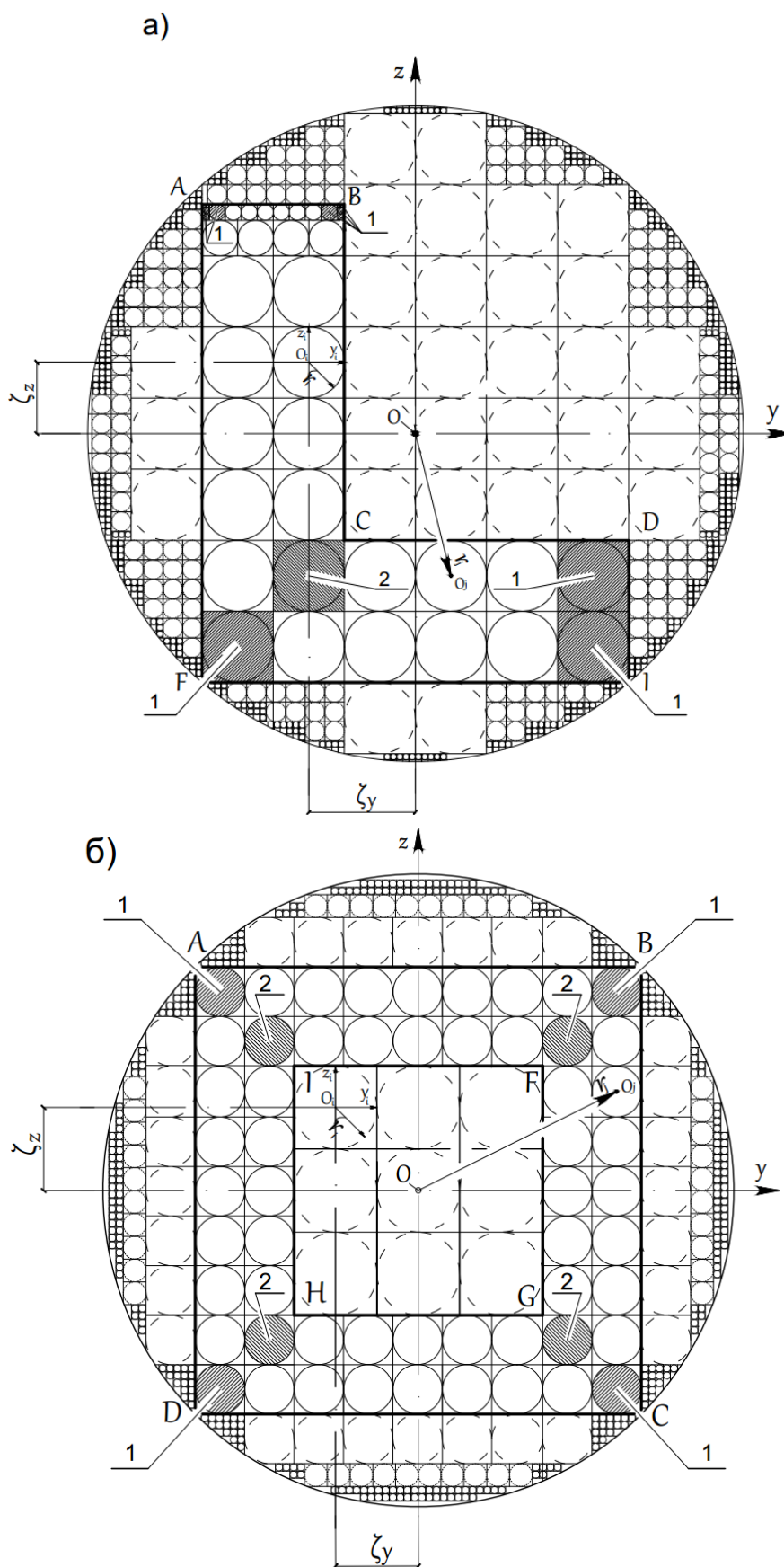


Рисунок 2 - Аппроксимация Г – образного (а) и коробчатого (б) поперечных сечений стержней с помощью квадратов и вписанных в них кругов

