11 класс

11.1 Решите уравнение $x^4-4x^3+4x^2-9=0$.

Решение:

$(x^2-2x)^2-9=0,$

$(x^2-2x-3)(x^2-2x+3)=0,$

$x_1=-1, \quad x_2=3$

11.2 Докажите неравенство $\frac{1}{|\sin x|}>2x-x^2$ при $\sin x\neq 0$.

Решение:

$(x-1)^2+\frac{1-|\sin x|}{|\sin x|}>0$, так как оба слагаемых неотрицательны и одновременно в нуль не обращаются.

11.3 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+|y-x^2|=y, \\ y-x=a \end{cases}$$

не имеет ни одного решения.

Решение:

Запишем первое уравнение в виде

$y-x^2=|y-x^2|$.

Поскольку равенство $t=|t|$ равносильно условию $t\geq 0,$ то первое уравнение системы равносильно неравенству $y-x^2\geq 0$, т.е. $y\geq x^2$. Значит, геометрически на координатной плоскости множество решений первого уравнения системы представляет собой множество всех точек, лежащих над (не ниже) параболой $y=x^2$ (т.н. надпарабола)

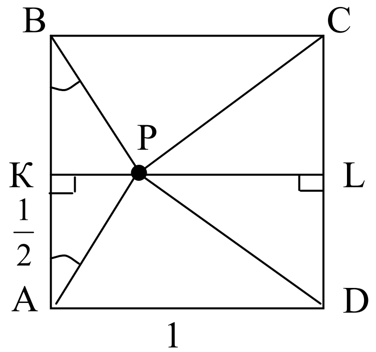
Второе уравнение $y=x+a$ − это уравнение прямой.

Система не имеет решений, только если надпарабола $y\geq x^2$ и прямая $y=x+a$ не пересекаются, а это будет так, только если парабола $y=x^2$ и прямая $y=x+a$ не имеют ни одной общей точки, т.е. уравнение $x^2=x+a$ не имеет корней, т.е. дискриминант квадратного трехчлена x^2-x-a отрицателен:

$1+4a<0, \quad a<-\frac{1}{4}.$

11.4 Внутри квадрата ABCD взята точка P, так, что $\angle PBA = \angle PAB = 15^o$. Докажите, что треугольник CPD − равносторонний.

Решение: Приведем одно из многих возможных решений − вычислительное. См. рис.



KL − средняя линия

Пусть $AB = 1$, тогда $AK = \frac{1}{2}$. Из ΔAKP: $KP = \frac{1}{2}\text{tg}15^o$.

Приходится вычислять $\text{tg}15^o$. Например, так:

$$\text{tg}^2 15^o = \frac{\sin^2 15^o}{\cos^2 15^o} = \frac{\frac{1}{2}(1-\cos 30^o)}{\frac{1}{2}(1+\cos 30^o)} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})^2$$

$\text{tg}15^o = 2-\sqrt{3}$.

Тогда $KP = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Значит, $PL = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Далее получаем $PC^2 = PL^2 + LC^2 = \frac{3}{4}+\frac{1}{4} = 1.$

Итак, $PC = PD = 1 = CD$.

11.5 Последовательность положительных чисел $x_1, x_2, \ldots$ образована по закону: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sqrt{x_n}}$ при $n = 1,2,3,\ldots$. Докажите, что

1) $x_n \ge \sqrt[3]{n^2}$,

2) $x_n < 3\sqrt[3]{n^2}$.

Решение:

1) Ясно, что последовательность $x_1 = 1, x_2, x_3, \ldots$ монотонно возрастает.

Просуммируем равенства

$x_1 = 1$,

$x_2 = x_1 + \frac{1}{\sqrt{x_1}}$,

$$x_3 = x_2 + \frac{1}{\sqrt{x_2}}, \qquad (n \geq 2)$$

…………………..

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{x_{n-1}}},$$

Получаем

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x_{n-1}}} \qquad (*)$$

Так как каждое из n слагаемых в сумме (*) больше $\frac{1}{\sqrt{x_n}}$, то

$$x_n > n \cdot \frac{1}{\sqrt{x_n}}, \qquad \text{откуда} \qquad x_n^3 > n^2, \quad x_n > \sqrt[3]{n^2}.$$

2) Из предыдущего имеем $\frac{1}{\sqrt{x_n}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ (с равенством при $n = 1$). Тогда из равенства (*) получаем

$$x_n < 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}} \qquad (n \geq 2).$$

Лемма. При $a \geq 1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}} \leq \frac{3}{\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt[3]{(a+1)^2} - \sqrt[3]{a^2}\right).$$

Докажем лемму. Имеем

$$\sqrt[3]{(a+1)^2} - \sqrt[3]{a^2} = \left(\sqrt[3]{a+1}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{a}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt[3]{a+1} + \sqrt[3]{a}\right)\left(\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a}\right) > 2\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a}\right) =$$

$$= 2\sqrt[3]{a} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[3]{a+1}\right)^2 + \sqrt[3]{a+1} \cdot \sqrt[3]{a} + \left(\sqrt[3]{a}\right)^2} > 2\sqrt[3]{a} \cdot \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{a+1}\right)^2} \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{a}}{\left(\sqrt[3]{2a}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a}}.$$

Лемма доказана.

Полагая в неравенстве леммы $a = 1, 2, \ldots, n-1$ и суммируя получающиеся неравенства, найдем

$$x_n < 1 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt[3]{n^2} - 1\right) < \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt[3]{n^2}.$$

Таким образом, $x_n < 3\sqrt[3]{n^2}$.