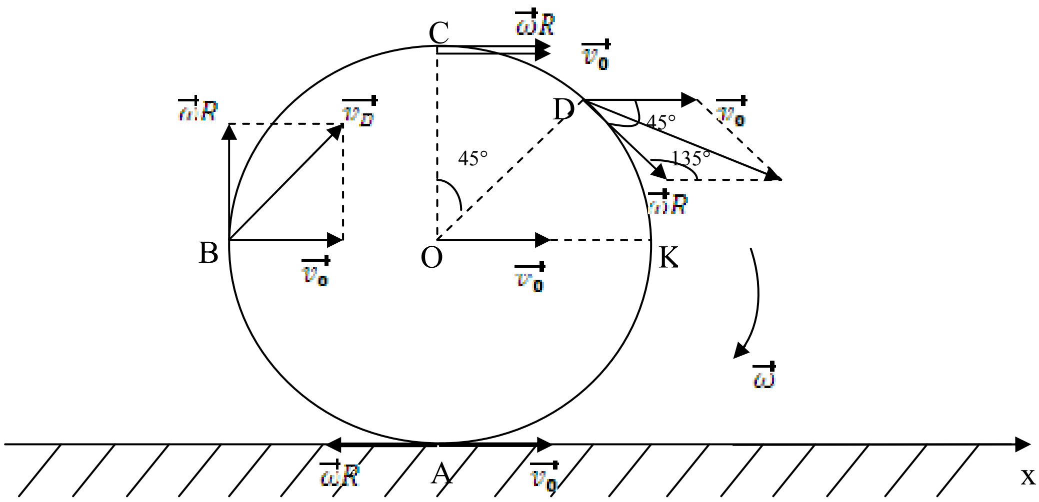
10 класс

Задача 1. Колесо без проскальзывания катится по горизонтальной дороге со скоростью v_0. Определить скорости точек A, B, C и D относительно дороги. Точка D находится по середине между точками C и K.



Решение

Колесо поступательно движется со скоростью $\vec{V}_0$, и все его точки движутся со скоростью v_0. Но колесо и вращается с угловой скоростью ω по часовой стрелке. Точка колеса A касается дороги, причем относительно дороги она покоится $v_A=0$ (колесо не проскальзывает). Значит, векторная сумма скоростей $\vec{v_A} = \vec{v_0} + \vec{\omega}R = 0$ или для модулей $v_0 - \omega R = 0$

$$v_0 = \omega R$$

$$\omega = \frac{v_0}{R}$$

Для точки B:

$$\vec{v_B} = \vec{v_0} + \vec{\omega}R$$

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + (\omega R)^2} = \sqrt{v_0^2 + v_0^2} = v_0\sqrt{2}$$

Для точки C:

$$\vec{v_C} = \vec{v_0} + \vec{\omega}R$$

$$v_C = v_0 + \omega R = v_0 + v_0 = 2v_0$$

Для точки D:

$$\vec{v_D} = \vec{v_0} + \vec{\omega}R$$

$$\vec{V}_D = \sqrt{v_0^2 + (\omega R)^2 - 2v_0\omega R\cos\alpha} = \sqrt{2v_0^2 - 2v_0^2\cos 135°} = \sqrt{2v_0^2 + 2v_0^2\frac{\sqrt{2}}{2}} = v_0\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Ответ:

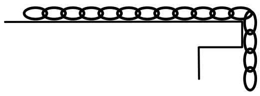
$$V_A = 0$$

$$V_B = V_0\sqrt{2}$$

$$V_C = 2V_0$$

$$V_D = V_0\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Задача 2. Около края стола лежит цепочка. Известно, что цепочка начинает соскальзывать, если со стола свешивается шестая часть ее длины (см. рисунок). Найти коэффициент трения между цепочкой и столом.



Решение

Цепочка начинает скользить, когда сила тяжести, действующая на ее висящий конец, будет равна силе трения, действующий на часть цепочки, лежащую на столе:

$$\frac{1}{6}mg = \frac{5}{6}\mu mg ,$$

где m - масса цепочки, μ - коэффициент трения между цепочкой и столом. Отсюда находим $\mu = 0,2$.

