11 класс

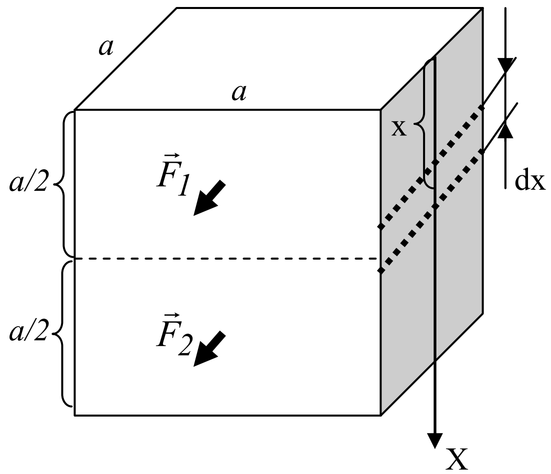
Задача 1. Во сколько раз отличается сила давления на верхнюю половину боковой грани куба, полностью заполненного жидкостью, от силы давления на нижнюю половину.

Решение

Простое решение выглядит так:

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{\frac{P_1+P_2}{2}S}{\frac{P_2+P_3}{2}S}=\frac{P_1+P_2}{P_2+P_3}=\frac{0+\rho g\frac{a}{2}}{\rho g\frac{a}{2}+\rho g a}=\frac{\rho g\frac{a}{2}}{\rho g\frac{a}{2}(1+2)}=\frac{1}{3}$$

При этом нужно доказать что $F=\frac{P_1+P_2}{2}S$.



Доказательство можно выполнить, например, интегрированием:

$$dF=\rho gx\cdot dS=\rho gx\cdot adx$$

$$F=\int_{a_1}^{a_2}\rho gx\cdot adx=\rho ga\int_{a_1}^{a_2}xdx=\rho ga\left.\frac{x^2}{2}\right|_{a_1}^{a_2}=\rho ga\frac{a_2^2-a_1^2}{2}=$$

$$=\rho ga\frac{(a_2-a_1)(a_2+a_1)}{2}=\rho ga\frac{h(a_2+a_1)}{2}=\frac{(\rho ga_2+\rho ga_1)}{2}ah=\frac{P_1+P_2}{2}S$$

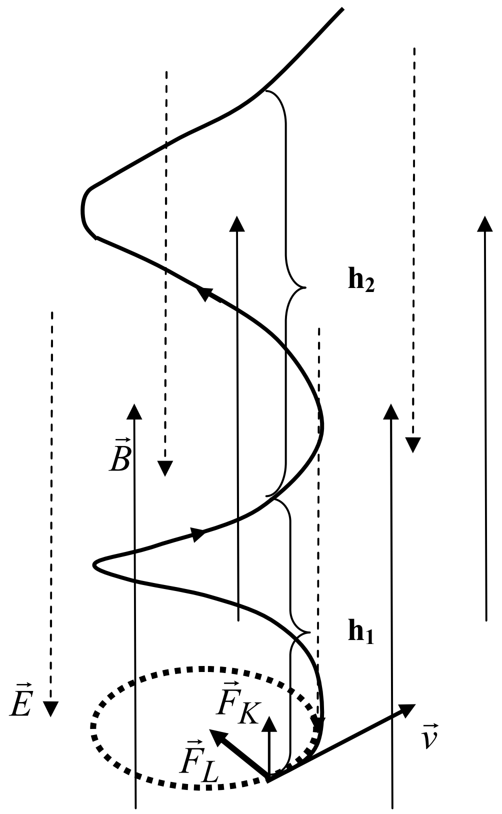
Доказательство также может быть выполнено графически.

Ответ: в 3 раза меньше.

Задача 2. Электрон, влетает со скоростью $\vec{v}$ в область занятую параллельными однородными магнитным ($\vec{B}$) и электрическим ($\vec{E}$) полями, направленными в противоположные стороны. Скорость электрона в начальный момент перпендикулярна силовым линиям полей. По какой траектории будет двигаться электрон, и каковы ее параметры?

