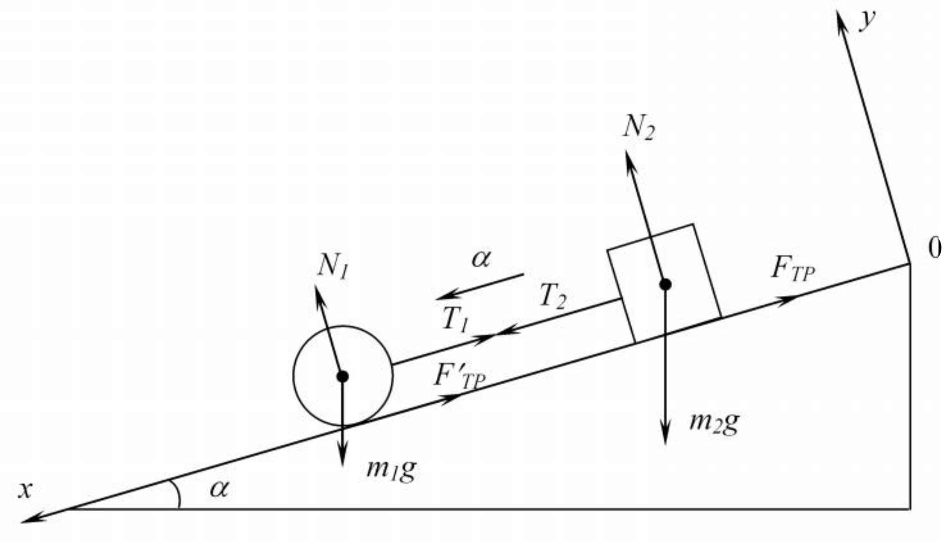
11 класс

Задача 1. На наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$ к горизонту находится сплошной однородный цилиндр, масса которого $m_1 = 8кг$, а радиус $R = 2см$. К оси цилиндра с помощью нити присоединен груз массой $m_2 = 4кг$, который также находится на плоскости. С каким ускорением a движутся оба тела? Коэффициент трения между кубом и плоскостью $\mu = 0,6$. Считать, что цилиндр скатывается с плоскости без проскальзывания.

Решение

Динамический способ решения. Выберем координатные оси и укажем силы, действующие на куб и цилиндр (см. рисунок).



Запишем уравнения второго закона Ньютона в проекциях на оси Ox и Oy для цилиндра:

$$m_1 g \sin\alpha - F'_{TP} - T_1 = m_1 a, \quad (1)$$

$$N_1 - m_1 g \cos\alpha = 0, \quad (2)$$

для куба:

$$T_2 + m_2 g \sin\alpha - F_{TP} = m_2 a, \quad (3)$$

$$N_2 - m_2 g \cos\alpha = 0. \quad (4)$$

Так как масса нити пренебрежимо мала, то $T_1 = T_2$.

Из выражения (4) получаем, что $N_2 = m_2 g \cos\alpha$, а, следовательно, $F_{TP} = \mu N_2 = \mu m_2 g \cos\alpha.$ Так как цилиндр не проскальзывает, то угловое ускорение цилиндра равно $\varepsilon = a/R.$

Запишем основное уравнение динамики вращательного движения для цилиндра:

$$F'_{TP} R = I\varepsilon,$$

где I - момент инерции цилиндра. Отсюда следует, что

$$F'_{TP} = \frac{I\varepsilon}{R} = \frac{Ia}{R^2} = \frac{m_1 R^2}{2} \cdot \frac{a}{R^2} = \frac{m_1 a}{2}. \qquad (5)$$

Складывая уравнения (1) и (3), получим:

$$(m_1 + m_2) g \sin\alpha - F_{TP} - F'_{TP} = (m_1 + m_2) a.$$

Подставим в последнее равенство полученные значения для сил трения F_{TP} и F'_{TP}:

$$(m_1 + m_2) g \sin\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha - \frac{m_1 a}{2} = (m_1 + m_2) a.$$

Откуда

$$a = \frac{(m_1 + m_2)\sin\alpha - \mu m_2 \cos\alpha}{{}^3\!/_2\, m_1 + m_2} g.$$

Подстановка числовых данных приводит к ответу $a = 2{,}46\, м/c^2$.