Картина распределение деформаций на участках стержней, прилегающих к нормальным сечениям, вырезающих узел [21, 22], напоминает, еще до появления трещин картину аналогичную, выявленную В.И. Мурашевым, в стадии трещинообразования. Поэтому представляется наиболее приемлемым учитывать такую концентрацию деформаций с помощью коэффициента  $\psi_{b,\tau}$ , по физическому смыслу, аналогичному коэффициенту  $\psi_s$ , введенному в теорию железобетона В.И. Мурашевым. Это позволяет оперировать в проведенных сечениях средними значениями деформаций, для которых уже справедлива гипотеза плоских поворотов. В стадии, когда сопротивление железобетонного стержня близко к упругому, коэффициент  $\psi_{b,\tau}$  определяется с привлечением коэффициента концентрации деформаций  $k$  [21, 22]:

$$\psi_{b,\tau} = 1 - \omega_\gamma \frac{k-1}{k}, \quad (17)$$

где  $\omega_\gamma$  – коэффициент заполнения эпюры деформаций растянутой арматуры (или сжатого бетона) на участках, отстоящих на  $h$  от центра узла.

При этом значения коэффициента  $k$  определяются по справочным данным или (при их отсутствии) легко могут быть получены с использованием МКЭ и учета особенностей работы зоны сопряжения как плосконапряженного (или объемного) элемента при его упругом сопротивлении.

После проявления физической нелинейности и трещин формула для определения значений коэффициента концентрации угловых деформаций  $\psi_{b,\tau}$  для практических расчетов, принимает вид [21, 22]:

$$\psi_{b,\tau} = \psi_{b\tau,1} + (1 - \psi_{b\tau,1}) \cdot \frac{\gamma_{b,m} - \gamma_{b,el}}{\gamma_{b,u} - \gamma_{b,el}}, \quad (18)$$

где  $\gamma_{b,m}$ ,  $\gamma_{b,el}$ ,  $\gamma_{b,u}$  – средние угловые деформации бетона, предел упругих угловых деформаций бетона ( $\gamma_{b,el} = 0.3 \frac{\tau_b}{G_b}$ ) и предельные угловые деформации бетона, соответственно.

Важным элементом предлагаемого подхода является также предоставляемая возможность (из-за разбиения сечения на малые квадраты - круги) учета **местной депланации** в углах и других резко изменяющихся геометрических параметрах, а также ее «возврата» в местах, соседствующих с квадратами с нулевой жесткостью. Последнее обусловлено необходимостью корректировки некоторых несовершенств предлагаемого подхода в местах резкого перепада жесткостей между малыми кругами. С другой стороны, именно разбиение сечения на малые квадраты – круги дает возможность учета местной депланации в местах резкого изменения геометрических параметров поперечного сечения стержня и ее корректировки – «возврата» **относительно плоскости большого круга** в местах, соседствующих с квадратами – кругами, имеющими нулевую жесткость.

Тогда применительно к модели депланации, описываемой формулой (1), при учете местной депланации, получим:

$$w = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \cdot f(y, z) \cdot f_2(x) = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \cdot \frac{a_*^2 - b_*^2}{a_*^2 + b_*^2} \cdot y \cdot z \cdot l \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) + w_{loc}. \quad (19)$$

Здесь  $w_{loc}$  - местная депланация. Ее целесообразно выразить через составляющие относительных угловых деформаций  $\gamma_{dep,yx,loc}$  и  $\gamma_{dep,zx,loc}$ , которые отсчитываются в предлагаемой методике относительно плоскости большого круга.

$$\gamma_{dep,yx} \pm \gamma_{dep,yx,loc} = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \cdot \frac{a_*^2 - b_*^2}{a_*^2 + b_*^2} \cdot l \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot z \pm \left( \frac{M_t}{I_t} \cdot r_{j,A} - \frac{M_{t,i}}{I_{t,i}} \cdot r_{i,A} \right)_{yx} \leq \gamma_{dep,yx,ul}, \quad (20)$$

$$\gamma_{dep,zx} \pm \gamma_{dep,zx,loc} = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \cdot \frac{a_*^2 - b_*^2}{a_*^2 + b_*^2} \cdot l \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot y \pm \left( \frac{M_t}{I_t} \cdot r_{j,A} - \frac{M_{t,i}}{I_{t,i}} \cdot r_{i,A} \right)_{zx} \leq \gamma_{dep,zx,ul}, \quad (21)$$

где  $\gamma_{dep,yx,ul}$  и  $\gamma_{dep,zx,ul}$  – составляющие предельных относительных угловых деформаций депланации;

$\gamma_{dep,yx}$  и  $\gamma_{dep,zx}$  - составляющие относительных угловых деформаций депланации;

$\gamma_{dep,yx,loc}$  и  $\gamma_{dep,zx,loc}$  - составляющие относительных угловых деформаций местной депланации, - определяются с использованием закона парности касательных напряжений, переходящих из плоскости поперечного сечения YOZ во взаимно перпендикулярные плоскости XOZ и YOX, - слагаемое входящее в последние скобки зависимостей (20), (21) соответственно.

