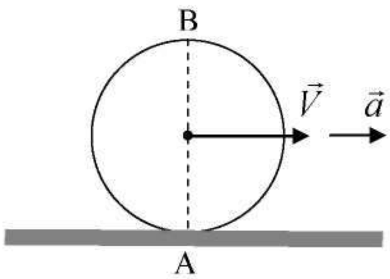
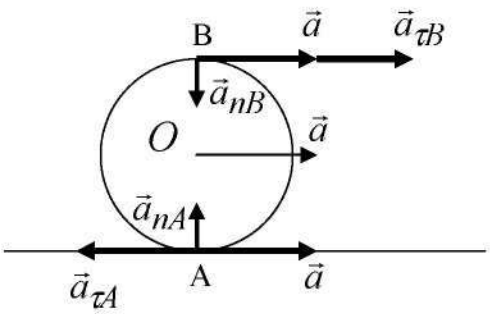
Задача № 1



Колесо радиусом $\boldsymbol{R}$ катится без проскальзывания по горизонтальной дороге с ускорением $\boldsymbol{a}$. Какие по модулю ускорения относительно дороги имеют точки **A** и **B** обода колеса расположенные на вертикальном диаметре колеса в тот момент времени, когда скорость центра колеса равна $\boldsymbol{V}$?

Возможное решение:



Так как скорость поступательного движения колеса увеличивается, то каждая точка обода вращающегося колеса имеет касательное (тангенциальное) ускорение и центростремительное (нормальное) ускорение. Колесо не проскальзывает, значит точка А, точка касания колесом дороги, имеет в любой момент времени нулевую скорость и нулевое ускорение. Т. е. $\vec{a}_\tau = -\vec{a}$, $\vec{V}_{vr} = -\vec{V}$ $\left(\left|\vec{V}_{vr}\right| = \omega R\right)$. Для точки В векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}$ сонаправлены. Центростремительное ускорение всех точек на ободе колеса одинаково, направлено к центру колеса, и равно:

$$a_n = \omega^2 R = \frac{V^2}{R}.$$

Окончательно, модуль ускорения точки А равен:

$$a = \frac{V^2}{R},$$

для точки В:

$$a = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{V^2}{R}\right)^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{V^4}{R^2}}$$

Задача № 2

Какую минимальную (по модулю и направлению) силу необходимо приложить к центру ящика массой **100 кг**, стоящему на горизонтальном полу, чтобы сдвинуть его с места? Коэффициент трения между ящиком и полом **μ = 0,75**.

Возможное решение:

Если сдвигающая сила направлена горизонтально, то ее величина должна быть не менее максимальной силы трения покоя (или силе трения скольжения):

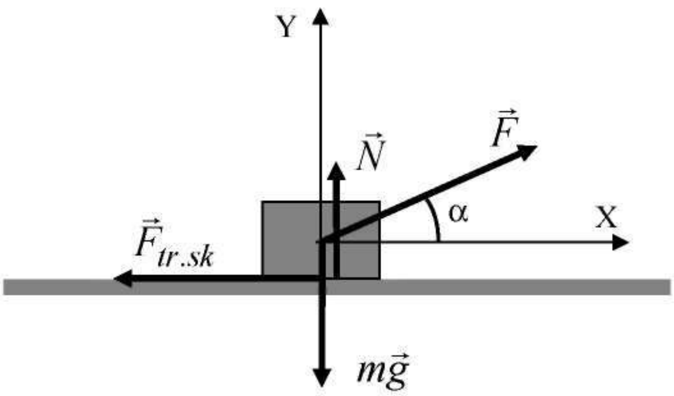
$$F \geq F_{max.tr} = F_{tr.sk} = \mu mg = 750 \text{ Н}.$$

Если вертикально, то:

$$F \geq mg = 1000 \text{ Н}.$$

Возможно, сила будет минимальной, когда она направлена под углом к горизонту.

Моменту сдвига ящика соответствует равенство нулю проекций сил на горизонтальную и вертикальную оси (X и Y):



$$\text{X:} \quad F\cos\alpha - F_{tr.sk} = 0,$$

$$\text{Y:} \quad F\sin\alpha + N - mg = 0.$$

Откуда:

$$N = mg - F\sin\alpha,$$

$$F_{tr.sk} = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha).$$

Найдём силу F:

$$F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = 0\ ,$$

$$F = \frac{\mu mg}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} \quad .$$

Дробь, при постоянном числителе, принимает минимальное значение, когда ее знаменатель максимален. Для определения максимального значения выражения стоящего в знаменателе дроби можно использовать известный прием исследования функции на экстремум или способ введения дополнительного угла, известный из тригонометрии:

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right) =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\varphi+\alpha)$$

Так как

$$-1 \le \sin(\varphi+\alpha) \le 1,$$

то:

$$-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin\alpha + b\cos\alpha \le \sqrt{a^2+b^2}$$

и наибольшее по модулю значение выражения $\cos\alpha + \mu\sin\alpha$ будет равно:

$$\cos\alpha + \mu\sin\alpha = \sqrt{1+\mu^2} \; .$$

Тогда наименьшее по модулю значение силы:

$$F = F_{\min} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{0,75\cdot 100\cdot 10}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot 10^3 = 600H$$

А угол, под которым эта сила направлена к горизонту, найдем так:

$$f(\alpha) = \cos\alpha + \mu\sin\alpha$$
$$f'(\alpha) = -\sin\alpha + \mu\cos\alpha = 0$$
$$\sin\alpha = \mu\cos\alpha$$
$$\mathrm{t}g\alpha = \mu$$

$$\alpha = arctg(\mu) = arctg(3/4) = 36{,}9^{0}.$$

Задача № 3

В сосуде с бензином плавает кусок льда. Как изменится уровень жидкости в сосуде, после того как лед растает?

