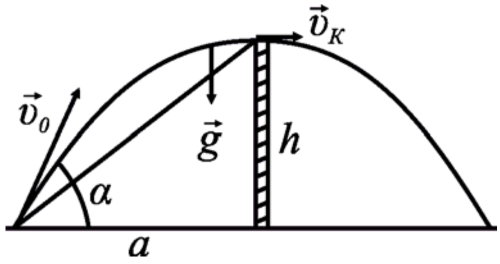
8 класс

Задача 1. Найти минимальную скорость $\upsilon_{\min}$, с которой нужно бросить тело, чтобы оно пролетело над стенкой высоты *h*, а также скорость пролета тела над стенкой $\vec{\upsilon}_к$. Расстояние от стенки до места броска *a*.

Решение



Запишем уравнением траектории движения тела:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2\cos^2\alpha}.$$

Учитывая, что $\cos^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $y = h$, $x = a$, получим

$$h = a\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{ga^2}{2\upsilon_0^2\left(\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)}.$$

Отсюда

$$\upsilon_0^2 = \frac{ga^2}{a\sin 2\alpha + h\cos 2\alpha - h}.$$

Заменим $a\sin 2\alpha + h\cos 2\alpha$ на выражение $\sqrt{a^2+h^2}\sin(2\alpha+\theta)$, где $\theta = \mathrm{arctg}\dfrac{h}{a}$.

Тогда

$$\upsilon_0^2 = \frac{ga^2}{\sin(2\alpha+\theta)\sqrt{a^2+h^2} - h},$$

или

$$\upsilon_0^2 = \frac{g\left(L^2-h^2\right)}{\sin(2\alpha+\theta)L - h}.$$

Минимальная скорость будет тогда, когда $\sin(2\alpha+\theta) = 1$, т.е.

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{h}{a}. \qquad (1)$$

Тогда

$$\upsilon_{\min} = \sqrt{g(L+h)}. \qquad (2)$$

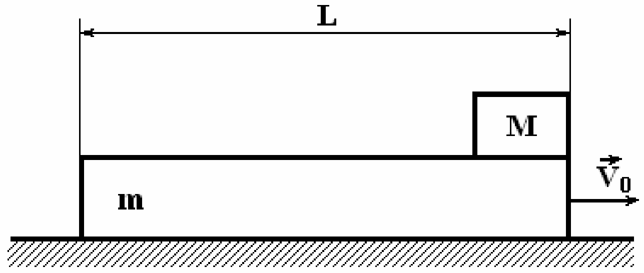
Воспользовавшись законом равнопеременного движения, запишем $\upsilon_к^2 = \upsilon_{\min}^2 - 2gh$, откуда, с учетом (1), найдем

$$\vec{\upsilon}_к = \sqrt{g(L-h)}.$$

Ответ: $\upsilon_{\min} = \sqrt{g(L+h)}$, $\vec{\upsilon}_к = \sqrt{g(L-h)}$.

Задача 2. На конце доски длиной L и массой m находится маленький брусок массой M. Доска может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения скольжения бруска о поверхность доски равен μ. Какую горизонтальную скорость V_0 нужно толчком сообщить доске, чтобы она выскользнула из-под бруска?

Решение



По закону сохранения энергии пороговое значение энергии доски, при котором соскользнет брусок

$$T_{пор} = Q\left(1+\frac{m}{M}\right), \qquad (1)$$

где $T_{пор} = \dfrac{mV_0^2}{2}$ – кинетическая энергия доски,

Q – изменение кинетической энергии системы.

За время движения изменение кинетической энергии системы будет равно работе силы трения бруска о доску, т.е.

$$Q = \mu MgL. \qquad (2)$$

Тогда

$$\frac{mV_0^2}{2} = \mu MgL\left(1+\frac{m}{M}\right).$$

Отсюда

$$V_0 = \sqrt{2\mu \frac{M}{m} gL\left(1+\frac{m}{M}\right)} = \sqrt{2\mu gL\left(1+\frac{M}{m}\right)}. \qquad (3)$$

Ответ: $V_0 = \sqrt{2\mu gL\left(1+\dfrac{M}{m}\right)}$.

Задача 3. Локомотив находился на расстоянии $L = 400\,м$ от светофора и имел скорость $V = 54\,км/ч$, когда началось торможение. Определите положение локомотива относительно светофора через одну минуту после начала торможения, если он двигался с ускорением $a = 0{,}3\,м/с^2$.

Решение. Поскольку после начала торможения локомотив движется равнозамедленно, то его скорость будет изменяться от V_0 до нуля по закону:

$$V = V_0 - at,$$

где $V_0 = 54\,км/ч = 15\,м/с$ – начальная скорость,

t – время, за которое локомотив остановится.

