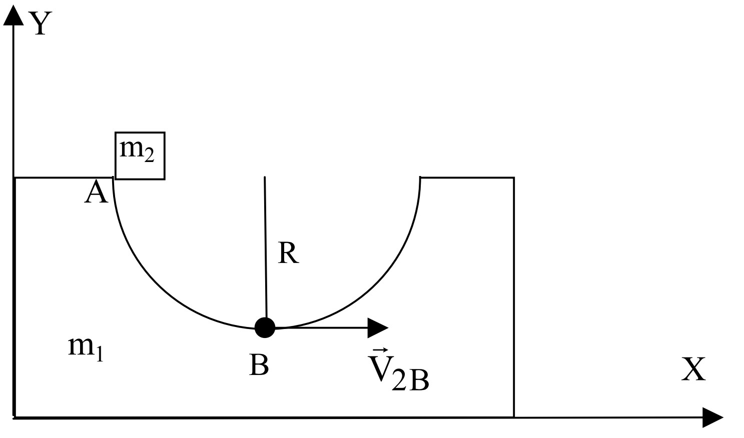
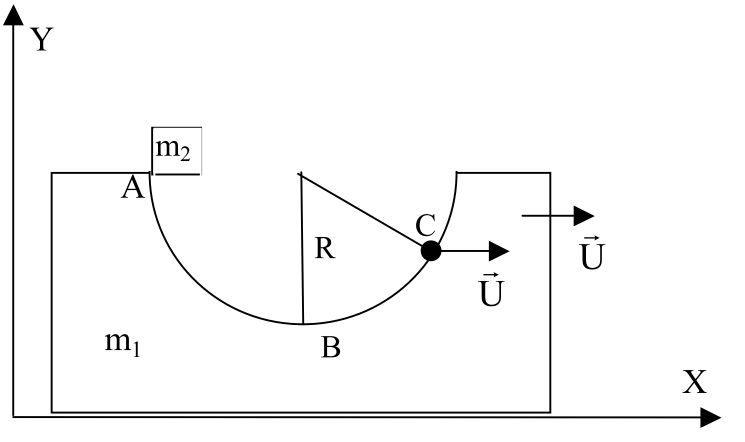
11 класс

Задача 1. На гладкой горизонтальной поверхности около стенки стоит симметричный брусок массы m_1 с углублением полусферической формы радиуса R. Из точки A без трения и начальной скорости соскальзывает маленькая шайба массой m_2. Какова максимальная скорость бруска при его последующем движении?

Решение

При движении от шайбы A к B брусок давит на стену, поэтому система брусок-шайба не замкнута. $P \neq const$. После прохождения шайбой точки B брусок начинает двигаться вправо ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$), растрачивая энергию шайбы. Поэтому C ниже A. После прохождения шайбой точки B система брусок-шайба становится замкнутой и для неё выполняются законы сохранения (на левую стенку брусок больше не давит).





$$\vec{P} = m_2 V_{2B} = const$$

$$m_2 gR = \frac{m_2 V_{2B}^2}{2}$$

$$V_{2B} = \sqrt{2gR}$$

Для точки C:

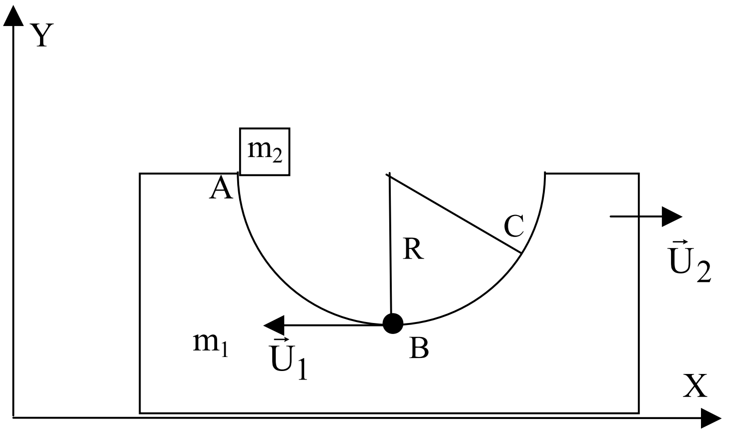
$$m_2\sqrt{2gR} = (m_1 + m_2)U$$

После точки C, шайба движется влево а брусок вправо и скорость бруска будет максимальна, когда шайба будет в точке B. Затем его скорость будет уменьшаться, т.к. после прохождения справа налево шайбой точки B сила на брусок действует влево.

