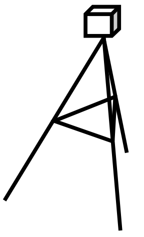
11 класс

Задача 1. На треножнике находится груз массой **m**. В средней части ноги треножника соединены нитями. Найдите силу натяжения нитей, если ноги располагаются под углом **60º** к горизонту. В верхней части ноги соединены шарнирно. Силой трения и массой треножника пренебречь.



Решение

Рассмотрим равновесие одной ноги.

Запишем уравнение моментов сил относительно точки O:

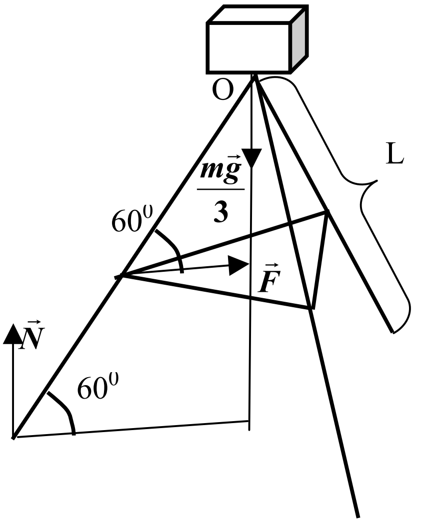
$$F\frac{L}{2}\sin 60^0 - NL\cos 60^0 = 0, \qquad (1)$$

где F - равнодействующая сил натяжения нитей T_1 и T_2, действующих на середину ноги.

Эту силу найдём по теореме косинусов:

$$F = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 - 2T_1T_2\cos(180 - 2\cdot 30)} = T\sqrt{2(1+\cos 60)}, \qquad (2)$$

где $T_1 = T_2 = T$.



После упрощения (1), получим:

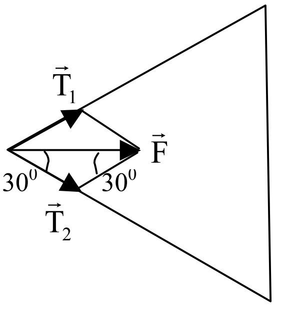
$$\frac{\sqrt{3}}{2}F = N. \qquad (3)$$

Из условия равновесия проекций сил на вертикальную ось:

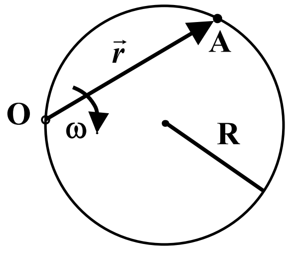
$$N = \frac{mg}{3}. \qquad (4)$$

Тогда, подставив (2) и (4) в равенство (1), найдём T: $T = \frac{2}{9}mg$.

Ответ: $T = \frac{2}{9}mg$.



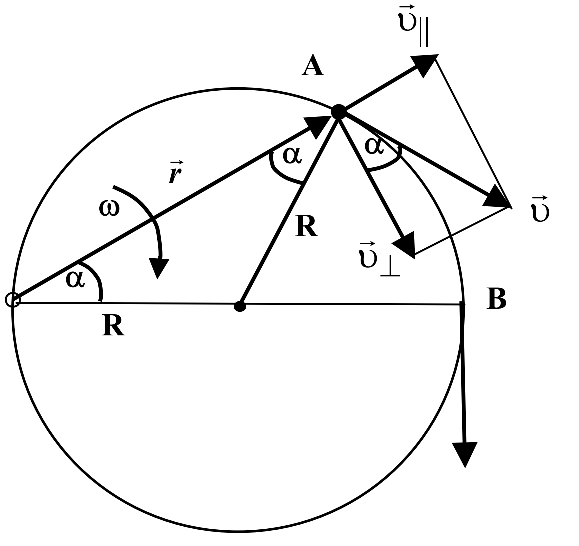
Задача 2. Точка **A** движется по окружности радиуса **R = 50 см** таким образом, что радиус-вектор $\vec{r}$, проведённый к этой точке от точки O, поворачивается с одинаковой угловой скоростью **ω = 0,4 рад/с**. Найдите скорость точки **A**.



