10 класс

10.1 При каких значениях p система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6y = 1, \\ 5x^2 + 6y = p \end{cases}$$ не имеет решений?

Решение: Вычтем из 2-го уравнения 1-е , перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} 5x + 6y = 1, \\ 5x^2 - 5x - p + 1 = 0. \end{cases}$$

Число решений этой системы, очевидно, равно числу решений уравнения $5x^2 - 5x - p + 1 = 0$. В частности, решений нет, только если дискриминант отрицателен:

$$25 - 4 \cdot 5(-p + 1) = 20p + 5 < 0,$$

$$p < -\frac{1}{4}.$$

10.2 Докажите, что если $0 < a < 1$, то $\frac{a}{1-a} + \frac{1}{a} \geq 3.$

Решение: Равносильное неравенство

$$a^2 + 1 - a \geq 3a - 3a^2,$$

т.е. $4a^2 - 4a + 1 \geq 0$, т.е. $(2a-1)^2 \geq 0$, что верно (даже при всех значениях a).

10.3 Пусть $p > 0$, $q < 0$, $p + q \neq -1$. Докажите, что если x_0 является корнем уравнения $x^4 + px + q = 0$, то x_0 не является корнем уравнения $x^5 + px^3 + q = 0$.

Решение: $x_0 \neq 0$, так как $q \neq 0$. $x_0 \neq 1$, так как $1 + p + q \neq 0$. Предположим, что x_0 удовлетворяет не только первому, но и второму уравнению:

$$x_0^4 + px_0 + q = 0, \quad x_0^5 + px_0^3 + q = 0.$$

Первое из этих равенств умножим на x_0:

$$x_0^5 + px_0^2 + qx_0 = 0.$$

Тогда можно написать равенство

$$x_0^5 + px_0^3 + q = x_0^5 + px_0^2 + qx_0,$$

откуда $px_0^2(x_0 - 1) = q(x_0 - 1)$.

Сократим на $x_0 - 1 \neq 0$:

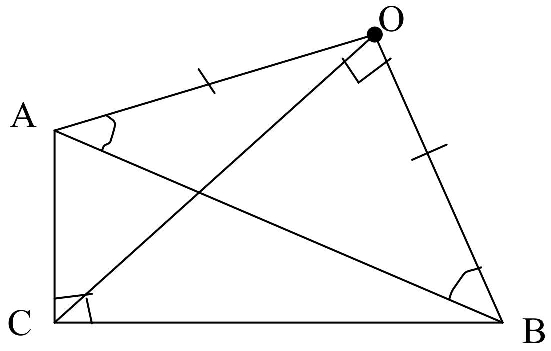
$$px_0^2 = q.$$

Левая часть равенства положительна, так как $p > 0$, $x_0^2 > 0$, а правая часть отрицательна, так как, по условию задачи, $q < 0$.

Противоречие.

10.4 Докажите, что отрезок, соединяющий вершину прямого угла прямоугольного треугольника с центром квадрата, построенного на гипотенузе, делит прямой угол пополам.

Решение: См. рис.



O − центр квадрата

$\angle OAB = \angle OBA = 45^{o}$

$OA = OB$,

$\angle AOB = 90^{o}$.

Рассмотрим окружность, для которой AB является диаметром. Точки C и O лежат на этой окружности, поскольку углы ACB и AOB − прямые. Углы ACO и BCO − вписанные и опираются на равные дуги этой окружности (дуги равны, поскольку равны стягивающие их хорды AO и BO). Значит, $\angle ACO = \angle BCO$.

10.5 Последовательность целых чисел $a_0, a_1, a_2, ...$ образована по закону: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n a_{n-1} + 1$ для $n = 1,2,...$. Докажите, что ни одно из чисел $a_n + 1$ не делится на 5.

Решение: Рассмотрим эту последовательность по модулю 5 (т.е. остатки от деления a_n на 5, в вычислениях используем вместо чисел a_n их остатки):

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
$a_n \pmod 5$	1	1	2	3	2	2	0	1	1	…

Видим, что последовательность $a_n \pmod 5$ периодична с периодом 7. Видим также, что $a_n + 1$ не является нулем по модулю 5:

$$(a_n + 1) \pmod 5: \quad 2,2,3,4,3,3,1,2,2,\ldots$$