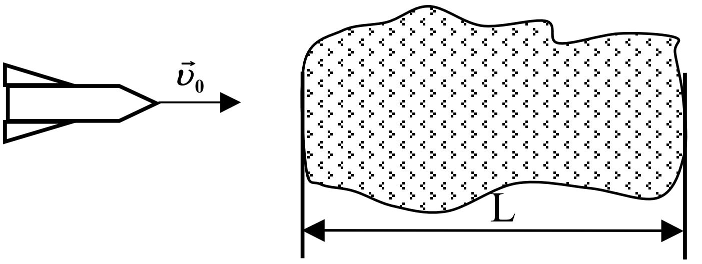
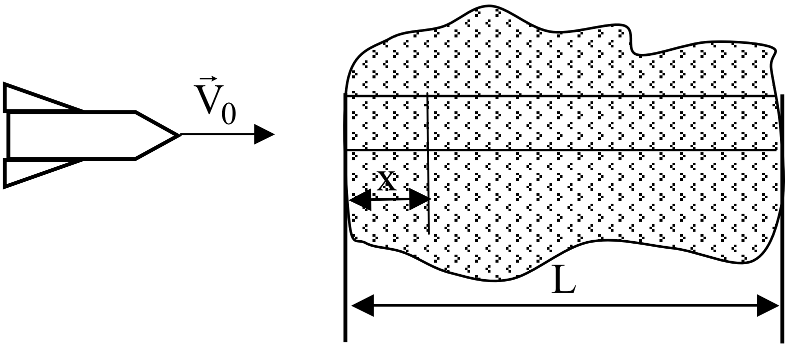
9 класс

Задача 1. Ракета массой **m**, летящая в космическом пространстве с выключенным двигателем со скоростью υ_0, попадает в облако пыли средней плотностью ρ и протяжённостью **L** в направлении движения ракеты. Пылинки неподвижны и прилипают к ракете при столкновении с ней. Площадь поперечного сечения ракеты **S**. Какую скорость υ будет иметь ракета при вылете из облака пыли? Сколько времени τ займёт пролёт через это облако?



Решение



После того, как ракета пройдёт расстояние x, к ней прилипнет пыль массой $\Delta m = \rho S x$.

Из закона сохранения импульса:

$$mv_0 = (m + \Delta m)v,$$

откуда:

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{\rho S x}{m}}. \qquad (1)$$

После пролёта всего облака $x = L$, тогда искомой скоростью будет:

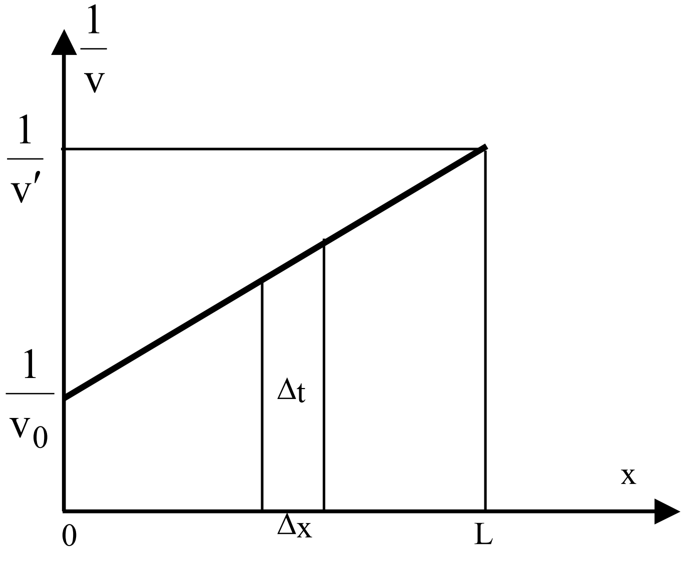
$$v' = \frac{v_0}{1 + \frac{\rho S L}{m}}.$$