Энергетический способ решения. За время t после начала движения цилиндр и куб приобретут скорость $V = at$, переместятся вдоль наклонной плоскости на расстояние $l = at^2/2$ и опустятся по вертикали на

$$h = l \sin\alpha = \frac{at^2}{2} \sin\alpha.$$

Их потенциальная энергия уменьшится при этом на величину:

$$\Delta E_n = (m_1 + m_2) gh = (m_1 + m_2) g \frac{at^2}{2} \sin\alpha.$$

В этот момент времени кинетическая энергия цилиндра и куба будет равна:

$$E_k = \frac{(m_1 + m_2)}{2} V^2 + \frac{m_1 R^2 V^2}{4R^2} = \frac{{}^3\!/_2 (m_1 + m_2)}{2} V^2 = \frac{{}^3\!/_2 (m_1 + m_2)}{2} a^2 t^2.$$

За это же время сила трения куба о плоскость совершит работу

$$A_{TTP} = F_{TP} l = \mu m_2 g \cos\alpha \frac{at^2}{2}.$$

Из закона сохранения энергии можно записать равенство:

$$\Delta E_n = E_k + A_{TP}.$$

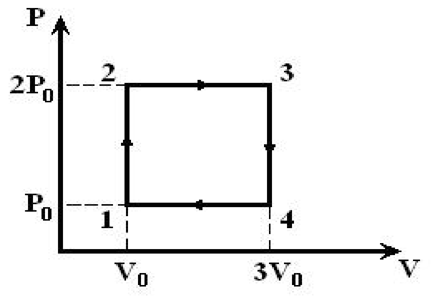
Из него следует

$$a = \frac{(m_1 + m_2)\sin\alpha - \mu m_2 \cos\alpha}{{}^3\!/_2\, m_1 + m_2} g.$$

Подстановка числовых данных приводит к ответу $a = 2{,}46\, м/c^2$.

Ответ: $a = 2{,}46\, м/c^2$.

Задача 2. Одноатомный идеальный газ совершает процесс, показанный на рисунке. Найти КПД цикла.



Решение

КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q}, \qquad (1)$$

где A – совершенная газом за цикл работа,

Q – количество теплоты, полученное за цикл от нагревателя.

Из рисунка видно, что

$$Q = Q_{12} + Q_{23}, \qquad (2)$$

где Q_{12} – теплота, полученная в процессе 1–2,

Q_{23} – теплота, полученная в процессе 2–3.

$$Q_{12} = \nu C_V\left(T_2 - T_1\right) = \frac{3}{2}\nu R T_1. \qquad (3)$$

$$Q_{23} = \nu C_V\left(T_3 - T_2\right) = \frac{5}{2}\nu R \cdot 4T_1 = 10\nu RT. \qquad (4)$$

где ν – количество вещества,

C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Из (1) – (4) найдем

$$\eta = \frac{2P_0V_0}{11{,}55\nu RT}. \qquad (5)$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона

$$P_0V_0 = \nu RT_1. \qquad (6)$$

Отсюда окончательно находим

$$\eta = \frac{4}{23} \approx 0{,}17.$$

Ответ: $\eta = \frac{4}{23} \approx 0{,}17$.

Задача 3. Два плоских конденсатора емкостью C_1 и C_2 , обладающих зарядами q_1 и q_2, соединяют между собой. Найти энергию ,которая выделится при перезарядке конденсаторов в двух случаях: а) соединены одноименно заряженные пластины; б) соединены разноименно заряженные пластины.

