8 класс

8.1 Решите уравнение $x - 44 = 7\sqrt{x}$.
Решение: Пусть $\sqrt{x} = t \geq 0$. Получаем уравнение
$t^2 - 44 = 7t, \quad t^2 - 7t - 44 = 0$
$t_1 = -4, \; t_2 = 11.$
$\sqrt{x} = 11, \quad x = 121.$

8.2 Выясните, справедливо ли следующее утверждение: неравенство $a^4 + 1 \geq 2a^3$ выполняется при всех $a \geq 1$.
Решение: Например, при $a = 1{,}1$ имеем:
$a^4 + 1 = 1{,}1^4 + 1 = 1{,}4641 + 1 = 2{,}4641,$
$2a^3 = 2 \cdot 1.331 = 2{,}662,$
и величина $2a^3$ больше величины $a^4 + 1$.

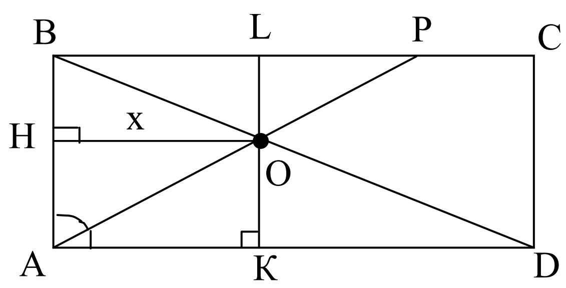
8.3 Одноклассники во время контрольной посылали друг другу записки. После контрольной семеро учеников сказали: «Я отправил на одну записку больше, чем получил». Каждый из остальных учеников сказал: «Я отправил на две записки меньше, чем получил». Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

Решение: Основываемся на том, что сколько записок отправлено, столько записок и получено. Пусть семеро учеников из условия задачи суммарно отправили p записок. Тогда они суммарно получили $p - 7$ записок. Пусть остальные k учеников суммарно отправили q записок. Тогда они суммарно получили $q + 2k$ записок.
Поэтому

$$p + q = p - 7 + q + 2k,$$

т.е. $7 = 2k$, что невозможно, так как 7 − число нечетное.

8.4 ABCD − прямоугольник, $AB = 1$, $BC = 3$. Точка P находится на стороне BC, причем $BP = 2$. Отрезки AP и BD пересекаются в точке O. Найдите расстояние от точки O до прямой AB.
Решение: См.рис.



Треугольник BOP подобен треугольнику DOA. Коэффициент подобия равен $\frac{2}{3}$, так как $BP = 2$, $AD = 3$. Значит, $\frac{LO}{KO} = \frac{2}{3}$, следовательно, $LO = \frac{2}{5}LK = \frac{2}{5}AB = \frac{2}{5}$. Тогда $BH = LO = \frac{2}{5}$. Треугольник HBO подобен треугольнику ABD, коэффициент подобия равен $\frac{BH}{BA} = \frac{2}{5}$. Поэтому $x = HO = \frac{2}{5}AD = \frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{6}{5}$.

8.5 Докажите, что число вида $x^4 + x^3$, где x − натуральное число, не может быть квадратом натурального числа.

Решение:

Пусть $x^4 + x^3 = y^2$, где $x, y \in N$. Так как $x^4 + x^3 > (x^2)^2$, то $y > x^2$ и, стало быть, $y = x^2 + t$, $t \in N$.

Тогда имеем: $x^4 + x^3 = (x^2 + t)^2 = x^4 + 2x^2t + t^2$, т.е.

$t^2 = x^3 - 2x^2t = x^2(x - 2t)$.

Отсюда видно, что $x - 2t$ − целое положительное число, поэтому $t < \frac{x}{2}$. Отсюда же видно, что t^2 делится на x^2, поэтому $t^2 \geq x^2$, т.е. $t \geq x$. Получено противоречие.