Решение

Скорость точки направлена всегда по касательной к окружности. Разложим скорость точки A в произвольном положении на перпендикулярную и параллельную $\vec{r}$ составляющие:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{\parallel} + \vec{\upsilon}_{\perp}.$$



Для каждого положения точки A угловая скорость ω будет задавать $\upsilon_{\perp}$, так как r меняется:

$$\upsilon_{\perp} = \omega r. \qquad (1)$$

Из рисунка видим, что

$$\upsilon_{\perp} = \upsilon \cos\alpha, \qquad (2)$$

а r выразим через R и α по теореме косинусов:

$$r = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2\cos(180 - 2\alpha)} = \sqrt{2}R\sqrt{1 + \cos 2\alpha} = 2R\cos\alpha. \qquad (3)$$

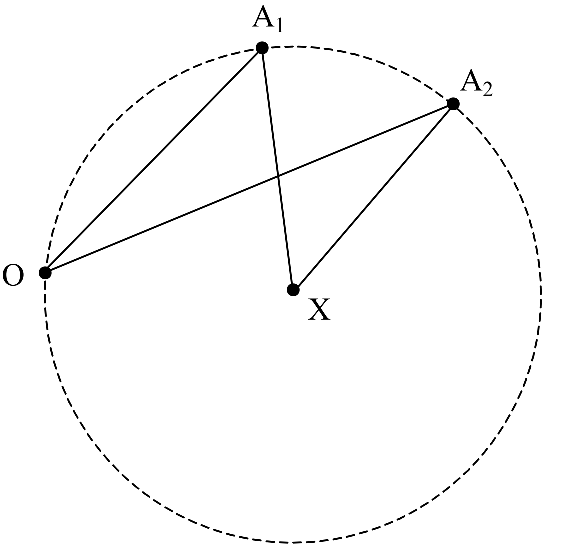
После подстановки (2) и (3) для $\upsilon_{\perp}$ и r в (1) получим:

$$\upsilon = \omega \cdot 2R = 0{,}4 \text{ м/с}.$$

Так как положение точки A выбрано произвольно, то сказанное справедливо для всего движения. Так как ω = const по условию, то модуль скорости не меняется и равен 0,4 м/с.

Ответ: $\upsilon = \omega \cdot 2R = 0{,}4$ *м/с.*

Альтернативный вариант решения **задачи 2** (предложен одним из участников олимпиады)



Рассмотрим окружность радиуса R с центром в точке X.

Допустим, за одну секунду точка A переместилась из положения A_1 в положение A_2.

Тогда $\angle A_1OA_2 = 0{,}4$ рад.

В то же время, $\angle A_1OA_2$ является вписанным в окружность. Как известно, вписанный угол равен половине соответствующего ему центрального угла, следовательно:

$$\angle A_1XA_2 = 2\angle A_1OA_2 = 0{,}8 \text{ рад.}$$

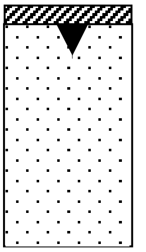
Таким образом, угловая скорость точки относительно центра окружности равна:

$$\varpi_X = 0{,}8 \text{ рад,}$$

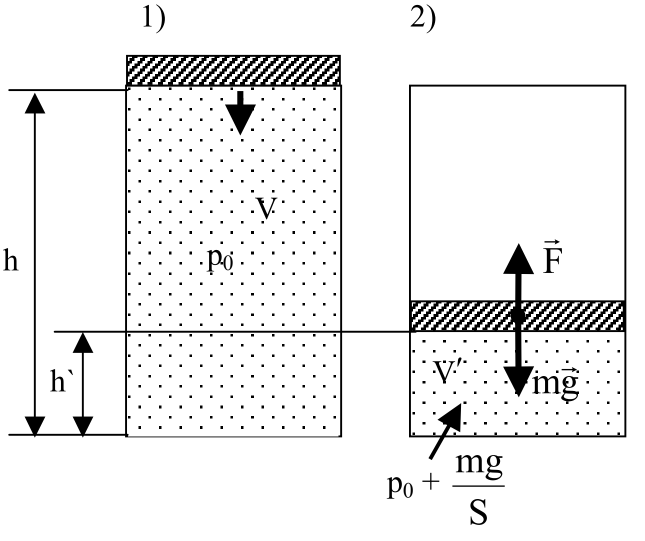
откуда: $v = \varpi_X R = 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}4$ (м/с).