При этом выбор знака перед последними скобками в формулах (20) и (21) выполняется в зависимости от того, в каком квадранте прямоугольников (на которые разбивается поперечное сечение любой формы) расположена точка А.

Наконец, необходимо учесть наличие **концентрации** угловых деформаций в углах и других резко изменяющихся геометрических параметрах также в направлении оси  $x$ , (а не только в плоскости YOZ), т.е применительно **к местной депланации**. При этом коэффициент концентрации  $\psi_{b,\tau,loc}$  вдоль продольной оси стержня  $x$  определяется по аналогии с зависимостью (18 см.выше) с привлечением коэффициента концентрации деформаций  $k_{loc}$ :

$$\psi_{b,\tau,loc} = 1 - \omega_{\gamma,loc} \frac{k_{loc} - 1}{k_{loc}}, \quad (22)$$

где параметры  $\omega_{\gamma,loc}$  и  $k_{loc}$  – по смыслу аналогичны параметрам, используемым в формуле (17), с той только разницей, что они характеризуют местное, а не общее поле угловых деформаций.

При этом значения коэффициента  $k_{loc}$  легко могут быть получены с использованием МКЭ и учета особенностей работы зоны сопряжения как плосконапряженного (или объемного) элемента при его упругом сопротивлении.

После проявления физической нелинейности и трещин формула для определения значений коэффициента концентрации угловых деформаций  $\psi_{b,\tau,loc}$  для практических расчетов, принимает вид, аналогичный формуле (18):

$$\psi_{b,\tau,loc} = \psi_{b\tau,1,loc} + (1 - \psi_{b\tau,1,loc}) \cdot \frac{\gamma_{b,m,loc} - \gamma_{b,el,loc}}{\gamma_{b,u} - \gamma_{b,el,loc}}, \quad (23)$$

где  $\gamma_{b,m,loc}$ ,  $\gamma_{b,el,loc}$ ,  $\gamma_{b,u}$  – параметры, определяемые по аналогии с соответствующими параметрами из формулы (18).

## Выводы

1. Предложен новый подход к определению касательных напряжений кручения для стержней произвольного поперечного сечения, базирующийся на упрощенных предпосылках

сопротивления материалов. Его особенность заключается в аппроксимации прямоугольных и любых сложных поперечных сечений конструкций (в том числе железобетонных) с помощью их разбивки на квадраты с вписанными в них кругами, соединенными между собой в единую монолитную фигуру в большом круге, описанном вокруг любого поперечного сечения, относительно которого выполняется учет местной депланации и концентрации угловых деформаций.

2. Малые  $i$ -тые круги, попадающие в контур поперечного сечения стержня, служат в качестве “конденсирующих”, - именно в них сосредотачиваются элементы жесткости и эффективные значения параметров напряженно-деформированного состояния, которые обеспечивают сопротивление поперечного сечения стержня кручению.

3. В пределах большого и каждого  $i$ -ого круга становится справедливой зависимость касательных напряжений кручения от расстояния до центра рассматриваемого круга. Максимальные напряжения согласно предлагаемой методике достигаются в серединах длинных сторон прямоугольника, что соответствует их действительному распределению. При этом такая модель позволяет снять вопрос о необходимости использования специальных таблиц для расчета не только в упругой стадии.

4. Предлагаемый подход также позволяет отделить напряженно-деформированное состояние в целом наборе круглых сечений от дополнительного поля, связанного с депланацией прямоугольного сечения. Авторами откорректированы и существенно дополнены зависимости для учета депланации стержня прямоугольного поперечного сечения, вводится понятие и предложены зависимости для учета местной депланации. Акцентируется внимание на физической сути продольных перемещений, обусловленных депланацией, проводится аналогия с элементарными перемещениями, вызываемыми сдвиговыми усилиями.