Для точки B при движении шайбы справа налево:

$$E = const$$

$$P = m_2\sqrt{2gR} = \text{const}$$



$$\begin{cases} m_2 gR = \dfrac{m_2 U_2^2}{2} + \dfrac{m_2 U_1^2}{2} \\ m_2\sqrt{2gR} = m_1 U_1 - m_2 U_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m_2 gR - m_2 U_2^2 = m_1 U_1^2 \\ m_2\sqrt{2gR} - m_2 U_2 = m_1 U_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2\left(2gR - U_2^2\right) = m_1 U_1^2 \\ m_2\left(\sqrt{2gR} + U_2\right) = m_1 U_1 \end{cases} :$$

$$\sqrt{2gR} - U_2 = U_1 \qquad U_2 = \sqrt{2gR} - U_1$$

$$m_2\sqrt{2gR} = m_1 U_1 - m_2\left(\sqrt{2gR} - U_1\right) = m_1 U_1 - m_2\sqrt{2gR} + m_2 U_1$$

$$2m_2\sqrt{2gR} = (m_1 + m_2)U_1$$

$$U_1 = \frac{2m_2\sqrt{2gR}}{m_1 + m_2}$$

Задача 2. Определить концентрацию свободных электронов в меди. Необходимые Вам данные нужно взять в справочнике (Возможно, Вам понадобятся: плотность меди $8.6\cdot 10^3$ кг/м^3, молярная масса меди 64 г/моль, валентность меди – 1).

Решение

$$n = \frac{N}{V}$$

Возьмем 1 кубометр меди и подсчитаем в нем число свободных электронов. Так как медь одновалентна, то, полагаем, что при ее кристаллизации высвобождается на каждый атом один электрон

$$N = N_A \nu = N_A \frac{m}{\mu} = N_A \frac{\rho V}{\mu}$$

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_A \dfrac{\rho V}{\mu}}{V} = \frac{N_A \rho}{\mu} = \frac{6.02 \cdot 10^{23} \cdot 8.6 \cdot 10^{3}}{64 \cdot 10^{-3}} = 8.1 \cdot 10^{28}\ \text{м}^{-3}$$

Задача 3. К нерастянутой пружине жесткостью k подвесили груз массой m и отпустили. Определить амплитуду колебаний маятника и максимальную скорость груза.

Решение

Максимальное растяжение пружины равно сумме растяжения до положения равновесия и амплитуды. А найти его можно из закона сохранения энергии: работа силы тяжести равна потенциальной энергии максимально растянутой пружины.

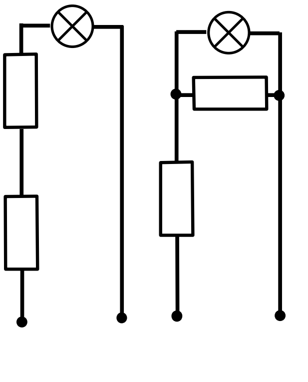
$$mgx_m = \frac{kx_m^2}{2}, \quad x_m = \frac{2mg}{k}, \quad x_m = x_0 + a$$

$$x_0 = \frac{mg}{k}, \Rightarrow a = x_m - x_0 = \frac{2mg}{k} - \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k}$$

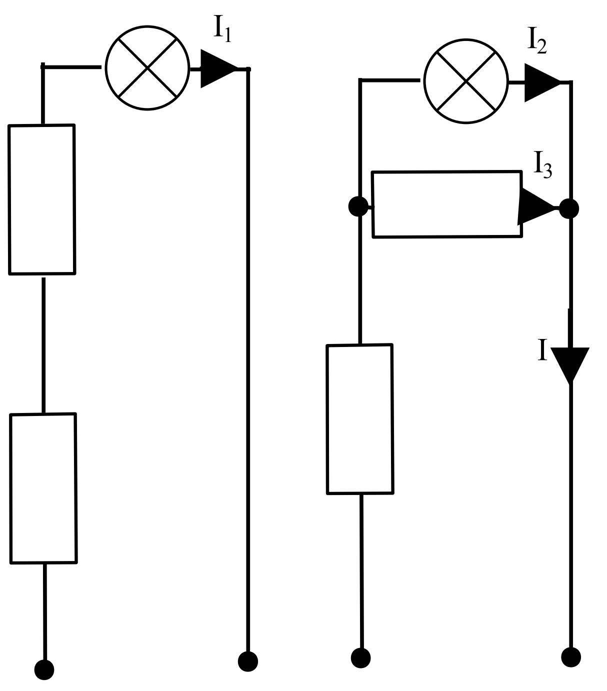
Максимальную скорость маятника найдем из закона сохранения энергии: кинетическая энергия груза при прохождении положения равновесия, равна потенциальной энергии пружины при амплитудном отклонении маятника от положения равновесия.

