9 класс

9.1 Решите уравнение $x^2 + x - \frac{3}{x} = 3$.

Решение: Уравнение равносильно уравнению $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$ $(x \neq 0)$. Преобразуем:

$x^2(x+1) - 3(x+1) = 0,$

$(x+1)(x^2 - 3) = 0,$

$x_1 = -1,\ x_2 = -\sqrt{3},\ x_3 = \sqrt{3}.$

9.2 Выясните, справедлива ли следующая гипотеза: неравенство $a^3 + 1 \geq 2a^2$ выполняется при всех $a \geq 1$.

Решение: Имеем:

$a^3 - 2a^2 + 1 = (a^3 - a^2) - (a^2 - 1) = a^2(a-1) - (a+1)(a-1) = (a-1)(a^2 - a - 1).$

При $a > 1$ первый сомножитель $a - 1$ положителен, а вот второй сомножитель $a^2 - a - 1$ положителен не при всех $a > 1$, а лишь при $a > \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1{,}6$. Таким образом, неравенство $a^3 + 1 \geq 2a^2$ не выполняется для $a \in \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ и выполняется при $a > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

9.3 Пусть $a + b + 1 \neq 0,\ b < 0$. Докажите, что если x_0 − отрицательный корень уравнения $ax^4 + bx^3 + 1 = 0$, то x_0 не является корнем уравнения $ax^5 + bx + 1 = 0$.

Решение: Предположим, что x_0 удовлетворяет как первому уравнению, так и второму уравнению: $ax_0^4 + bx_0^3 + 1 = 0,\ ax_0^5 + bx_0 + 1 = 0$. Умножим первое равенство на x_0: $ax_0^5 + bx_0^4 + x_0 = 0$. Вычитая из получившегося равенства второе равенство, найдем $bx_0^4 - bx_0 + x_0 - 1 = 0.$

Далее

$$bx_0(x_0^3 - 1) + (x_0 - 1) = 0,$$

сократим на $x_0 - 1 \neq 0$ (с учетом формулы $x_0^3 - 1 = (x_0 - 1)(x_0^2 + x_0 + 1)$):

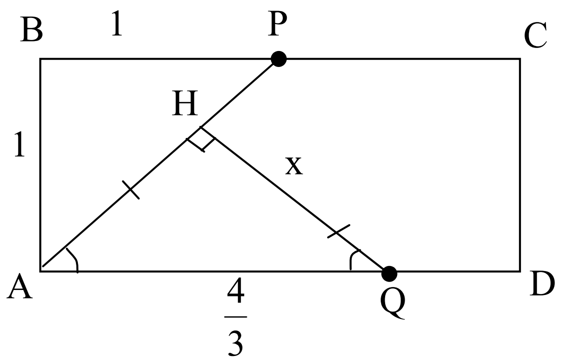
$$bx_0(x_0^2 + x_0 + 1) + 1 = 0.$$

Последнее равенство невозможно, так как $b < 0,\ x_0 < 0$, значит, $bx_0 > 0$ и, кроме того, $x_0^2 + x_0 + 1 > 0$ (квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ вообще принимает только положительные значения), в итоге $bx_0(x_0^2 + x_0 + 1) > 0$ и $bx_0(x_0^2 + x_0 + 1) + 1 > 1$.

Противоречие.

9.4 ABCD − прямоугольник, $AB = 1$, $BC = 2$. Точка P является серединой стороны BC, а точка Q лежит на стороне AD так, что $AQ : QD = 2 : 1$. Найдите расстояние от точки Q до прямой AP.

Решение: См.рис.



Треугольник ABP − равнобедренный $AB = BP = 1$, поэтому $\angle BAP = 45^{\circ}$, а, значит, угол HAQ равен 45°. Следовательно, в прямоугольном треугольнике AHQ угол HQA также равен 45°. Значит, $AH = QH = x$. По теореме Пифагора для треугольника AHQ: $x^2 + x^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$, $2x^2 = \frac{16}{9}$, $x = \frac{\sqrt{8}}{3}$.

9.5 Последовательность чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ образована по закону: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n}$ при $n = 1,2,3,\ldots$ Докажите, что $x_n > \frac{1}{9}n^2$.

Решение: Можно использовать математическую индукцию. База индукции: $x_1 = 1 > \frac{1}{9} \cdot 1^2$. Индукционный период: пусть $x_n > \frac{1}{9}n^2$, тогда

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n} > \frac{1}{9}n^2 + \frac{1}{3}n = \frac{1}{9}(n^2 + 3n) \ge \frac{1}{9}(n^2 + 2n + 1) = \frac{1}{9}(n+1)^2.$$