Решение

1. Соединены одноименно заряженные пластины конденсаторов

Закон сохранения заряда.

$$q_1 - q_2 = q'_1 - q'_2, \tag{1}$$

где q'_1 и q'_2 – заряды на обкладках конденсатора после соединения.

$$q'_1/C_1 = q'_2/C_2 = (q_1 - q_2)/C, \tag{2}$$

где C – емкость батареи

$$C = C_1 + C_2 \tag{3}$$

Закон сохранения энергии

$$W_1 = W_2 + Q, \tag{4}$$

где W_1 и W_2 - соответственно энергии батареи до и после соединения

$$W_1 = q_1^2/2C_1 + q_2^2/2\,C_2 \tag{5}$$

$$W_2 = q'^2_1/2C_1 + q'^2_2/2\,C_2\,, \tag{6}$$

Q - энергия, выделяемая при перезарядке конденсаторов.

Из (1) – (6) найдем

$$Q = (\,q_1\,C_2 + q_2\,C_1\,)^2/2C_1\,C_2(C_1 + C_2). \tag{7}$$

2. Соединены разноименно заряженные пластины конденсаторов

Закон сохранения заряда.

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2, \tag{8}$$

где q'_1 и q'_2 –заряды на обкладках конденсатора после соединения.

$$q'_1/C_1 = q'_2/C_2 = (q_1 + q_2)/C, \tag{9}$$

где C – емкость батареи

$$C = C_1 + C_2. \tag{10}$$

Закон сохранения энергии

$$W_1 = W_2 + Q, \tag{11}$$

где W_1 и W_2 - соответственно энергии батареи до и после соединения

$$W_1 = q_1^2/2C_1 + q_2^2/2\,C_2, \tag{12}$$

$$W_2 = q'^2_1/2C_1 + q'^2_2/2\,C_2, \tag{13}$$

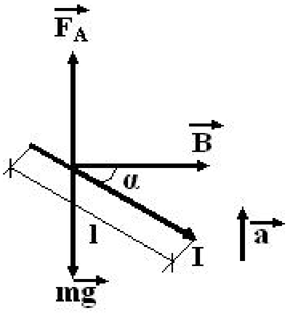
Q - энергия, выделяемая при перезарядке конденсаторов.

Из (8) – (13) найдем

$$Q = (q_1\,C_2 + q_2\,C_1)^2/2C_1\,C_2(C_1 + C_2). \tag{14}$$

Задача 4. Прямоугольный проводник массой $m = 0{,}3\,кг$, по которому ток силой $I = 5A$, поднимается вертикально вверх в однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}4\,Тл$, двигаясь под углом $\alpha = 30^\circ$ к линиям магнитной индукции. Через время $t = 2c$ после начала движения он приобрел скорость $V = 4\,м/c$. Найти длину l проводника.

Решение



По второму закону Ньютона

$$-mg + F_A = ma\,, \tag{1}$$

где

$$F_A = IBl\sin\alpha \text{ – сила Ампера,} \tag{2}$$

$$a = \frac{V}{t} \text{ – ускорение.} \tag{3}$$

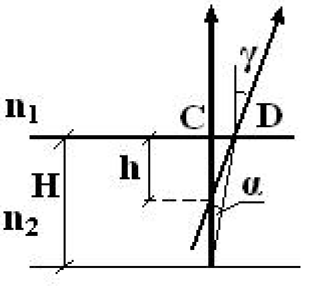
Из (1) – (3) находим

$$l = \frac{m\left(V/t + g\right)}{BI\sin\alpha}.$$

Ответ: $l = \dfrac{m\left(V/t + g\right)}{BI\sin\alpha}.$

Задача 5. Найти кажущуюся глубину водоема h, если смотреть на него сверху, перпендикулярно его поверхности.

Решение



Из рисунка следует

$$CD = H \cdot tg\alpha = h \cdot tg\gamma \,. \tag{1}$$

Отсюда

$$h = H\frac{tg\alpha}{tg\gamma} \approx H\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\,. \tag{2}$$

Закон преломления света

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_1}{n_2}\,. \tag{3}$$

С учетом (3) уравнение (2) запишется в виде

$$h = H\frac{n_1}{n_2}\,. \tag{4}$$