Ответ: *v = 0,4 м/с.*

Задача 3. Массивный поршень массой **m** и сечением **S** удерживали в верхней части цилиндра высотой **h**. Давление газа под поршнем и над поршнем равнялось атмосферному $\mathbf{p_0}$. На какое максимальное значение изменится температура газа в цилиндре после того, как поршень отпустили и он занял новое положение? Трением поршня о стенки цилиндра пренебречь. Количество вещества газа под поршнем равнялось ν.



Решение



Максимальное увеличение температуры будет при адиабатном процессе. Если пренебречь при опускании поршня в конечное положение теплоёмкостью поршня и цилиндра, то согласно первому началу термодинамики работа силы тяжести пошла на увеличение внутренней энергии газа:

$$A = \Delta U \text{ или } mg(h - h') = \frac{3}{2}\nu R\Delta T. \qquad (1)$$

Из уравнений состояния газа в первоначальный и конечный моменты

$$p_0 V = \nu R T_0,$$

$$\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)V' = \nu R T,$$

после вычитания из второго первое, получим:

$$\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)V' - p_0 V = \nu R\Delta T.$$

Или, выразив объёмы газа через высоты и площади

$$S\left(\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)h' - p_0 h\right) = \nu R\Delta T. \qquad (2)$$

Выражение (1) и (2) образуют систему с двумя неизвестными: h' и искомой ΔT.

Из (1) выразим h': $h' = h - \frac{3}{2}\frac{\nu R\Delta T}{mg}$,

и подставив в (2) получим выражение с одним неизвестным ΔT:

$$S\left(\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)\left(h - \frac{3}{2}\frac{\nu R\Delta T}{mg}\right) - p_0 h\right) = \nu R\Delta T\,.$$

Группируя члены с ΔT, получим:

$$\nu R\Delta T\left(1 + \frac{3}{2}\left(\frac{p_0 S + mg}{mg}\right)\right) = mgh\,.$$

Откуда, окончательно получим: $\Delta T = \dfrac{2mgh}{\nu R\left(5 + 3\dfrac{p_0 S}{mg}\right)} = \dfrac{2m^2 g^2 h}{\nu R(5mg + 3p_0 S)}$.

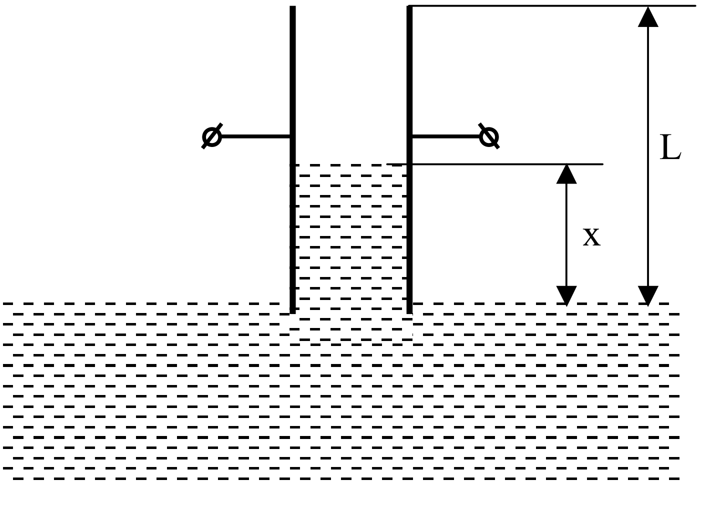
Ответ: $\Delta T = \dfrac{2mgh}{\nu R\left(5 + 3\dfrac{p_0 S}{mg}\right)} = \dfrac{2m^2 g^2 h}{\nu R(5mg + 3p_0 S)}$.

Задача 4. Плоский воздушный конденсатор вставляют вертикально в широкий сосуд с диэлектрической жидкостью, плотностью **ρ = 0,9 г/см³** и диэлектрической проницаемостью **ε = 3**. Конденсатор подключен к источнику ЭДС напряжением **U = 1 кВ**. На какую высоту поднимется жидкость в конденсаторе, как только нижняя часть пластин войдёт в жидкость? Расстояние между пластинами **d = 1 мм**.

Решение

Жидкий диэлектрик при поляризации втягивается в область большего электрического поля. Пусть он поднялся до высоты x из возможной L.

Тогда ёмкость конденсатора увеличится и её можно найти как сумму параллельно соединенных (воздушного и жидкостного) конденсаторов:



$$C(x)=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 ax}{d}+\frac{\varepsilon_0 a(L-x)}{d}=\frac{\varepsilon_0 a(L+x(\varepsilon-1))}{d}.$$

Ёмкость будет линейно зависеть от высоты поднятия диэлектрика.