*Задача 3. А*втомобиль разгоняется равноускоренно по горизонтальной дороге. Считая силу сопротивления постоянной, определить в какую половину времени, и во сколько раз, будет израсходовано больше бензина?

Решение

Q = qm

E = ηQ = ηqm

E = Wк + Ac

$$\mathrm{E_1 = \frac{MV_1^2}{2} + F_C \cdot S_1}$$

$$\mathrm{S_1 = \frac{at_1{}^2}{2} = \frac{a\left(\frac{V_1}{a}\right)^2}{2} = \frac{V_1^2}{2a}}$$

$$E_1 = \frac{MV_1^2}{2} + F_C \cdot \frac{V_1^2}{2a} = \frac{V_1^2}{2}\left(M + \frac{F_C}{a}\right)$$

$$E_2 = \Delta W\kappa + Ac = \frac{MV_2^2}{2} - \frac{MV_1^2}{2} + Fc \cdot S_2$$

$$\mathrm{S_2 = V_1 t_2 + \frac{at_2^2}{2} = V_1 t_1 + \frac{at_1^2}{2} = \frac{V_1 \cdot V_1}{a} + \frac{V_1^2}{2a} = \frac{3V_1^2}{2a}}$$

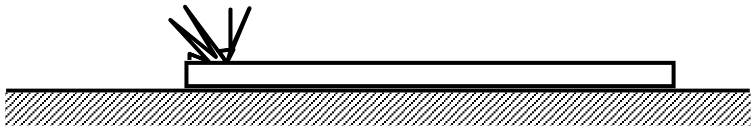
$t_1 = t_2$ $V_2 = V_1 + at_2 = V_1 + at_1 = V_1 + V_1 = 2V_1$

$$E_2 = \frac{MV_2^2}{2} - \frac{MV_1^2}{2} + Fc \cdot S_2 = \frac{M \cdot 4V_1^2}{2} - \frac{MV_1^2}{2} + Fc \cdot \frac{3V_1^2}{2a} =$$

$$\frac{3MV_1^2}{2} + Fc \cdot \frac{3V_1^2}{2a} = \frac{3V_1^2}{2}\left(M + \frac{Fc}{a}\right)$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{3V_1^2}{2}\left(M + \frac{Fc}{a}\right) : \frac{V_1^2}{2}\left(M + \frac{Fc}{a}\right) = 3$$

Задача 4 С какой минимальной скоростью должен прыгнуть кузнечик, находящийся на одном конце соломинки, чтобы попасть на другой? Соломинка имеет массу M, длину L и находится на гладкой горизонтальной поверхности. Масса кузнечика m.



Решение

Из ЗСИ в проекции на ось X

$$mv_{0x} = Mu,$$

откуда $$u = \frac{M}{m} v_{0x}. \qquad (1)$$

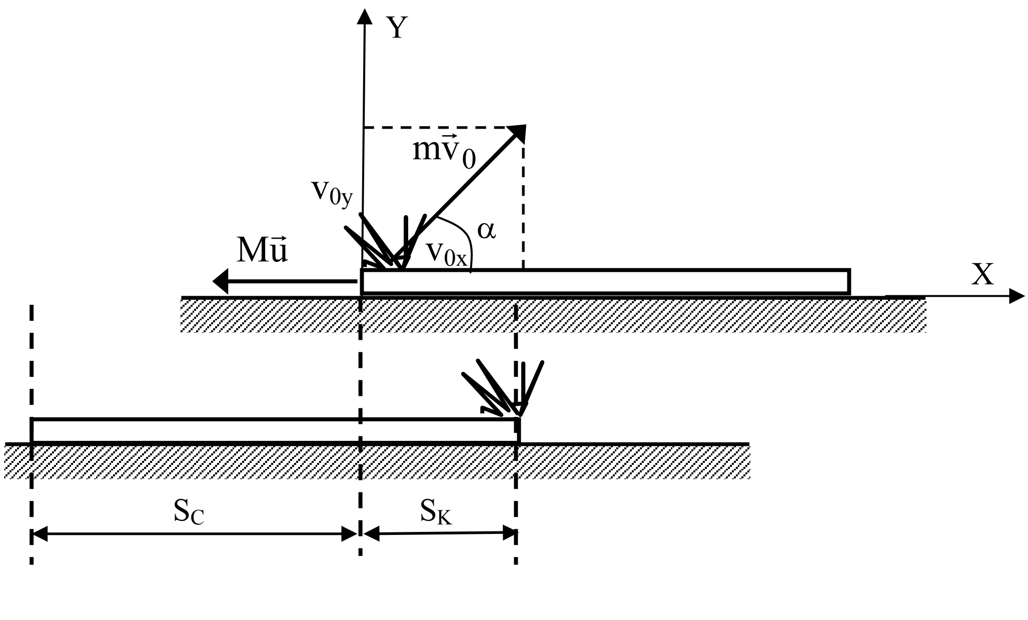
Наименьшая скорость будет при $\alpha = 45^0$, т. к. при этом угле наибольшая дальность полёта.