5. Предложенная методика позволяет учитывать концентрацию угловых деформаций в углах и других резко изменяющихся геометрических параметрах как относительно плоскости поперечного сечения, так и в направлении продольной оси стержня. При этом используется прием аналогичный введенному в теорию железобетона В.И. Мурашевым.

6. Трансформационные переходы от цилиндрической к декартовой системе координат и привлечение местных систем координат, позволили максимально упростить полученные зависимости. Разделение расчетных параметров на соответствующие составляющие напряженно – деформированного состояния предоставляет возможность их глубокого анализа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольшев А.Б., Колчунов В.И. Сопротивление железобетона. К.: Основа, 2009. 432 с.
2. Бондаренко В.М., Колчунов В.И. Расчетные модели силового сопротивления железобетона. М.: АСВ, 2004. – 472 с.
3. Верюжский Ю.В. Методы механики железобетона. К. : Кн. изд-во НАУ, 2005. 653 с.
4. EN 1992-1 : (Final draft, October 2001). Eurocode 2 (2002) : Design of Concrete Structures. – Part 1 : General Rules and Rules for Buildings, European Prestandart, Brussels, 230 p.
5. CEB-FIP Eurocode 2 : Design of Concrete Structures. Part 1 : General Rules and Rules for Buildings, ENV 1991-1-1. Brussels : CEN, 1991. – 253 p.
6. Notes on ACI 318-05 (2005). Building Code Requirements for Structural Code / edited by Mahmoud E. Kamara, Basile G. Rabbat, USA, Portland Cement Association, 1008 p.
7. Колчунов В. И., Сальников А.С. Экспериментальные исследования трещинообразования железобетонных конструкций при кручении с изгибом // Строительство и реконструкция. 2016. №3(65). С. 24– 32.
8. Колчунов В. И., Демьянов А.И., Яковенко И.А., Грамба М.О. Проблема приведения в соответствие опытных данных трещиностойкости железобетонных конструкций их теоретическим значениям // Наука та будівництво. 2018. №1(15). С. 42-49.
9. Демьянов А.И., Сальников А.С., Колчунов В.И. Экспериментальные исследования железобетонных конструкций при кручении с изгибом и анализ их результатов // Строительство и реконструкция. 2017. №4(72). С. 17– 26.
10. Демьянов А.И., Покусаев А.А., Колчунов В.И. Экспериментальные исследования железобетонных конструкций при кручении с изгибом // Строительство и реконструкция. 2017. №5(73). С. 5– 14.

11. Демьянов А.И., Колчунов В.И., Покусаев А.А. Экспериментальные исследования деформирования железобетонных конструкций при кручении с изгибом // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. №6. С. 37–44.
12. Salnikov A., Kolchunov V.I., Yakovenko I. The computational model of spatial formation of cracks in reinforced concrete constructions in torsion with bending // Applied Mechanics and Materials. 2015. Vols. 725-726. Pp. 784–789.
13. Демьянов А.И., Колчунов В.И., Сальников А.С., Михайлов М.М. Расчетные модели статико-динамического деформирования железобетонной конструкции при кручении с изгибом в момент образования пространственной трещины // Строительство и реконструкция. 2017. №3(71). С. 13–22.
14. Demyanov A., Kolchunov V.I. The dynamic loading in longitudinal and transverse reinforcement at instant emergence of the spatial crack in reinforced concrete element under the action of a torsion with bending // Journal of Applied Engineering Science. 2017. Vol. 15. Pp. 375–380. doi:10.5937/jaes15-14663
15. Сальников А.С., Ключева Н.В., Колчунов В.И. Метод определения минимальной нагрузки и координат образования пространственной трещины в железобетонных конструкциях при кручении с изгибом // Промышленное и гражданское строительство. 2016. №1. С. 52–57.
16. Дарков А.В., Шапошников Н. Н. Строительная механика : учеб. для строит. спец. вузов. 8-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1986. 607 с.
17. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический. В 2-х книгах. Книга 1. Под ред. А. А. Уманского. Изд. 2-е, переработанное и дополненное. М.: Стройиздат, 1972. 600 с.
18. Yakovenko I., Kolchunov V.I. The development of fracture mechanics hypotheses applicable to the calculation of reinforced concrete structures for the second group of limit states // Journal of Applied Engineering Science. 2017. Vol. 15. Pp. 366–375. doi:10.5937/jaes15-14662
19. Демьянов А. И., Колчунов В.И., Яковенко И.А. Разработка универсального короткого двухконсольного элемента к сопротивлению железобетонных конструкций при кручении с изгибом // Известия ВУЗов. Технология текстильной промышленности. 2017. №4(367). С. 258–263.
20. Dem'yanov A. I., Kolchunov V. I. Mathematical model of polystyrene concrete structure for design of its strength characteristics // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2018. Vol. 456. Pp. 012104. doi:10.1088/1757-899X/456/1/012104
21. Колчунов В.И., Сафонов А.Г. Построение расчета железобетонных конструкций на кручение с изгибом // Известия орловского государственного технического университета. Серия: Строительство и транспорт. 2008. № 4-20. С. 7-13.
22. Колчунов В.И. Практический учет концентрации угловых деформаций в зоне сопряжения ребра с полкой железобетонных обвязочных ригелей при кручении с изгибом // Строительная механика и расчет сооружений. 2009. № 2. С. 6-10.

