9 класс

9.1. Решите уравнение $||x|-1|=|x|-1$.

<u>Решение:</u>

Произведем замену переменных. Пусть $|x|-1=a$.

Получаем равенство $|a|=a$.

Равенство $|a|=a$ равносильно неравенству $a\ge 0$. Для нашего уравнения это означает, что $|x|-1\ge 0$, т.е. $|x|\ge 1$.

Ответ: $x\le -1,\ x\ge 1$**.**

9.2. Прямая, проходящая через фиксированную точку P ***оси ординат, пересекает параболу*** $y=x^2$ ***в точках*** A ***и*** B***. Докажите, что произведение абсцисс точек*** A ***и*** B ***не зависит от направления прямой (т.е. от углового коэффициента прямой).***

<u>Решение:</u>

Пусть точка P имеет координаты $(0;y_0)$. Уравнение любой (невертикальной) прямой, проходящей через точку P, имеет вид $y=kx+y_0$. Абсциссы точек пересечения такой прямой с параболой $y=x^2$ определяются как корни уравнения $x^2=kx+y_0$, т.е, $x^2-kx-y_0=0$.

Произведение корней такого квадратного уравнения (если оно существует) по теореме Виета равно $-y_0$ и от k не зависит.

Доказано.

9.3. Докажите, что если $a\ge 0$***,*** $b\ge 0$***,*** $a+b=1$***, то*** $\dfrac{a^2}{1+a}+\dfrac{b^2}{1+b}\ge\dfrac{1}{3}$**.**

<u>Решение:</u>

Одно из многих возможных решений заключается в следующем. Заметим, что $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{1}{2}$, т.е.: $4ab\le 1$.

Далее действуем следующим образом:

$$\frac{a^2}{1+a}+\frac{b^2}{1+b}=\frac{a^2+a^2b+b^2+ab^2}{(1+a)(1+b)}=\frac{a^2+b^2+ab(a+b)}{1+a+b+ab}=\frac{a^2+b^2+ab}{2+ab}=$$

$$=\frac{(a+b)^2-ab}{2+ab}=\frac{1-ab}{2+ab}.$$

Теперь проверим, что $\frac{1-ab}{2+ab}\geq\frac{1}{3}$.

Преобразуя неравенство, получим:

$3-3ab\geq 2+ab$,

откуда:

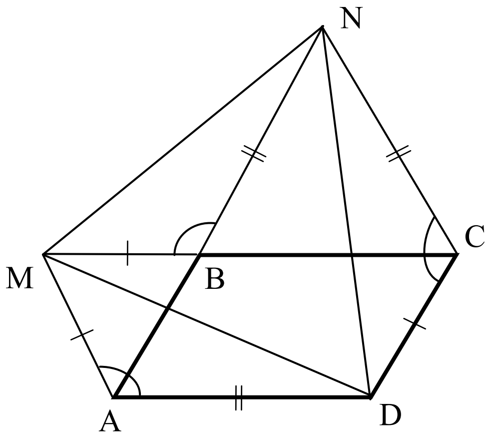
$4ab\leq 1$.

Доказано.

9.4. На сторонах *AB* ***и*** *BC* ***параллелограмма*** *ABCD* ***вне его построены равносторонние треугольники*** *ABM* ***и*** *BCN****. Докажите, что треугольник*** *DMN* ***– равносторонний.***

Решение:

См. рисунок.



Проведем доказательство через доказательство равенства треугольников *MAD*, *MBN* и *DCN*.

1. $\Delta MAD=\Delta DCN$ по двум сторонам и углу между нами: *MA*=*DC*, *AD*=*CN*, $\angle MAD=\angle DCN$, поскольку $\angle MAD=\angle BAD+\angle MAB(60^o)$; $\angle DCN=\angle DCB+\angle BCN(60^o)$.

2. В треугольнике *MBN: MB*=*MA*=*DC*, *BN*=*AD*=*CN*.

3. Осталось доказать равенство $\angle MBN=\angle MAD=\angle DCN$.

Как известно, круг составляет 360°.

Определим величину угла:

$$\angle MBN=360^o-\angle ABC-\angle MBA-\angle NBC=360^o-\left(180^o-\angle DCB\right)-60^o-60^o=$$

$$=\angle DCB+60^o=\angle MAD=\angle DCN.$$

Доказано.

9.5. В классе учится 35 школьников. Они изучают 10 предметов. После выставления годовых оценок оказалось, что средний балл по каждому предмету больше $4\frac{2}{3}$***. Докажите, что хотя бы 5 школьников закончили год без двоек и единиц.***

Решение:

Заметим вначале, что по каждому предмету не более трех школьников могли получить двойку или единицу.

В самом деле, предположим, что таких школьников не меньше четырех. Тогда общая сумма оценок по этому предмету не больше $31 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 163$, а средний балл меньше $4\frac{2}{3}$, а, стало быть, всего двоек и единиц поставлено не больше $3 \cdot 10 = 30$. Следовательно, по крайней мере, 5 школьников не имеют ни двоек, ни единиц.

Доказано.