$$\frac{mV_m^2}{2} = \frac{ka^2}{2} \Rightarrow V_m = \sqrt{\frac{ka^2}{m}} = a\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{mg}{k}\sqrt{\frac{k}{m}} = g\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Задача 4. Лампочку и два одинаковых резистора сопротивлением R каждое подсоединили к источнику напряжения двумя способами, как показано на рисунке. В обоих случаях накал лампочки одинаков. Чему равно сопротивление лампочки? (Температурной зависимостью сопротивлений пренебречь)



Решение



Равенство накала означает равенство токов через лампочку.

Если r – сопротивление лампочки, то:

$$I_1 = \frac{U}{2R + r},$$

$$I_2 = I - I_3,$$

где

$$I_3 = I_2 \frac{r}{R},\ I = \frac{U}{R + \frac{Rr}{R + r}}$$

Получаем:

$$I_2 = \frac{U}{R + 2r}.$$

Приравнивая токи I_1 и I_2, и получим $r = R$.

Задача 5. По наклонной плоскости с коэффициентом трения μ и углом наклона α скользят вверх два тела массой m каждое, соединенные между собой невесомой нерастяжимой нитью. Эти тела связаны такой же нитью, перекинутой через невесомый блок, с телом массой m_3. Найти силу натяжения нити между телами одинаковой массы.

Решение

Используя свойство изотропности пространства и симметрией по отношению к повороту, представим нашу систему (рис. 1) из трех материальных точек, как целое, которое перемещается вдоль оси X (рис. 2).

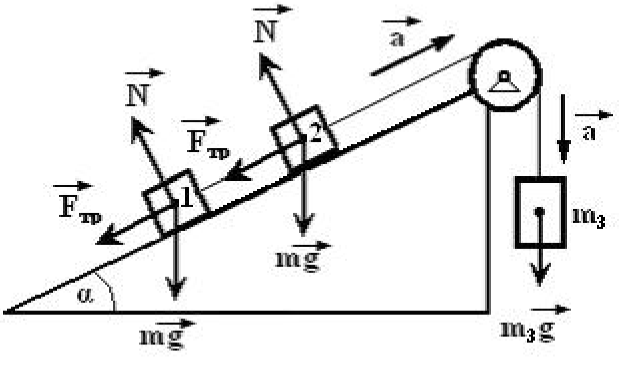


Рис. 1

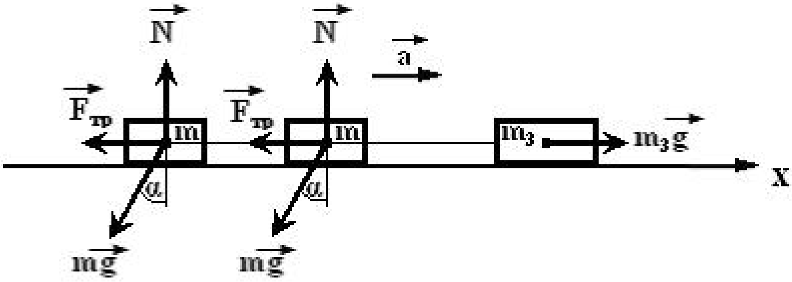


Рис. 2

Тогда закон его движения вместо трех уравнений движения для каждой материальной точки запишется одним уравнением

$$-2F_{mp} - 2mg\sin\alpha + m_3 g = (2m + m_3)a, \tag{1}$$

где F_{mp} – сила трения.

$$F_{mp} = \mu N = \mu mg\cos\alpha. \tag{2}$$

Из (1) и (2) находим

$$a = g\left(\frac{m_3 - 2m(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{2m + m_3}\right). \tag{3}$$

Из рассмотрения закона движения первого тела (рис. 3) найдем силу натяжения нити T.

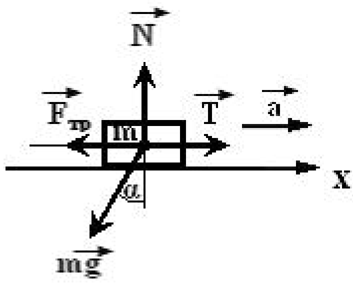


Рис. 3

$$T = ma + mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha). \tag{4}$$

С учетом формулы (3) получаем:

$$T = \frac{mm_3 g(1 + \mu\cos\alpha + \sin\alpha)}{2m + m_3}. \tag{5}$$