Так как конденсатор подключен к источнику ЭДС, то энергия конденсатора увеличится за счёт работы сторонних сил источника (будет сообщён конденсатору дополнительный заряд). Она будет равна:

$$W=\frac{C(x)U^2}{2}=\frac{\varepsilon_0 a(L+x(\varepsilon-1))}{2d}U^2.$$

При увеличении столба жидкости на Δx энергия конденсатора увеличится на

$$\Delta W=\frac{\varepsilon_0 a(\varepsilon-1)}{2d}\Delta x U^2.$$

Это увеличение энергии конденсатора будет равно работе силы, втягивающей жидкость:

$$F\Delta x=\frac{\varepsilon_0 a(\varepsilon-1)}{2d}\Delta x U^2.$$

Откуда втягивающая сила равна:

$$F=\frac{\varepsilon_0 a(\varepsilon-1)}{2d}U^2.$$

В конечном состоянии эта сила уравновешивается весом столба поднятой жидкости высотой h:

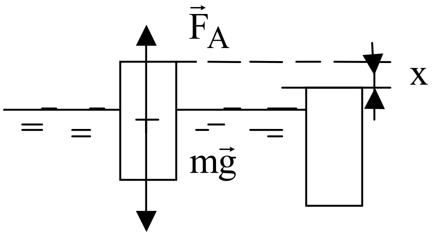
$$\frac{\varepsilon_0 a(\varepsilon-1)}{2d}U^2=\rho g a d h.$$

Откуда: $h=\dfrac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)}{2\rho g d^2}U^2$.

Ответ: $h=\dfrac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)}{2\rho g d^2}U^2$

Задача 5. Поплавок удочки длиной **10 см** на **2/3** длины погружен в воду. После поклевки он начал колебаться. Определить период колебаний поплавка. Колебания считать гармоническими, незатухающими, а поплавок цилиндрическим. Действием на поплавок со стороны грузила пренебречь.

Решение



«Гармонической силой», вызывающей колебания поплавка, в данном случае будет разность силы Архимеда и силы тяжести:

$$-kx = ma$$

$$-\left(\rho_{ж} V_2 g - mg\right) = ma \, .$$

Так как поплавок цилиндрический, то $V = SL$. В результате имеем:

$$-\left(\rho_{ж} S\left(\frac{2}{3}l + x\right)g - mg\right) = ma \, ,$$

$$ma + \left(\rho_{ж} S\left(\frac{2}{3}l + x\right)g - mg\right) = 0 \, .$$

Так как масса поплавка: $m = \rho_T V = \rho_T S l$, то

$$ma + \left(\rho_{ж} S\left(\frac{2}{3}l + x\right)g - \rho_T S l g\right) = 0 \, .$$

В состоянии равновесия $F_A - mg = 0$. Следовательно:

$$\rho_{ж} V_1 g - mg = 0 \, ,$$

$$\rho_{ж} \frac{2}{3} V g = \rho_T V g \, .$$

Отсюда получаем условие плавания поплавка:

$$\rho_T = \frac{2}{3}\rho_{ж} \, .$$

Откуда:

$$ma + \left(\rho_{ж} S\left(\frac{2}{3}l + x\right)g - \frac{2}{3}\rho_{ж} S l g\right) = 0 \, ,$$

или

$$ma + \rho_{ж} Sg\left(\left(\frac{2}{3}l + x\right) - \frac{2}{3}l\right) = 0 \cdot$$

Раскрыв скобки, получаем:

$$ma + \rho_{ж} Sgx = 0 \cdot$$

Разделив на *m*, имеем:

$$a + \frac{\rho_{ж} Sg}{m} x = 0 \cdot$$

Получаем уравнение гармонических колебаний:

$$a + \omega^2 x = 0 \cdot$$

где $\omega^2 = \dfrac{\rho_{ж} Sg}{m}$.

Преобразовав это выражение с учетом того, что $m = \rho_T V = \rho_T Sl = \dfrac{2}{3}\rho_{ж} Sl$, получим:

$$\omega^2 = \frac{\rho_{ж} Sg}{\frac{2}{3}\rho_{ж} Sl} = \frac{3g}{2l}.$$

Найдём период:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3g}{2l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}.$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10}} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}51\, c.$$

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2l}{3g}} = 0{,}51\, c.$