## REFERENCES

1. Golyshev A.B., Kolchunov V.I. Soprotivleniye zhelezobetona [Resistance of reinforced concrete]. Kiev: Osнова, 2009. 432 p.
2. Bondarenko V.M., Kolchunov V.I. Raschetnyye modeli silovogo soprotivleniya zhelezobetona [Calculational models of power resistance of reinforced concrete]. Moscow: ASV, 2004. 472 p.
3. Veryuzhskiy Yu.V. Metody mekhaniki zhelezobetona [Methods of reinforced concrete mechanics]. Kiev: Publishing NAU, 2005. 653 p.
4. EN 1992-1 : (Final draft, October 2001). Eurocode 2 (2002) : Design of Concrete Structures. – Part 1 : General Rules and Rules for Buildings, European Prestandart, Brussels, 230 p.
5. СЕВ–FIP Eurocode 2 : Design of Concrete Structures. Part 1 : General Rules and Rules for Buildings, ENV 1991-1-1. Brussels : CEN, 1991. – 253 p.
6. Notes on ACI 318-05 (2005). Building Code Requirements for Structural Code / edited by Mahmoud E. Kamara, Basile G. Rabbat, USA, Portland Cement Association, 1008 p.
7. Kolchunov V. I., Sal'nikov A.S. Eksperimental'nyye issledovaniya treshchinoobrazovaniya zhelezobetonnykh konstruktсий pri kruchenii s izgibom [Experimental studies of cracks' formation in reinforced concrete structures under torsion-bending]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya*. 2016. No 3 (65). Pp. 24– 32.
8. Kolchunov V. I., Dem'yanov A.I., Yakovenko I.A., Grarba M.O. Problema privedeniya v sootvetstviye opytnykh dannykh treshchinostoykosti zhelezobetonnykh konstruktсий ikh teoreticheskim znacheniyam [Reduction problem for experimental and theoretical data of cracks' formation in reinforced concrete structures]. *Nauka ta budivnistvo*. 2018. No 1 (15). Pp. 42-49.
9. Dem'yanov A.I., Sal'nikov A.S., Kolchunov V.I.I. Eksperimental'nyye issledovaniya zhelezobetonnykh konstruktсий pri kruchenii s izgibom i analiz ikh rezul'tatov [Experimental studies of reinforced concrete structures under torsion-bending and its analysis]. *Building and reconstruction*. 2017. No 4 (72). Pp. 17– 26.
10. Dem'yanov A.I., Pokusayev A.A., Kolchunov V.I. Eksperimental'nyye issledovaniya zhelezobetonnykh konstruktсий pri kruchenii s izgibom [Experimental studies of reinforced concrete structures under torsion-bending]. *Building and reconstruction*. 2017. No 5 (73). Pp. 5– 14.