Решение

Если бы электрического поля не было, электрон двигался бы по окружности (см. рис.), не меняя по модулю скорости v, под действием силы Лоренца $\vec{F}_L$. Однако, при действии силы со стороны электрического поля $\vec{F}_K$ электрон будет приобретать вертикальную скорость. Так как силы $\vec{F}_L \perp \vec{F}_K$, то движение можно рассматривать как сложение движений: по окружности постоянного радиуса R (с постоянным периодом вращения T) под действием силы Лоренца и вертикального равноускоренного, под действием электрического поля. Поэтому траекторией будет неравномерная спираль.



$$F_Л = ma, \quad qV_\perp B = \frac{mV_\perp^2}{R}, \quad R = \frac{mV_\perp}{qB},$$

$$h = V_{||}T, \quad T = \frac{2\pi R}{V_\perp} = \frac{2\pi m V_\perp}{V_\perp qB} = \frac{2\pi m}{qB} = const,$$

$$t = 0, \quad V_{||} = 0, \quad a = \frac{F_{Эл}}{m} = const,$$

$$h_1 = \frac{aT^2}{2}, \quad V_1 = aT,$$

$$h_2 = V_1 T + \frac{aT^2}{2} = aT^2 + \frac{aT^2}{2} = 3\frac{aT^2}{2}, \quad V_2 = V_1 + aT_1 = 2aT,$$

$$h_3 = V_2 T + \frac{aT^2}{2} = 2aT^2 + \frac{aT^2}{2} = 5\frac{aT^2}{2}.$$

Получаем, что шаг раскручивающейся спирали меняется как пути при равноускоренном движении за равные промежутки времени (для нас период T): $h_1 : h_2 : h_3 : h_4 = 1:3:5:7$.

Ответ: $h_1 : h_2 : h_3 : h_4 = 1:3:5:7$.

Задача 3. В темный сосуд с водой опущена трубка. По трубке через воду пропускают пар при температуре **100 °С**. В начале масса воды увеличивалась, но через некоторое время масса воды перестает увеличиваться, хотя пар по-прежнему пропускают. Первоначальная масса воды **230 г**, а в конце масса **276,2 г**. Какова первоначальная температура в сосуде? Потерями тепла пренебречь.

Решение

Пар, остывая, конденсируется и нагревает воду до 100 °С, и по достижении этой температуры пар, проходя через воду, не конденсируется.

Масса сконденсировавшегося пара $\Delta m = 276,2 - 230 = 46,2$ г. Количество отданного паром тепла:

$$Q_1 = r\Delta m,$$

где $r = 2.3 \cdot 10^6$ Дж/кг – удельная теплота парообразования воды.

Это тепло идет на нагревание 230 г. воды.

$$Q_1 = Q_2$$

$$r\Delta m = Cm\left(100 - t\right)$$

$$\left(100 - t\right) = \frac{r\Delta m}{Cm} \qquad t = 100 - \frac{r\Delta m}{Cm} = -10^o C$$

Это уже не вода, а лед! А как же опустить трубку?

При конденсации пара выделится количество теплоты:

$Q_1 = r\Delta m = 2,6 \cdot 10^6 \cdot 46,2 \cdot 10^{-3} = 1,20 \cdot 10^5$ Дж.

Для нагревания воды от нуля градусов потребовалось бы:

$Q_2 = Cm\Delta t = 4,2 \cdot 10^3 \cdot 230 \cdot 10^{-3} \cdot \left(100 - 0\right) = 9,66 \cdot 10^4$ Дж.

