9 класс

9.1 Три числа x, y, z удовлетворяют соотношению: $x^z + y^z = xy(z + \frac{1}{2})$. Докажите, что хотя бы одно из чисел x или y равно произведению двух других чисел.

<u>Решение:</u>

$x^2 + y^2 = xy\left(z + \frac{1}{z}\right)$, откуда:

$\left(x^2 - xyz\right) - \left(\frac{xy}{z} - y^2\right) = 0$, следовательно:

$x(x - yz) - \frac{y}{z}(x - yz) = 0$, таким образом, получаем:

$\left(x - \frac{y}{z}\right)(x - yz) = 0$.

9.2 Сколько существует квадратных трехчленов $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами p и q, $|q| \le 55$, имеющих корень, равный 7?

<u>Решение:</u>

Переформулируем задачу: сколько существует пар целых чисел (*p, q*), где $|q| \le 55$, таких, что $49 + 7p + q = 0$?

Последнее равенство перепишем в виде $q = -7(p + 7)$, и теперь понятно, что задача свелась к вопросу: сколько существует целых чисел *p*, таких, что $|-7(p + 7)| \le 55$.

Решим это равенство в целых числах:

$|p + 7| \le 55/7 = 7\frac{6}{7}$,

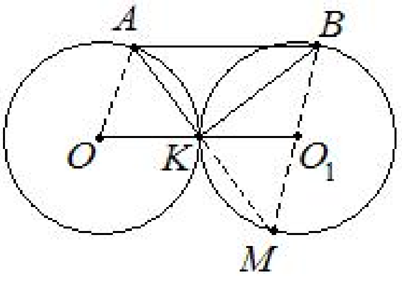
$-7 \le p + 7 \le 7$,

$-14 \le p \le 0$.

Ответ: 15.

9.3 Две окружности радиуса R касаются друг друга в точке K . Точка A лежит на одной окружности, точка B – на другой, угол AKB – прямой. Докажите, что сумма отрезка AB равна 2R.

Решение:



Дано: окружность радиуса R с центром в точке O, окружность радиуса R с центром в точке O_1, K – точка касания окружностей, $\angle AKB = 90^\circ$.

Доказать: $AB = 2R$.

Доказательство.

Точки O, K и O_1 лежат на одной прямой. Дополнительные построения: продолжим секущую AK до точки M. Угол BKM прямой, поэтому опирается на диаметр, т.е. $BM = 2R$.

$\Delta OAK = \Delta O_1MK$ по двум сторонам и углу между ними ($OK = KO_1 = R$, $OA = O_1M = R$, $\angle OKA = \angle O_1KM$ как вертикальные, а так как ΔOAK и ΔO_1MK – равнобедренные, то и $\angle AOK = \angle MO_1K$).

Следовательно, $AK = KM$. В ΔABM отрезок BK является высотой и медианой, следовательно, треугольник ABM равнобедренный: $AB = BM = 2R$.

9.4 Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2 + ax + 1 = 0$ имеет два корня, причем один из них больше 3, а второй – меньше 3.

Решение:

Уравнение $f(x) = x^2 + ax + 1 = 0$ имеет два корня, один меньше 3, другой больше 3, тогда и только тогда, когда $f(3) < 0$:

$9 + 3a + 1 < 0$,

$a < -\frac{10}{3}$.

Ответ: $a < -\frac{10}{3}$.

9.5 В сосуд налили 12 литров щелочи и 8 литров воды. Часть этой смеси отлили, а в сосуд долили 10 литров воды. Затем снова отлили из сосуда столько же жидкости, сколько в первый раз. После этого оказалось, что оставшийся в сосуде раствор содержит 5 литров щелочи. Сколько литров смеси отлили из сосуда в первый раз?

Решение:

Обозначим x – искомое количество отливаемой смеси.

Итак, перед первым отлитием было: раствора 20 л, щелочи 12 л, таким образом, концентрация щелочи $\frac{3}{5}$. После первого отлития и добавления воды стало: раствора $20 - x + 10 = 30 - x$ л, щелочи $12 - \frac{3}{5}x$ л, концентрация щелочи $\frac{12 - \frac{3}{5}x}{30 - x}$.

После второго отлития раствора стало: $30 - 2x$ л, в нем щелочи:

$(30 - 2x)\frac{12 - \frac{3}{5}x}{30 - x}$ л.

По условию

$$(30 - 2x)\frac{12 - \frac{3}{5}x}{30 - x} = 5,$$

выполнив преобразования, получим:

$$360 - 24x - 18x + \frac{6}{5}x^2 = 150 - 5x,$$

$$\frac{6}{5}x^2 - 37x + 210 = 0,$$

решая квадратное уравнение, получим:

$$x = \frac{37 \pm \sqrt{361}}{\frac{12}{5}} = \frac{37 \pm 19}{\frac{12}{5}} = \begin{cases} 7{,}5 \\ \frac{70}{3} > 20, \textit{ что не удовлетворяет условию задачи.} \end{cases}$$

Ответ: 7,5 л.