Найдём время τ. Перепишем (1) в виде

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{\rho S}{m v_0} x.$$

Построим график зависимости $1/v$ от x. Малое расстояние Δx ракета пролетит за малый промежуток времени

$$\Delta t = \frac{1}{v}\Delta x.$$

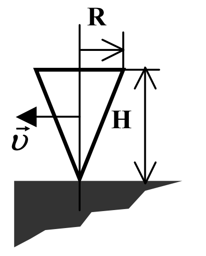


Т.е. площадь под графиком будет численно равна времени движения:

$$\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v'}\right)L = \frac{L}{v_0}\left(1 + \frac{\rho SL}{2m}\right)$$

Ответ: $v' = \dfrac{v_0}{1 + \dfrac{\rho SL}{m}}$, $\tau = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{v_0} + \dfrac{1}{v'}\right)L = \dfrac{L}{v_0}\left(1 + \dfrac{\rho SL}{2m}\right)$.

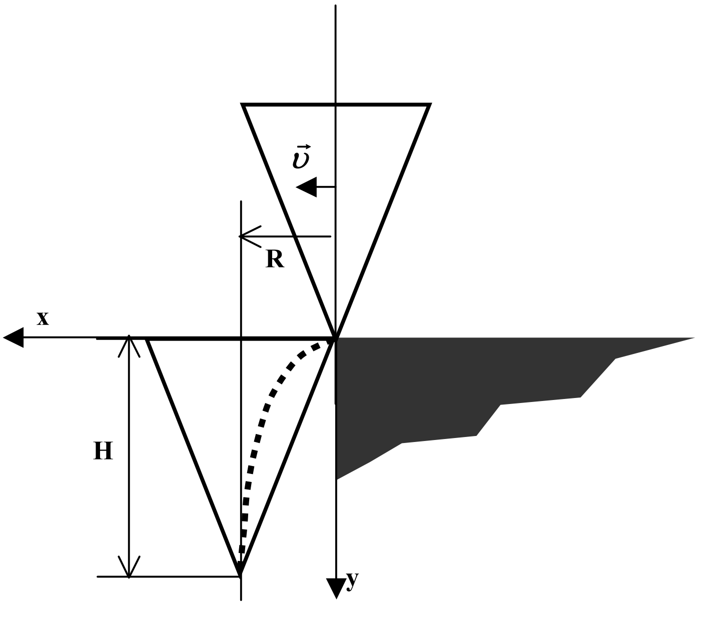
Задача 2. По гладкому столу движется, быстро вращаясь вокруг своей оси, волчок, имеющий форму конуса с размерами указанными на рисунке. Считая, что ось волчка остаётся вертикальной, определите, при какой скорости υ поступательного движения волчок не ударится о край стола, соскочив с него?



Решение

Рассмотрим движение конуса после срыва его вершины с края стола. Сохраняя свою ось вращения вертикальной, конус движется (без учёта вращения) по ветви параболы, как тело, брошенное горизонтально с начальной скоростью υ.

Выберем оси координат и запишем уравнения движения по осям *x* и *y*:



$$x = \upsilon t; \quad y = \frac{gt^2}{2}.$$

Исключив время, получим уравнение траектории (параболы):

$$t = \frac{x}{\upsilon},$$

$$y = \frac{g}{2\upsilon^2}x^2.$$

Наименьшая скорость должна обеспечить в момент достижения основанием конуса уровня поверхности стола (смещение на *H* по *y*) смещение на *R* по оси *x*. Т.е.:

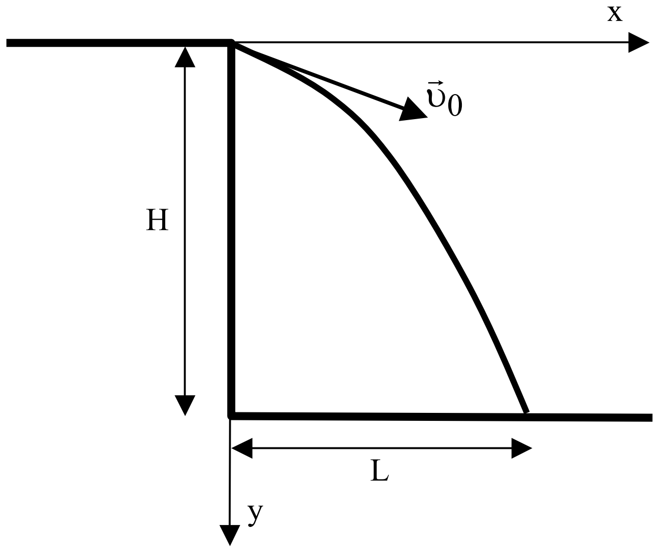
$$H = \frac{g}{2\upsilon^2}R^2.$$

Откуда:

Ответ: $\upsilon = R\sqrt{\dfrac{g}{2H}}$.

Задача 3. Камень брошен со скалы высотой **20 м**, с начальной скоростью **25 м/с**. Найдите дальность его полёта по горизонтали, если он брошен под углом **30°** вниз от горизонта.

Решение



Запишем уравнения движения по оси x и y:

$$x = (\upsilon_0 \cos\alpha)t\,; \tag{1}$$

$$y = (\upsilon_0 \sin\alpha)t + \frac{gt^2}{2}. \tag{2}$$

В момент падения ($x = L,\ y = H$) из (1):

$$t' = \frac{L}{\upsilon_0 \cos\alpha},$$

тогда из (2):

$$H = (tg\alpha)L + \frac{g}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha} L^2.$$

Получим квадратное уравнение:

$$L^2 + k(tg\alpha)L - kH = 0,$$

где $k = \dfrac{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha}{g} = 93{,}75.$

После подстановки значений получим:

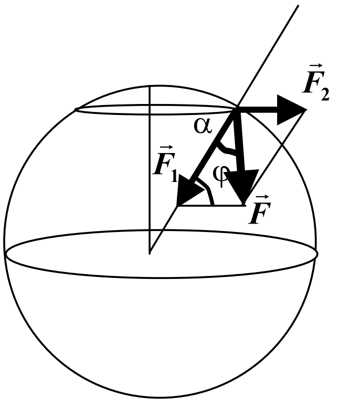
$$L^2 + 54{,}13 \cdot L - 1875 \cdot H = 0 \cdot$$

Решая квадратное уравнение и исключая отрицательный корень, получим: $L = \dfrac{-54{,}13 + \sqrt{10430}}{2} \approx 24$ м.

Ответ: $L = \dfrac{-54{,}13 + \sqrt{10430}}{2} \approx 24$ м

Задача 4. Тело находится на поверхности Земли на широте $\mathbf{60^0}$. Определить на какой угол отклоняется вертикаль от истинного направления вследствие вращения Земли. Землю считать сферой.

Решение



Сила тяжести $F_1 = \dfrac{GMm}{r^2} = mg$ направлена к центру Земли и давала бы направление вертикали, если бы Земля не вращалась. Во вращающейся системе отсчета на тело действует фиктивная центробежная сила инерции, направленная по радиусу от центра окружности вращения

$$F_2 = ma = m\varpi^2 r = m\varpi^2 R\cos\varphi = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos\varphi\,.$$

Реальная вертикаль направлена вдоль равнодействующих этих сил. Искомый угол находим из треугольника сил:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos 60^0} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - F_1F_2}\,.$$

Из теоремы синусов

$$\frac{F}{\sin 60^0} = \frac{F_2}{\sin\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{F_2 \sin 60^0}{F} = \frac{F_2\sqrt{3}}{2\sqrt{F_1^2 + F_2^2 - F_1F_2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\left(\dfrac{F_1}{F_2}\right)^2 + 1 - \dfrac{F_1}{F_2}}}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{mg}{m\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos\varphi} = \frac{gT^2}{4\pi^2 R\cos\varphi}\,.$$

Откуда $\dfrac{F_1}{F_2} = 580$.