В верхней точке $v_y = 0$, поэтому

$$v_{0y} = gt' = g\frac{t}{2},$$

где t' - время подъёма кузнеца, а время полёта:

$$t = \frac{2v_{0y}}{g}. \qquad (2)$$



Из рисунка и из (1) и (2) следует:

$$\ell = S_C + S_K = ut + v_{0x}t = t(\frac{m}{M}v_{0x} + v_{0x}) = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}\left(\frac{m+M}{M}\right),\text{ или}$$

$$v_{0x}v_{0y} = \frac{\ell g}{2}\left(\frac{M}{m+M}\right).$$

Однако, $v_{0x} = v_{0y}$ ($\alpha = 45^0$), поэтому $v_0 = \sqrt{v_{0x}{}^2 + v_{0y}{}^2} = \sqrt{2}v_{0x}$.

Окончательно получаем:

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\left(\frac{\ell gM}{m+M}\right)}}$$

Задача 5 Какую минимальную (по модулю и направлению) силу необходимо приложить к центру ящика массой 1000кг., стоящему на горизонтальном полу, чтобы сдвинуть его с места? Коэффициент трения между ящиком и полом μ=0,75.

Решение

Если сдвигающая сила направлена горизонтально, то ее величина должна быть не менее:

$$F \geq F_{ТР\ СК} = \mu mg = 7500H.,$$

Если вертикально

$$F \geq mg = 1000H.,$$

Возможно, сила будет минимальной, когда она направлена под углом к горизонту.

Моменту сдвига ящика соответствует равенство нулю проекций сил на горизонтальную и вертикальную оси.

$$F\cos\alpha - F_{ТР.ск} = 0$$

$$F\sin\alpha + N - mg = 0$$

$$N = mg - F\sin\alpha$$

$$F_{ТР.ск} = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha)$$

Подставим последнее выражение для силы трения в первое уравнение и выразим силу

$$F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = 0$$

$$F\cos\alpha - \mu mg + \mu F\sin\alpha = 0$$

$$F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = \mu mg$$

$$F = \frac{\mu mg}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}$$

Дробь, при постоянном числителе, принимает минимальное значение, когда ее знаменатель максимален. Для определения максимального значения выражения стоящего в знаменателе дроби можно использовать известный прием исследования функции на экстремум или способ введения дополнительного угла, известный из тригонометрии.

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\varphi+\alpha)$$

Так как

$$-1 \le \sin(\varphi+\alpha) \le 1, \text{ то}$$

$$-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin\alpha + b\cos\alpha \le \sqrt{a^2+b^2}$$

и наибольшее по модулю значение выражения $\cos\alpha + \mu\sin\alpha$ будет равно:

$$\cos\alpha + \mu\sin\alpha = \sqrt{1+\mu^2}.$$

Тогда наименьшее по модулю значение силы

$$F = F_{\min} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}} = 6000H.$$

А угол, под которым эта сила направлена к горизонту найдем так:

$$f(\alpha) = \cos\alpha + \mu\sin\alpha$$

$$f^{/}(\alpha) = -\sin\alpha + \mu\cos\alpha = 0$$

$$\sin\alpha = \mu\cos\alpha$$

$$\mathrm{t}g\alpha = \mu$$

$$\alpha = \mathrm{arct}\,g\mu = \mathrm{arct}\,g(3/4)$$