11. Dem'yanov A.I., Kolchunov V.I., Pokusayev A.A. Eksperimental'nyye issledovaniya deformirovaniya zhelezobetonnykh konstruktsey pri kruchenii s izgibom [Experimental studies of deformation of reinforced concrete structures under torsion with bending]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktsey i sooruzheniy*. 2017. No 6. Pp. 37–44.
12. Salnikov A., Kolchunov V.I., Yakovenko I. The computational model of spatial formation of cracks in reinforced concrete constructions in torsion with bending. *Applied Mechanics and Materials*. 2015. Vols. 725-726. Pp. 784–789.
13. Dem'yanov A.I., Kolchunov V.I., Sal'nikov A.S., Mikhaylov M.M. Raschetnyye modeli statiko-dinamicheskogo deformirovaniya zhelezobetonnoy konstruktsey pri kruchenii s izgibom v moment obrazovaniya prostranstvennoy treshchiny [Calculational models of static-dynamic deforming of RC structures under torsion with bending at the moment of crack formation]. *Building and reconstruction*. 2017. No 3(71). Pp. 13–22.
14. Dem'yanov A., Kolchunov V.I. The dynamic loading in longitudinal and transverse reinforcement at in-stant emergence of the spatial crack in reinforced concrete element under the action of a torsion with bending. *Journal of Applied Engineering Science*. 2017. Vol. 15. Pp. 375–380. doi:10.5937/jaes15-14663
15. Sal'nikov A.S., Klyuyeva N.V., Kolchunov V.I. Metod opredeleniya minimal'noy nagruzki i koordi-nat obrazovaniya prostranstvennoy treshchiny v zhelezobetonnykh konstruktseyakh pri kruchenii s izgibom. *Pro-myshlennoye i grazhdanskoye stroitel'stvo*. 2016. No 1. Pp. 52–57.
16. Darkov A.V., Shaposhnikov N. N. Stroitel'naya mekhanika [Structural mechanics]. Moscow: Vyssh. shk., 1986. 607 p.
17. Spravochnik proyektirovshchika promyshlennykh, zhilykh i obshchestvennykh zdaniy i sooruzheniy. Raschetno-teoreticheskiy [Textbook for engineer-designer of industrial and residual building and structures. Calculational and theoretical]. Edited by A. A. Umansky. Moscow: Stroyizdat, 1972. 600 p.
18. Yakovenko I., Kolchunov V.I. The development of fracture mechanics hypotheses applicable to the calculation of reinforced concrete structures for the second group of limit states. *Journal of Applied Engineering Science*. 2017. Vol. 15. Pp. 366–375. doi:10.5937/jaes15-14662
19. Dem'yanov A. I., Kolchunov V.I., Yakovenko I.A. Razrabotka universal'nogo korotkogo dvukhkonsol'nogo elementa k soprotivleniyu zhelezobetonnykh konstruktsey pri kruchenii s izgibom [Development of universal two-cantilever element for assessing of the resistance to torsion with bending of reinforced concrete structures]. *Izvestiya VUZov. Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti*. 2017. No 4 (367). Pp. 258–263.
20. Dem'yanov A. I., Kolchunov V. I. Mathematical model of polystyrene concrete structure for design of its strength characteristics. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2018. Vol. 456. Pp. 012104. doi:10.1088/1757-899X/456/1/012104
21. Kolchunov V. I., Safonov A.G. Postroyeniye rascheta zhelezobetonnykh konstruktsey na krucheniyе s izgibom [Calculation of reinforced concrete structures under torsion with bending]. *Izvestiya orlovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i trans-port*. 2008. No 4-20. Pp. 7-13.
22. Kolchunov V.I. Prakticheskiy uchet kontsentratsii uglovykh deformatsiy v zone sopryazheniya rebra s polkoy zhelezobetonnykh obvyazochnykh rigeley pri kruchenii s izgibom [Practical approach to take into account angle deformation concentration in conjunction zone of wall and flat in reinforced concrete girder under torsion with bending]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet so-oruzheniy*. 2009. No 2. Pp. 6-10.

#### Информация об авторах:

##### **Колчунов Владимир Иванович**

ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Россия,  
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры уникальных зданий и сооружений,  
E-mail: [vlik52@mail.ru](mailto:vlik52@mail.ru)

##### **Демьянов Алексей Иванович**

ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Россия,  
канд. техн. наук, доцент кафедры уникальных зданий и сооружений  
E-mail: [speccompany@gmail.com](mailto:speccompany@gmail.com)

#### Information about authors:

##### **Kolchunov Vladimir I.**

South-West State University, Kursk, Russia,  
Doctor of technical Sciences, Professor  
E-mail: [vlik52@mail.ru](mailto:vlik52@mail.ru)

##### **Dem'yanov Aleksey I.**

South-West State University, Kursk, Russia,  
Candidate in Tech. Sc., Ass. Professor  
E-mail: [speccompany@gmail.com](mailto:speccompany@gmail.com)