9 класс

9.1 Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^3 - 5\cdot\dfrac{y^2}{x} = \dfrac{6}{y}, \\ y^3 - 5\cdot\dfrac{x^2}{y} = \dfrac{6}{x}. \end{cases}$

Решение:

Так как из условия следует, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то разделим первое уравнение на x, а второе на y. Получим:

$$\begin{cases} x^2 - 5\cdot\dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{6}{xy}, \\ y^2 - 5\cdot\dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{6}{xy}. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе:

$$x^2 - y^2 - 5\cdot\left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{y^2}\right) = 0, \quad x^2 - y^2 - 5\cdot\left(\frac{y^4 - x^4}{x^2y^2}\right) = 0,$$

$$x^2 - y^2 + 5\cdot\frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2y^2} = 0, \quad x^2 - y^2 + \left(1 + \frac{5\cdot(x^2 + y^2)}{x^2y^2}\right) = 0.$$

Так как $\left(1 + \dfrac{5\cdot(x^2 + y^2)}{x^2y^2}\right) \neq 0,$ то, следовательно, $x^2 - y^2 = 0$ или $x = \pm y$.

Рассмотрим отдельно два случая:

1) $x = y,$ тогда $x^2 - 5 = \dfrac{6}{x^2}, x^4 - 5x^2 - 6 = 0.$ Введем замену $x^2 = t\ (t > 0)$ и перейдем к уравнению $t^2 - 5t - 6 = 0$, корнями которого являются $t = -1, t = 6$. Учитывая ограничения на t и возвращаясь к замене, получим $x^2 = 6,\ x = \pm\sqrt{6}$. Находим решение системы $\left(-\sqrt{6}; -\sqrt{6}\right), \left(\sqrt{6}; \sqrt{6}\right).$

1) $x = -y,$ тогда $x^2 - 5 = -\dfrac{6}{x^2}, x^4 - 5x^2 + 6 = 0.$ Введем замену $x^2 = t\ (t > 0)$ и перейдем к уравнению $t^2 - 5t + 6 = 0$, корнями которого являются $t = 2, t = 3$. Возвращаясь к замене, получим $\left[\begin{array}{l} x^2 = 2, \\ x^2 = 3; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2}, \\ x = \pm\sqrt{3}; \end{array}\right.$. Находим решение системы $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right), \left(\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right), \left(\sqrt{3}; -\sqrt{3}\right).$

Ответ: $\left(\pm\sqrt{6}; \pm\sqrt{6}\right), \left(\pm\sqrt{2}; \mp\sqrt{2}\right), \left(\pm\sqrt{3}; \mp\sqrt{3}\right)$

9.2 ***Какое из чисел*** 31^{11} ***или*** 17^{14} ***больше?***

Решение:

Так как $31^{11} < 32^{11} = 2^{55} < 2^{56} = 16^{14}$, а $16^{14} < 17^{14}$, то второе число больше.

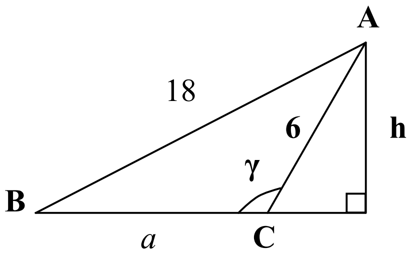
9.3 О натуральных числах a, p, q известно, что $ap+1$ делится на q, а $aq+1$ делится на p. Докажите, что $a > \frac{pq}{2(p+q)}$.

Решение:

Очевидно, что p и q взаимно просты, так как если d их общий делитель, то он является также делителем числа $ap+1$, а, следовательно, и числа $a \cdot p+1-a \cdot p$. Поэтому число $a \cdot p + aq + 1$, которое делится и на p, и на q, делится на их произведение pq. Значит, $a(p+q) \geq pq-1$, откуда следует, что $2a(p+q) > pq$ (левая часть увеличилась на $a(p+q) > 1$, и $a > \frac{pq}{2(p+q)}$.

9.4 ***В тупоугольном треугольнике большая сторона равна 18, а меньшая равна 6. Может ли площадь треугольника равняться 51?***

Решение:



Так как угол γ тупой ,то $18^2>a^2+6^2$,т.е. $a^2<288$, откуда $a^2<289=17^2, a<17$.
Тогда $S_{abc}=1/2ah<1/2 \cdot 17 \cdot 6=51$
Ответ: не может.

9.5 ***Имеется таблица из 11 строк и 24 столбцов .В каждую клетку таблицы произвольным образом записывается одно из трех чисел 1,4,7. Для каждого столбца составляется сумма всех чисел, стоящих в этом столбце. Докажите, что найдутся два столбца с равными суммами.***

Решение:

Очевидно, что все столбцевые суммы лежат в пределах от 11 до 77.Заметим, что все эти суммы при делении на 3 дают один и тот же остаток 2, т.е имеют вид 3n+2, $n \in N$

В самом деле, складываются числа 1,4,7, т.е. числа вида 3k+1,где k=0,1,2:
$(3k_1+1)+(3k_2+1)+\ldots(3k_{11}+1)=3(k_1+k_2+\ldots k_{11})+11=3(k_1+k_2+\ldots k_{11}+3)+2=3n+2$, $n \in N$.
Посмотрим, сколько натуральных чисел вида 3n+2 находится на отрезке[11;77]:

$$11 \leq 3n+2 \leq 77,$$
$$3 \leq n \leq 25.$$

Видим, что таких чисел ровно 23. Поскольку столбцевых сумм имеется 24, то среди них непременно есть совпадающие.