Тогда с водой был лёд при нуле градусов и на его плавление пошло

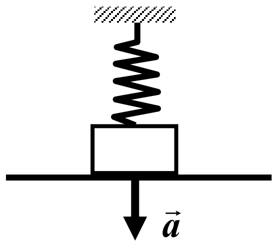
$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = \lambda m_3$.

$$m_3 = \frac{\Delta Q}{\lambda} = \frac{2,34 \cdot 10^4}{3,30 \cdot 10^5} = 7,09 \cdot 10^{-2} = 71 \text{г.}$$

В сосуде было: **71 г.** льда и **159 г.** воды при температуре **0 °С**.

Ответ: 0 °С.

Задача 4. Подставку, на которой лежит тело, подвешенное на пружине, начинают опускать с ускорением $\boldsymbol{a}$. В начальный момент пружина не растянута. Какова будет амплитуда колебаний маятника? Масса тела $\boldsymbol{M}$, жёсткость пружины $\boldsymbol{k}$.



Решение

После отрыва подставки на тело действует только сила упругости пружины и оно будет совершать колебания с амплитудой А около положения равновесия x_0. Максимальное смещение его будет равно их сумме:

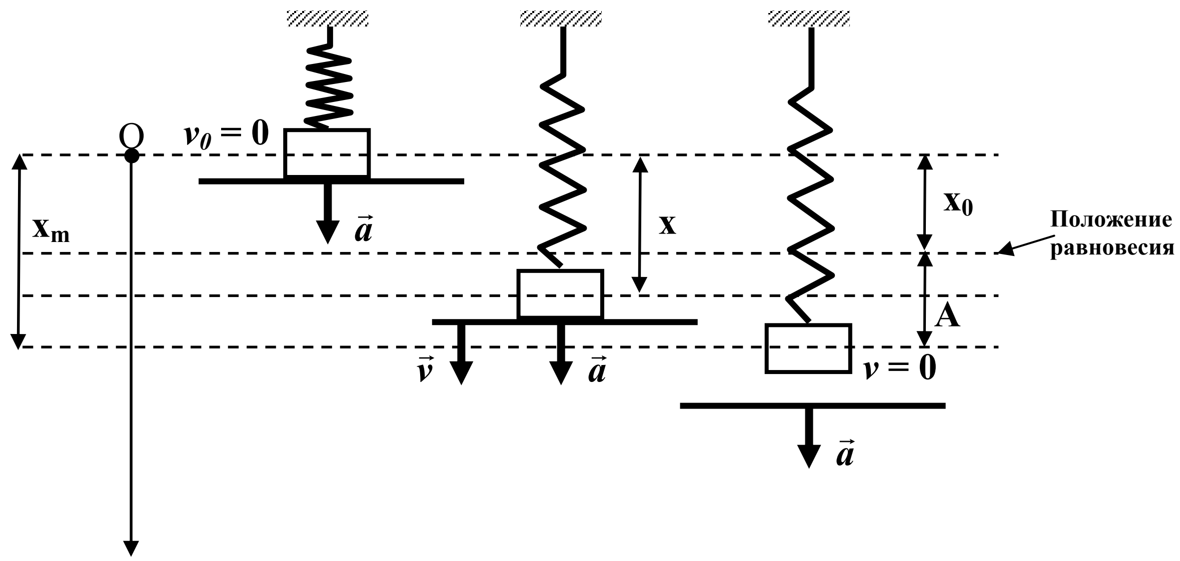
$$x_m = x_0 + A.$$

Положение равновесия тела x_0 находим из условия:

$$Mg = kx_0$$

$$x_0 = \frac{Mg}{k}$$

Амплитуда колебаний будет равна:



$$A = x_m - x_0.$$

Найдем максимальное растяжение пружины или смещение груза. На тело, движущееся вместе с подставкой, действуют сила тяжести, сила упругости и сила реакции опоры. Их проекции на вертикальную ось, направленную вниз равны:

$$Mg - kx - T = Ma.$$

В момент отрыва сила реакции становится равной нулю и второй закон Ньютона имеет вид:

$$Mg - kx = Ma.$$

К этому моменту времени деформация пружины равна расстоянию, пройденному телом:

$$x = \frac{at^2}{2},$$

$$Mg - k\frac{at^2}{2} = Ma$$

$$k\frac{at^2}{2} = M(g-a)$$

$$t = \sqrt{\frac{2M(g-a)}{ka}}$$

Максимальное растяжение пружины или смещение груза найдем из закона сохранения механической энергии для двух состояний маятника – момента максимального смещения груза и момента отрыва подставки:

$$\frac{kx_m^2}{2} - mgx_m = \frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} - mgx$$

$$t = \sqrt{\frac{2M(g-a)}{ka}}$$

$$V = at = a\sqrt{\frac{2M(g-a)}{ka}} = \sqrt{\frac{2Ma(g-a)}{k}}$$

$$x = \frac{at^2}{2} = \frac{M(g-a)}{k}$$

$$\frac{kx_m^2}{2} - Mgx_m = \frac{M^2a(g-a)}{k} + \frac{M^2k(g-a)^2}{2k} - \frac{M^2g(g-a)}{k}$$

$$\frac{kx_m^2}{2} - Mgx_m = \frac{M^2(a-g)(g-a)}{k} + \frac{M^2(g-a)^2}{2k}$$

$$\frac{kx_m^2}{2} - Mgx_m = -\frac{M^2(g-a)^2}{k} + \frac{M^2(g-a)^2}{2k}$$

$$\frac{kx_m^2}{2} - Mgx_m = -\frac{M^2(g-a)^2}{2k}$$

$$kx_m^2 - 2Mgx_m + \frac{M^2(g-a)^2}{k} = 0$$

$$x_m = \frac{Mg \pm M\sqrt{a(2g-a)}}{k} = \frac{Mg}{k} \pm \frac{M\sqrt{a(2g-a)}}{k}$$

$$x_m = x_0 + A = \frac{Mg}{k} + \frac{M}{k}\sqrt{a(2g-a)}.$$

Если *a*=*g*, то $x_m = \frac{Mg}{k} + \frac{Mg}{k} = \frac{2Mg}{k}; \quad A = \frac{Mg}{k}$.

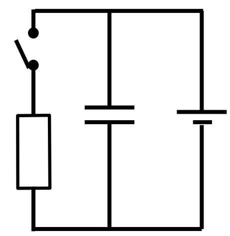
Если *a*=*0*, то $x_m = \frac{Mg}{k}$ и *A*=*0*, колебаний нет.

Если *0*<*a*<*g*, то амплитуда колебаний $0 < A < \frac{Mg}{k}$,

$$A = \frac{M\sqrt{a(2g-a)}}{k}.$$

Ответ: $A = \frac{M\sqrt{a(2g-a)}}{k}$.

Задача 5. К источнику постоянного тока подключены, параллельно соединенные, резистор и конденсатор. Внутреннее сопротивление источника в **4** раза меньше сопротивления резистора. Последовательно с резистором находится ключ, замыкающий и размыкающий цепь резистора. Определить отношение заряда на конденсаторе при разомкнутом и замкнутом ключе.



Решение

При замкнутом ключе ток в цепи

$$J = \frac{\varepsilon}{r+R} \Rightarrow \varepsilon = Jr + JR = U_1 + U_2,$$

где U_1 - падение напряжения внутри источника, а U_2 - на резисторе, поскольку конденсатор включен параллельно резистору, то и на нем. Тогда заряд на конденсаторе будет равен:

$$q_1 = CU_2 = CJR = \frac{C\varepsilon R}{r+R} = \frac{C\varepsilon R}{\frac{R}{4}+R} = \frac{4C\varepsilon R}{5R} = \frac{4C\varepsilon}{5}$$

При разомкнутом ключе ток в цепи резистора не течет и напряжение на конденсаторе равно ЭДС источника, а заряд на нем

$$q_2 = C\varepsilon$$

Тогда отношение зарядов: $\frac{q_2}{q_1} = \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{q_2}{q_1} = \frac{5}{4}$.