

9 класс

9.1. Решите в целых числах систему

$$\begin{cases} 7x + yz = 1774 \\ 7y + xz = 1791 \end{cases}$$

Решение:

Вычтем из второго уравнения первое:

$$7y + xz - 7x - yz = 17,$$

$$7(y - x) + z(x - y) = 17,$$

$$(x - y)(z - 7) = 17.$$

Так как 17 – простое, $x - y$ и $z - 7$ – целые, то

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ z - 7 = 17 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - y = -1, \\ z - 7 = -17 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - y = 17, \\ z - 7 = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - y = -17, \\ z - 7 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 1, \\ z = 24 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y - 1, \\ z = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y + 17, \\ z = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y - 17, \\ z = 6 \end{cases}$$

Подставляем в первое уравнение:

$$7y + 7 + 24y = 1774, \quad 7y - 7 - 10y = 1774, \quad 7y + 91 + 8y = 1774,$$

$$31y = 1767, \quad 3y = -1781, \quad 15y = 1683,$$

$$y = 57, x = 58. \quad y = -\frac{1781}{3} \text{ - не целое} \quad y = -\frac{1683}{15} \text{ - не целое}$$

$$7y - 91 + 6y = 1774,$$

$$13y = 1865,$$

$$y = -\frac{1865}{13} \text{ - не целое}$$

Ответ: $x = 58, y = 57, z = 24.$

9.2 Докажите, что если $x > 0$, то $x^2 + 2/x \geq 3$.

Решение:

имеем:

$$\begin{aligned}x^3 - 3x + 2 &= x^3 - x - (2x - 2) = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x(x + 1) - 2) = \\&= (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)(x - 1)(x + 2) = (x - 1)^2(x + 2) \geq 0\end{aligned}$$

9.3 Четыре погрузчика разной производительности загрузили баржу песком, причем первый погрузчик работал 1 час, второй – 3 часа, третий – 5 часов и четвертый – 1 час. Ту же баржу погрузчики загрузят песком, если первый проработает 4 часа, второй – 3 часа, третий – 2 часа и четвертый – 4 часа. За сколько часов погрузчики загрузят баржу, если бы все 4 погрузчика работали одно и то же время?

Решение:

Пусть x, y, z, p – производительность соответственно 1-го, 2-го, 3-го и 4-го погрузчиков. Тогда из условий задачи следует, что:

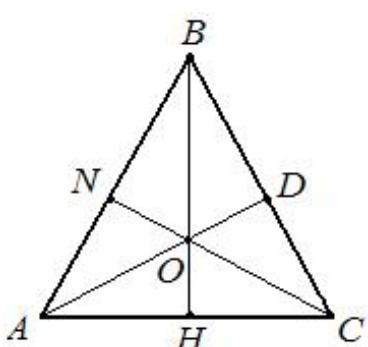
$$\begin{cases} x + 3y + 5z + p = 1, \\ 4x + 3y + 2z + 4p = 1. \end{cases}$$

Требуется найти время t , за которое будет выполнена вся работа, т.е. $t = \frac{1}{x + y + z + p}$. Складывая первое уравнение с удвоенным вторым, получаем $9x + 9y + 9z + 9p = 3$.

Поэтому $3(x + y + z + p) = 1$, т.е. $t = 3$.

Ответ: 3 часа.

9.4 Высоты равнобедренного треугольника ABC , в котором $AB = BC$, пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника ABC , если длина AO равна 5, а длина высоты AD равна 8.



Дано: ABC – треугольник, $AB = BC$. $AD \perp BC$, $CN \perp AB$, $AD \cap CN = O$. $AO = 5$, $AD = 8$.

Найти: площадь S треугольника ABC .

Решение:

$AO = OC = 5$, $OD = 8 - 5 = 3$. $\triangle ODC$ прямоугольный, по теореме Пифагора $DC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. $\triangle ADC$ прямоугольный, по теореме Пифагора $AC = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$.

BH – высота треугольника ABC и медиана, поэтому $HC = 2\sqrt{5}$. Треугольники BHC и ADC подобны по трем углам (прямоугольные и угол C – общий), поэтому

$$\frac{BH}{AD} = \frac{HC}{DC} \Leftrightarrow \frac{BH}{8} = \frac{2\sqrt{5}}{4}.$$

Получаем: $BH = 4\sqrt{5}$. Тогда

$$S = \frac{1}{2} BH \cdot AC = 2 \cdot 4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} = 40.$$

Ответ: $S = 40$.

9.5. a и b – натуральные числа.

Докажите, что если a^2 делится на $a+b$, то b^2 делится на $a+b$

Решение:

$b^2 = a^2 + (b^2 - a^2) = a^2 + (b-a)(a+b)$. Оба слагаемых в правой части последнего равенства делятся на $a+b$. Таким образом, b^2 делится на $a+b$.