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\left(\dfrac{F_1}{F_2}\right)^2 + 1 - \dfrac{F_1}{F_2}}} \approx \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 580} \approx 1.5\cdot 10^{-3}$$

Учитывая малость угла, $\sin\alpha \approx \alpha$=1.5·10^{-3} рад = 86·10^{-3} градуса = 5,16′ (минут).

Ответ: 5,16′ (минут).

Задача 5. Какую минимальную (по модулю и направлению) силу необходимо приложить к центру ящика массой **100 кг**, стоящему на горизонтальном полу, чтобы сдвинуть его с места? Коэффициент трения между ящиком и полом **μ = 0,75**.

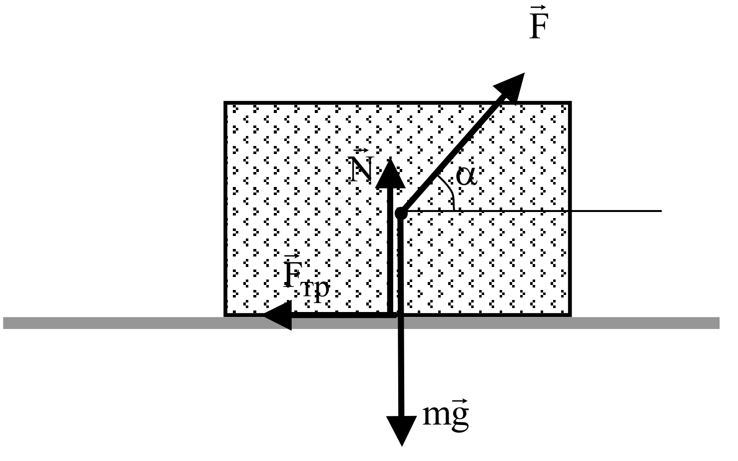
Решение

Если сдвигающая сила направлена горизонтально, то ее величина должна быть не менее:

$$F \geq F_{TPCK} = \mu mg = 750\,H\,.$$

Если вертикально:

$$F \geq mg = 1000\,H\,.$$



Возможно, сила будет минимальной, когда она направлена под углом к горизонту.

Моменту сдвига ящика соответствует равенство нулю проекций сил на горизонтальную и вертикальную оси.

$$F\cos\alpha - F_{TPCK} = 0,$$

$$F\sin\alpha + N - mg = 0,$$

$$N = mg - F\sin\alpha,$$

$$F_{TPCK} = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha).$$

Подставим последнее выражение для силы трения в первое уравнение и выразим силу

$$F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = 0,$$

$$F\cos\alpha - \mu mg + \mu F\sin\alpha = 0,$$

$$F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = \mu mg,$$

$$F = \frac{\mu mg}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}.$$

Дробь, при постоянном числителе, принимает минимальное значение, когда ее знаменатель максимален. Для определения максимального значения выражения, стоящего в знаменателе дроби, можно использовать известный прием исследования функции на экстремум или способ введения дополнительного угла, известный из тригонометрии.

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right) =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha\right) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\varphi+\alpha).$$

Так как $-1 \le \sin(\varphi+\alpha) \le 1$, то:

$$-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin\alpha + b\cos\alpha \le \sqrt{a^2+b^2}$$

и наибольшее по модулю значение выражения $\cos\alpha + \mu\sin\alpha$ будет равно:

$$\cos\alpha + \mu\sin\alpha = \sqrt{1+\mu^2}.$$

Тогда наименьшее по модулю значение силы

$$F = F_{\min} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{0{,}75\cdot 1000\cdot 10}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot 10^6 = 6000\ H.$$

А угол, под которым эта сила направлена к горизонту, найдем так:

$$\begin{aligned}
&f(\alpha) = \cos\alpha + \mu\sin\alpha,\\
&f'(\alpha) = -\sin\alpha + \mu\cos\alpha = 0,\\
&\sin\alpha = \mu\cos\alpha,\\
&tg\alpha = \mu,\\
&\alpha = arctg\ \mu = arctg\ (3/4).
\end{aligned}$$

Ответ: $F_{\min} = 6000\ H$, $\alpha = arctg\ (3/4)$.