Отсюда время торможения

$$t = \frac{V_0}{a} = \frac{15}{0{,}3} = 50с.$$

При этом до остановки локомотив пройдет путь

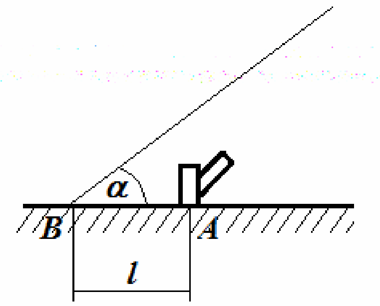
$$S = \frac{V_0^2}{2a} = \frac{15^2}{2\cdot 0{,}3} = 375м.$$

Таким образом, через одну минуту после начала торможения локомотив будет находиться относительно светофора на расстоянии

$$l = L - S = 400 - 375 = 25м.$$

Ответ: $l = 25м.$

Задача 4. Артиллерийское орудие стреляет из под укрытия, наклоненного под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Орудие находится в точке A на расстоянии $l = 5м$ от основания укрытия (точка B). Начальная скорость снаряда равна $V_0 = 600\,м/с$, траектория снаряда лежит в плоскости рисунка. Определите максимальную дальность полета снаряда.



Решение

Определим угол полета снаряда, при котором будет соблюдаться условие максимума дальности полета. Рассмотрим движение снаряда в прямоугольной декартовой системе координат.

В этой системе горизонтальная составляющая начальной скорости снаряда равна

$$V_{0X} = V_0 \cos\beta,$$

а вертикальная составляющая равна

$$V_{0Y} = V_0 \sin\beta,$$

где β – угол, который составляет с горизонтом направление начальной скорости снаряда.

Траекторией движения снаряда в данном случае будет парабола. Движение по этой траектории представляет собой комбинацию двух простых движений: по горизонтали – это равномерное движение со скоростью V_{0X}, а по вертикали – равноускоренное движение с начальной скоростью V_{0Y} и ускорением свободного падения g. В вертикальном направлении скорость снаряда будет изменяться по закону

$$V_Y = V_{0Y} - gt = V_0 \sin\beta - gt.$$

В точке максимального подъема вертикальная составляющая скорости будет равна

$$V_Y = 0 = V_0 \sin\beta - gt_{под},$$

где $t_{под}$ – время подъема снаряда на максимальную высоту. Отсюда

$$t_{под} = \frac{V_0 \sin\beta}{g}.$$

В силу симметрии получим:

$$t_{пол} = 2t_{под} = \frac{2V_0 \sin\beta}{g}.$$

Тогда по закону равномерного движения дальность полета равна

$$S = V_{0X} \cdot t = V_0 \cos\beta \cdot \frac{2V_0 \sin\beta}{g} = \frac{V_0^2}{g} \cdot \sin 2\beta.$$

Отсюда следует, что максимальной дальность полета будет при $\sin 2\beta = 1$. Тогда угол $\beta = 45^\circ$.

Так как угол стрельбы β меньше угла наклона укрытия α, то снаряд в укрытие не попадет при любой начальной скорости полета. Поэтому

$$S_{\max} = \frac{V_0^2}{g} = \frac{600^2}{10} = 36000\,м = 36\,км.$$

Ответ: $S_{\max} = 36\ км.$

Задача 5. Муравей бежит от муравейника по прямой так, что его скорость обратно пропорциональна расстоянию до центра муравейника. В тот момент, когда муравей находился в точке A на расстоянии $l_1 = 1\,м$ от центра муравейника, его скорость равна $V_1 = 2\,см/с$. За какое время t муравей добежит от точки A до точки B, которая находится на расстоянии $l_2 = 2\,м$ от центра муравейника?

Решение

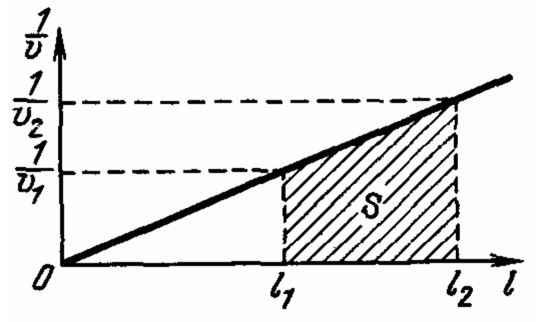
Скорость муравья меняется со временем не по линейному закону. Поэтому средняя скорость на разных участках пути различна, и пользоваться для решения известными формулами для средней скорости нельзя.

Разобьем путь муравья от точки A до точки B на малые участки, проходимые за одинаковые промежутки времени Δt. Тогда

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{V_{ср}},$$

где $V_{ср}$ – средняя скорость на данном участке Δl.

Изобразим зависимость величины $1/V_{ср}$ от l на пути от точки A до точки B. Этот график – отрезок прямой (см. рисунок); заштрихованная на рисунке площадь под этим отрезком численно равна искомому времени.



Вычислим ее:

$$S = \frac{1/V_1 + 1/V_2}{2}(l_2 - l_1).$$

Так как $\frac{1}{V_2} = \frac{1}{V_1}\frac{l_2}{l_1}$, то $S = \left(\frac{1}{2V_1} + \frac{1}{2V_1}\frac{l_2}{l_1}\right)(l_2 - l_1) = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2V_1 l_1}$.

Таким образом, муравей добежит от точки A до точки B за время

$$t = \frac{2^2 - 1^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 1} = 75c.$$

Ответ: $t = 75c$.