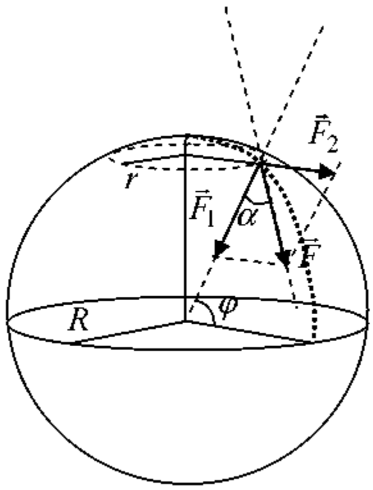
Решение:

По закону Архимеда кусок льда «вытеснил» из сосуда такое количество бензина, масса которого равна массе льда. При переходе одного и того же количества вещества из одного агрегатного состояния в другое его масса не изменяется. Масса образовавшейся после таяния льда воды равна массе вытесненного бензина. Но плотность воды больше плотности бензина. Значит, объем образовавшейся после таяния льда воды меньше объема «вытесненного» бензина. Уровень жидкости понизится.

Задача № 4

Тело находится на поверхности Земли на широте **60^0**. Определить, на какой угол отклоняется вертикаль от истинного направления вследствие вращения Земли. Землю считать шаром.

Решение:



Сила тяжести

$$F_1 = \frac{GMm}{r^2} = mg$$

направлена к центру Земли и давала бы направление вертикали, если бы Земля не вращалась. Во вращающейся системе отсчета на тело действует центробежная сила инерции, направленная по радиусу от центра окружности вращения

$$F_2 = ma_n = m\omega^2 r = m\omega^2 R\cos\varphi = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos\varphi$$

Реальная вертикаль направлена вдоль равнодействующих этих сил:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos 60^0} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - F_1F_2}\,.$$

Искомый угол находим по теореме синусов:

$$\frac{F}{\sin 60^0} = \frac{F_2}{\sin\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{F_2\sin 60^0}{F} = \frac{F_2\sqrt{3}}{2\sqrt{F_1^2 + F_2^2 - F_1F_2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 + 1 - \frac{F_1}{F_2}}}$$

Где

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{mg}{m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos\varphi} = \frac{gT^2}{4\pi^2 R\cos\varphi} \approx 580.$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 + 1 - \frac{F_1}{F_2}}} \approx \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 580} \approx 1.5\cdot 10^{-3}$$

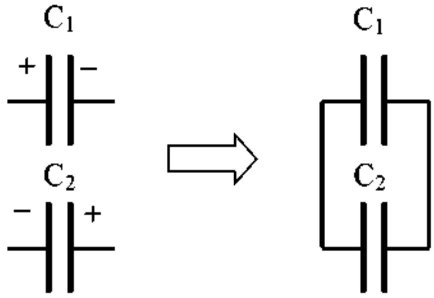
Угол α мал, поэтому:

$$sin\,\alpha \approx \alpha\,(\text{рад}) = 1{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 57{,}3^0 = 8{,}6\cdot 10^{-2}\,(\text{град}) = \boxed{\mathbf{5{,}16'}}$$

Задача № 5

Конденсатор ёмкостью **C_1 = 4 мкФ** заряжен до разности потенциалов **U_1 = 10 В**. Какой заряд будет на пластинах этого конденсатора, если к нему подключить другой конденсатор ёмкостью **C_2 = 6 мкФ**, заряженный до разности потенциалов **U_2 = 20 В**? Соединяются пластины разных знаков.

Решение:



До соединения заряд первого конденсатора $q_1 = C_1 U_1$, второго $q_2 = C_2 U_2$. После подключения заряды перераспределились, а напряжение на конденсаторах стало одинаковым U. Следовательно, заряд первого конденсатора станет $C_1 U$, а второго $C_2 U$.

Рассмотрим правые пластины конденсаторов и применим к ним закон сохранения заряда. До подключения их суммарный заряд

$$C_2 U_2 - C_1 U_1 > 0,$$

(поэтому после подключения заряды на правых пластинах станут положительными, а на левых отрицательными) а после подключения:

$$C_1 U + C_2 U = (C_1 + C_2)U.$$

Но по закону сохранения заряда:

$$C_2 U_2 - C_1 U_1 = (C_1 + C_2)U,$$

поэтому $$U = \frac{C_2 U_2 - C_1 U_1}{C_1 + C_2}.$$

Окончательно для заряда первого конденсатора имеем:

$$q' = C_1 U = C_1 \frac{C_2 U_2 - C_1 U_1}{C_1 + C_2} = \boxed{\mathbf{3{,}2 \cdot 10^{-5}\ Кл}}.$$